Complément à l'exposé n° 6

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. nº 6 bis, p. 7-8
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A7_0>

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Année 1955/56

-:-:-:-

Exposé n° 6 bis

COMPLÉMENT A L'EXPOSÉ N° 6

Nous avons annoncé le théorème :

THÉORÈME. - Si Ω est borné, l'injection de $\mathcal{D}_1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (complètement continue).

Appelons $\mathcal{D}_{1,\bar{\Omega}}(R^n)$ le sous-espace de $\mathcal{D}_1(R^n)$ formé des fonctions à support dans $\bar{\Omega}$. On sait ([1], 11-02, théorème 1) que, si on appelle $\tilde{f}$ la fonction sur R^n obtenue en prolongeant $f \in \mathcal{D}_1(\Omega)$ par 0 sur $\complement\Omega$, $f \longrightarrow \tilde{f}$ est une application continue $\mathcal{D}_1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}_{1,\bar{\Omega}}(R^n)$. D'autre part, si g_Ω est la restriction à Ω d'une fonction $g \in L^2(R^n)$, $g \longrightarrow g_\Omega$ est une application continue $L^2(R^n) \longrightarrow L^2(\Omega)$. Comme alors l'injection $\mathcal{D}_1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ se factorise en $\mathcal{D}_1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}_{1,\bar{\Omega}}(R^n) \longrightarrow L^2(R^n) \longrightarrow$ $\longrightarrow L^2(\Omega)$, il suffit de démontrer que l'injection $\mathcal{D}_{1,\bar{\Omega}}(R^n) \longrightarrow L^2(R^n)$ est compacte, c'est-à-dire que la boule unité $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}_{1,\bar{\Omega}}(R^n)$ est relativement compacte dans $L^2(R^n)$. Nous nous appuierons sur le

LEMME. - Dans un espace métrique complet, tout ensemble A, relativement compact à ε près quel que soit ε, est relativement compact.

Relativement compact à ε près signifie : il existe un relativement compact K_ε tel que tout point de K soit distant de K_ε d'au plus ε. Il existe en effet un recouvrement de $K_{\varepsilon/4}$ par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/4$. Les boules concentriques de rayon ε recouvrent A. Par suite, quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement de A par un nombre fini de boules de rayon ε, ce qui entraîne bien que A soit précompact donc relativement compact puisque l'espace est complet. Le lemme est démontré.

Soit alors $\rho \in \mathcal{D}$ et pour le moment fixe. $\mathcal{B}$ est bornée dans $\mathcal{D}_{1,\bar{\Omega}}(R^n)$ donc dans $\mathcal{E}'$, donc l'ensemble des $f * \rho$, où $f \in \mathcal{B}$, est borné donc relativement compact dans $\mathcal{D}$, et par suite dans L^2 dont la topologie est moins fine.

Nous allons maintenant montrer ~~que~~, quel que soit ε, on peut choisir $\rho \in \mathcal{D}$ de façon que $\| f * \rho - f \|_{L^2} \leq \varepsilon$ pour $f \in \mathcal{B}$. Nous nous servirons d'une paramètrix de l'équation de Laplace : si on prend une fonction α, égale à $-C = -\frac{1}{(n-2)S_n}$ au voisinage de 0, vérifiant $0 \geqslant \alpha \geqslant -C$, et ayant son support dans la boule $\mathcal{B}_{\varepsilon_1}$: $|x| \leqslant \varepsilon_1$, on a :

$$\Delta\left(\frac{\alpha}{r^{n-2}}\right) = \delta - \rho \qquad \text{où } \rho \in \mathcal{D} \text{ et support de } \rho \subset B_{\varepsilon_1}$$

et par suite
$$f * \Delta\left(\frac{\alpha}{r^{n-2}}\right) = f - \rho * f$$

ou encore
$$f - \rho * f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} * \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\alpha}{r^{n-2}}\right)$$

On sait que si $g \in L^2$ et μ est une mesure à support compact, $g * \mu \in L^2$ et :

$$\|g * \mu\|_{L^2} \leqslant \|g\|_{L^2} \int |\mu|$$

ce qui donne ici :

$$\|f - \rho * f\|_{L^2} \leqslant \sum \left\|\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\|_{L^2} \cdot \int_{B_{\varepsilon_1}} \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\alpha}{r^{n-2}}\right)\right| dx$$

nous avons donc maintenant à majorer :

$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\alpha}{r^{n-2}}\right)\right| dx \leqslant \int \left|(2-n)\frac{x^i \alpha}{r^n}\right| dx + \int \frac{1}{r^{n-2}}\left|\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\right| dx$$

or :
$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \left|\frac{x^i \alpha}{r^n}\right| dx \leqslant C \int_{B_{\varepsilon_1}} \frac{1}{r^{n-1}}\, dx = \int_0^{\varepsilon_1} k_1\, dr = k_1 \varepsilon_1$$

On peut prendre α de façon que $\left|\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\right| \leqslant \frac{k_2}{\varepsilon_1}$ (il suffit de prendre une fonction α_0 égale à $\frac{-1}{(n-2)S_n}$ au voisinage de 0 et de support contenu dans la boule B_1 de cent. 0 et de rayon 1, et $\alpha(x) = \alpha_0\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right)$), donc :

$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \frac{1}{r^{n-2}}\left|\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\right| dx \leqslant \int \frac{k_2}{\varepsilon_1}\frac{dx}{r^{n-2}} = \int_0^{\varepsilon_1} \frac{k_3}{\varepsilon_1}\, r.dr = k_3/2 \,.\, \varepsilon_1$$

et finalement
$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\alpha}{r^{n-2}}\right)\right| dx \leqslant k\, \varepsilon_1$$

d'où $\|f - \rho * f\|_{L^2} \leqslant k'\varepsilon_1$.

En prenant $k'\varepsilon_1 = \varepsilon$ cela montre bien que $\mathcal{B}$ est relativement compacte à ε près.

Référence bibliographique

[1] SCHWARTZ L., Séminaire, 2.- Paris, 1954/55 (multigraphié).