Laurent Schwartz

Propriétés de l'opérateur de Green et problème de Cauchy (fin)

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. nº 5, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Année 1955/56

-:-:-:-

25 mai 1956

Exposé n° 5

PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR DE GREEN ET PROBLÈME DE CAUCHY FIN

par Laurent SCHWARTZ.

-:-:-:-

Rappels

Nous avons vu, dans le précédent exposé, que si l'on se borne à vouloir que $G(t)$ prenne ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}')$, alors $t \longrightarrow G(t)$ est une fonction indéfiniment dérivable de $t \geqslant 0$. $G(t)$ admet des développements limités de la forme :

$$G(t) = \sum_{r=0}^{k} \Delta^r \frac{t^{2r+1}}{(2r+1)!} + \mathcal{O}(t^{2k+3}) .$$

Mais dans ce cas, $u = G * A$ $(A \in \mathcal{D}'_1)$, qui vérifie $\Box u = A$, appartient à $\mathcal{D}'$, et parler des "valeurs au contour" de u n'a plus aucun sens.

Toutefois, en tant que distribution en t , $G(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$, c'est-à-dire que $\langle G(t) , \varphi(t) \rangle \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$.

Jusqu'ici, lorsque $G(t)$ prenait ses valeurs dans un espace $\mathcal{L}(E ; F)$, nous maintenions $E = \mathcal{D}'_1$ et nous cherchions à obtenir des propriétés intéressantes de $G(t)$ en élargissant F .

Nous pouvons maintenant essayer la méthode inverse : maintenir $F = \mathcal{D}_1$ et restreindre E . On peut procéder par transposition : si $G(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}'_{2k+1})$ $(k \geqslant 0)$, son transposé prend les siennes dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1} ; \mathcal{D}_1)$. Mais puisque l'opérateur $-\Delta + p^2$ est égal à son transposé, il en est de même pour son inverse $\mathcal{G}_{p^2}$ donc pour $G(t)$. Ce transposé aura évidemment les mêmes propriétés de dérivabilité que $G(t)$.

Pour le voir il suffit d'ailleurs de partir de l'égalité $\mathcal{G}_{p^2}(I - \frac{\Delta}{p^2}) = I$, où I est une certaine injection canonique. Cette égalité est la transposée de

$(I - \frac{\Delta}{p^2}) \mathcal{G}_{p^2} = I$ qui nous avait servi jusqu'ici à obtenir nos développements limités de $G(t)$; elle nous donne :

$$\mathcal{G}_{p^2} = \sum_{s=0}^{k} \frac{\Delta^s}{p^{2s+2}} + \mathcal{G}_{p^2} \frac{\Delta^{k+1}}{p^{2k+2}} \quad ;$$

et l'on voit bien que $\mathcal{G}_{p^2} \Delta^{k+1}$ applique $\mathcal{D}_{2k+1}$ dans $\mathcal{D}_1$. En effet, Δ^{k+1} applique $\mathcal{D}_{2k+1}$ dans $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{G}_{p^2}$ applique $\mathcal{D}'_1$ dans $\mathcal{D}_1$.

En passant à la limite suivant k, on voit que $G(t)$ (ou plus rigoureusement sa restriction à $\mathcal{D}$) est une fonction indéfiniment dérivable de $t \geqslant 0$, nulle pour $t < 0$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}; \mathcal{D}_1)$.

Remarquons encore qu'on peut introduire des espaces intermédiaires : $\Delta^h \mathcal{G}_{p^2} \Delta^{k+1-h}$ applique $\mathcal{D}_{2k+1-2h}$ dans $\mathcal{D}'_{2h-1}$.

En convenant que $\mathcal{D}_{-1} = \mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_{-1} = \mathcal{D}_1$, on voit que, pour chaque $0 \leq h \leq k+1$, $G(t)$ peut être considéré comme une fonction de t, nulle pour $t < 0$, $(2k - 1)$ fois dérivable pour $t \geqslant 0$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1-2h}; \mathcal{D}'_{2h-1})$.

Par contre, on ne peut pas en déduire que $G(t)$ soit $(2k - 1)$ fois dérivable pour $t \geqslant 0$ en la considérant comme à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+3}; \mathcal{D}_3)$, ou plus généralement dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1+r}; \mathcal{D}_{r+1})$ si $r \geqslant 1$, ou dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_{r+1}; \mathcal{D}'_{2k+1+r})$.

<u>Application aux problèmes de Cauchy fins.</u>

Il s'agit de résoudre $\Box u = g$. En ce qui concerne les conditions initiales, on désire $u \in \mathcal{E}^2_t(\mathcal{D}')$ (1) et $u_0 = u_1 = 0$. En ce qui concerne les valeurs au contour, si on est peu exigeant, on voudra que $u \in \mathcal{D}'_t(\mathcal{D}_1)$; si on l'est plus, que $u \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}_1)$; et si on l'est extrêmement, que $u \in \mathcal{E}^2_t(\mathcal{D}_1)$. Pour espérer satisfaire à ces exigences, il faut imposer à g certaines conditions. Encore celles-ci ne devront pas être trop ubuesques !

---

(1) Dans ce qui suit, pour simplifier, $\mathcal{E}^m_t$ désignera l'espace des fonctions nulles pour $t < 0$ et m fois continûment dérivables pour $t \geqslant 0$.

Remarquons tout d'abord que nos premières conditions sont vérifiées dès que $g(t)$ (prenant ses valeurs dans $\mathcal{D}'_1$) est <u>continue</u> pour $t \geqslant 0$. En effet, $u = G * g$, $G \in \mathcal{E}^3_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}'_5))$ et $G(0) = 0$, $G'(0) = I$. Par conséquent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G' * g \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \{G''\} * g + g$$

sont des fonctions continues pour $t \geqslant 0$; et visiblement $u_0 = u_1 = 0$.

Remarquons que $u_2 = (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})_{t=0} = g(0)$; c'est normal puisque $(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})_{t=0} = g(0) + (\Delta u)_{t=0}$ et que $(\Delta u)_{t=0} = \Delta(u_0) = 0$.

Si on désire seulement que $u \in \mathcal{D}'_t(\mathcal{D}_1)$, on sera automatiquement satisfait car $G \in \mathcal{D}'_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1))$.

Si on veut que $u \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}_1)$, pour que ça marche, on pourra supposer que

1°) a) $g \in \mathcal{E}^3_t(\mathcal{D}'_1)$;

b) $g(0) = g'(0) = 0$.

En effet, nous avons vu que $G(t)$ est dérivée troisième (au sens des distributions) d'une fonction $H(t) \in \mathcal{E}^3_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1))$. Alors $u = G * g = H''' * g = H * g''' = H * \{g'''\} + H \quad g''(0)$ est bien une fonction continue de $t \geqslant 0$ à valeurs dans $\mathcal{D}_1$. Mais il est clair que les conditions b) peuvent être génantes.

On peut aussi imposer :

2°) $g \in \mathcal{E}^1_t(\mathcal{D}_1)$, sans conditions pour $t = 0$. Mais alors g doit être nulle au contour. Comme $G(t)$ est dérivée première de $H \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}_1))$, $u = G * g = H' * g = H * \{g'\} + H\, g(0) \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}_1)$.

Si on impose

3°) $g \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}_3)$, ce qui signifie que g est nulle au contour ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant 2$ (dérivées par rapport à $x_1 , \ldots , x_n$) , alors $u = G * g \in \mathcal{E}^1_t(\mathcal{D}_1)$ car $G \in \mathcal{E}^1_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}_3 ; \mathcal{D}_1))$. On obtient plus qu'on ne voulait ; cela tient à ce que les conditions affirmant que $G(t)$ appartient à $\mathcal{E}^{2k-2}_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1} ; \mathcal{D}_1)$ entraînent que $G(t)$ appartienne aussi à $\mathcal{E}^{2k-1}_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1} ; \mathcal{D}_1))$.

Passons maintenant à un problème de Cauchy plus général, dans lequel les valeurs initiales et celles au contour ne sont plus nécessairement nulles. Ces dernières seront précisées par la donnée d'un élément $\gamma \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_1)$. On cherche $u \in \mathcal{E}_t^2(\mathcal{D}')$ tel que $\Box u = g$ et que $\gamma - u \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$ (on pourrait d'ailleurs remplacer $\mathcal{E}_t^0$ par d'autres espaces, par exemple $\mathcal{D}'_t$). Posons $U(t) = \Upsilon(t)\ (u(t) - \gamma(t))$; alors :

$$\Box U(t) = g - \Box\gamma + (u_1 - \gamma_1) \otimes \delta(t) + (u_0 - \gamma_0) \otimes \delta'(t)$$

d'où :

$$u = \gamma + G * \Box U = \gamma + G * [g - \Box\gamma + (u_1 - \gamma_1) \otimes \delta(t) + (u_0 - \gamma_0) \otimes \delta'(t)] .$$

Appliquons les résultats obtenus précédemment. Nous voulons que $U \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$. Quelles conditions suffira-t-il d'imposer aux divers termes du second membre ?

1) <u>Conditions sur</u> g : si $g(t) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}'_1)$, alors $G * g \in \mathcal{E}_t^2(\mathcal{D}')$. D'autre part, si $g \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_1)$ par exemple (condition 2°), p. 3), $G * g \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$.

2) <u>Conditions sur</u> $u_0 - \gamma_0$, $u_1 - \gamma_1$:

Si $u_0 - \gamma_0 \in \mathcal{D}_3$, et $u_1 - \gamma_1 \in \mathcal{D}_3$, on aura évidemment $G'(t)\ (u_0 - \gamma_0) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$ puisque $G \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{L}(\mathcal{D}_3\ ;\ \mathcal{D}_1))$, et a fortiori $G(t)\ (u_1 - \gamma_1) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$.

On voit que, pour $t = 0$, les conditions au contour doivent être assez strictes.

3) <u>Conditions sur</u> γ <u>et</u> $\Box\gamma$

Il serait absurde d'imposer des conditions au contour à γ , qui précisément sert à définir les valeurs au contour de u . Celles-ci doivent être a priori quelconques !

Reportons-nous au problème de Cauchy avec conditions aux limites nulles. Dans ce cas-là, il fallait que le second membre possédât certaines propriétés, afin que $u \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$: parmi celles-ci, 2°) et 3°) faisaient intervenir les valeurs au contour, mais non 1°). Ces dernières donnent, dans notre cas :

a) $\Box\gamma \in \mathcal{E}_t^3(\mathcal{D}'_1)$;

b) $\gamma_2 - \Delta\gamma_0 = \gamma_3 - \Delta\gamma_1 = 0$, où $\gamma_r = \left(\frac{\partial^r \gamma}{\partial t^r}\right)_{t=0}$. Et l'on voit que $\gamma \in \mathcal{E}_t^5(\mathcal{E}_1)$ implique $\Box\gamma \in \mathcal{E}_t^3(\mathcal{D}'_1)$.