Laurent Schwartz

Problème de Cauchy grossier et expression de G comme fonction de t

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. nº 4, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Année 1955/56

-:-:-:-

18 mai 1956

Exposé n° 4

PROBLÈME DE CAUCHY GROSSIER ET EXPRESSION DE G COMME FONCTION DE t .

par Laurent SCHWARTZ

Rappels :

$G(\hat{t})$ désigne la transformée de Laplace inverse de la fonction de Green $\mathcal{G}_{p^2}$ de $-\Delta + p^2$; $G(\hat{t})$ est à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$ et vérifie $\Box G = I' \otimes \delta(\hat{t})$, où I' est l'application identique de $\mathcal{D}'_1$ sur lui-même, ainsi que $G \Box = I \otimes \delta(\hat{t})$ où I est l'application identique de $\mathcal{D}_1$ sur lui-même.

$\Box = J \circ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, et J est l'injection canonique de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}'_1$.

1.- Problème de Cauchy grossier.

On cherche $X \in \mathcal{D}'^{+}_t(\mathcal{D}_1)$ vérifiant $\Box X = A$ où $A \in \mathcal{D}'^{+}_t(\mathcal{D}'_1)$ est donnée.

Or, prenons $X = G \underset{(t)}{*} A$, où la convolution est définie entre les deux espaces de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}'_1$ (dans lesquels prennent leurs valeurs respectivement G et A) à l'aide de l'application bilinéaire $(u , T) \longrightarrow u(T)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1) \times \mathcal{D}'_1$ dans $\mathcal{D}_1$.

Alors on a :

$$\Box X = \Box G \underset{(t)}{*} A = A .$$

Réciproquement, supposons que X vérifie l'équation $\Box X = A$; on aura :

$$G \underset{(t)}{*} \Box X = G \Box \underset{(t)}{*} X = X = G \underset{(t)}{*} A .$$

D'où l'équivalence des deux faits : $\Box X = A$ et $X = G \underset{(t)}{*} A$.

On voit ainsi que le problème posé, qu'on a appelé problème de Cauchy grossier, est parfaitement résolu : la solution du type cherché existe, et est unique.

Pour le calcul des convolutions, il est commode de représenter G et A comme dérivées de fonctions continues de t (à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}'_1$). Ceci est globalement faux pour A , car $A \in \mathcal{D}'^{+}_{t}(\mathcal{D}'_1)$, mais cela est permis lorsqu'on ne veut connaître $G \underset{(t)}{*} A$ que sur un intervalle de temps fini $0 \leq t \leq t_0$.

2.- Problèmes de Cauchy fins.

G admet des expressions encore plus simples.

Initialement, il s'agissait de chercher une distribution $X \in \mathcal{D}'^{+}_{t}(\mathcal{D}_1)$ vérifiant $\square X = A$ et possédant certaines propriétés de régularité. Nous avons déjà vu qu'il fallait pour cela imposer des propriétés semblables (et d'ailleurs plus strictes) à A ; ceci se trouve confirmé par l'étude que nous pouvons maintenant faire a posteriori sur la solution obtenue (et qui est unique dans $\mathcal{D}'^{+}_{t}(\mathcal{D}_1)$!) $X = G \underset{(t)}{*} A$. Nous prenons donc le problème à l'envers ; nous cherchons les conditions qu'il faudra imposer à A pour que X ait la régularité désirée. Par exemple, supposons A trois fois continûment dérivable sur $[0 , +\infty[$; et de plus, que $A(0) = A'(0) = 0$. Nous savons que $G(\hat{t})$ est la dérivée troisième (au sens des distributions) d'une fonction $H(\hat{t})$ continue sur R^1 et de support contenu dans $[0 , +\infty[$, (donc nulle pour $t = 0$) puisque $|\mathcal{G}_{p^2}| \leq A|p|$.

On en déduit :

$$G \underset{(t)}{*} A = H \underset{(t)}{*} A''' = H \underset{(t)}{*} (\{A'''\} + A''(0)\,\delta)$$
$$= H \underset{(t)}{*} \{A'''\} + A''(0)\,H \quad ;$$

$\{A'''\}$ est la distribution égale à la dérivée troisième ordinaire de A pour $t > 0$ et à zéro ailleurs. On voit que, dans ce cas, $X = G \underset{(t)}{*} A$ est une fonction continue de $t \geq 0$, nulle pour $t = 0$.

En Physique, on tient souvent à ce que X et $\frac{dX}{dt}$ soient des fonctions continues de $t \geq 0$. On voit que pour cela il faudrait prendre A quatre fois continûment dérivable, ce qui n'est peut-être pas très gênant, mais aussi $A(0) = A'(0) = A''(0) = 0$. Ces dernières conditions peuvent être embarrassantes.

Pour surmonter (partiellement) ces difficultés, nous allons aborder la question sous un autre angle et examiner une situation générale.

Il peut arriver qu'une distribution en t , à valeurs dans un espace vectoriel topologique E , soit une fonction, même continue, même indéfiniment dérivable $\vec{h}(t)$ de t si on considère qu'elle prend ses valeurs non plus dans E mais dans un espace vectoriel topologique F "plus grand" que E $(E \subset F)$ et qui induit sur E une topologie moins fine que la topologie initiale de E . Evidemment, on aura toujours $\int \vec{h}(t)\ \varphi(t)\,dt \in E$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$.

Exemple (presque banal) :

$\tau \longrightarrow \delta(\hat{t} - \tau) \cdot \delta(t - \tau)$ est la distribution en t définie par la masse $+1$ au point $t = \tau$. Si on considère l'application $\tau \longrightarrow \delta(\hat{t} - \tau)$ comme distribution en τ , elle prend ses valeurs dans $\mathcal{D}_t$. Car pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_\tau$, $< \delta(\hat{t} - \tau)\ ,\ \varphi(\tau) > = \varphi(\hat{t})$. Et cependant $\tau \longrightarrow \delta(\hat{t} - \tau)$ est une fonction indéfiniment dérivable de τ à valeurs dans $\mathcal{D}'_t$, mais non dans un espace de fonctions de t .

Un second exemple est fourni par le problème de Cauchy fin qui nous intéresse ici. On a $(p^2 - \Delta)\, \mathcal{G}_{p^2} = I$ (I est une application identique, multipliée par $1(p)$, dans l'un des sens précisés au début). On peut encore écrire cela :
$$\mathcal{G}_{p^2} = \frac{I}{p^2} + \frac{\Delta \mathcal{G}_{p^2}}{p^2} .$$

Jusqu'à présent $\mathcal{G}_{p^2}$ prenait ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1\ ;\ \mathcal{D}_1)$. Considérons maintenant $\mathcal{G}_{p^2}$ comme prenant ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1\ ;\ \mathcal{D}'_1)$: l'espace des valeurs est plus large, mais la norme de $\mathcal{G}_{p^2}$ dans le nouvel espace est plus petite que dans l'ancien. Ceci équivaut à dire que $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1\ ;\ \mathcal{D}_1)$ induit sur $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1\ ;\ \mathcal{D}_1)$ une topologie moins fine que la topologie initiale de $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1\ ;\ \mathcal{D}_1)$.

On avait $\|\mathcal{G}_{p^2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1;\mathcal{D}_1)} \leq A|p|$, et donc $\|\Delta \mathcal{G}_{p^2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1\,;\,\mathcal{D}'_1)} \leq A|p|$, ce qui donne : $\| \mathcal{G}_{p^2} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}'_1)} \leq \frac{1}{|p|^2} + \frac{A}{|p|}$.

Alors $G(\hat{t}) = I\, t\; \Upsilon(t) + H(\hat{t})$ où $\Upsilon(t)$ est la fonction d'Heaviside, et $H(t)$ est la dérivée d'une fonction continue sur $[0 , +\infty[$. Mais ici $G(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}'_1)$. Il suffit maintenant que A soit une fois continûment dérivable pour $t \geqslant 0$, sans même vérifier $A(0) = 0$, pour que X soit une fonction continue de t ; mais X prendra alors ses valeurs dans $\mathcal{D}'_1$. $X(t)$ est dans $\mathcal{D}'_1$ pour toute valeur de t ; mais $X(\varphi) = \int X(t)\, \varphi(t)\, dt$ est dans $\mathcal{D}_1$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_t$. Ce dernier point montre que ce que nous avons gagné sur les conditions initiales, nous le perdons sur les conditions aux limites : $X(t)$ n'est plus "nul au contour" pour tout t ; parler de ses valeurs au contour n'a plus même le sens large que nous lui avions donné ($X \in \mathcal{D}_1$) . Cette indétermination complémentaire paraît insurmontable.

Nous pouvons passer à un cas plus général. Il suffit d'effectuer un développement limité de $I - \frac{\Delta}{p^2}$ (ou lieu d'itérer k fois encore l'égalité $\mathcal{G}_{p^2} = \frac{I}{p^2} + \frac{\Delta\, \mathcal{G}_{p^2}}{p^2}$) . On trouve : $\mathcal{G}_{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{\Delta}{p^4} + \dots + \frac{\Delta^k}{p^{2k+2}} + \frac{\Delta^{k+1}}{p^{2k+2}}\; \mathcal{G}_{p^2}$, et l'on considère que $\mathcal{G}_{p^2}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}'_{2k+1})$.

On a : $\| \frac{\Delta^{k+1}}{p^{2k+2}}\; \mathcal{G}_{p^2} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}'_{2k+1})} \leq \frac{A_k}{|p|^{2k+1}}$,

et par conséquent :

$$G(t) = \Upsilon(t)\left(I t + \Delta \frac{t^3}{3!} + \dots + \Delta^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) + G_k(t) \ , \text{ où } G_k(t)$$

est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}'_{2k+1})$ (comme $G(t)$ elle-même) , $(2k - 1)$ fois continûùent dérivable pour $t \geqslant 0$ et ayant toutes ses dérivées, jusqu'à l'ordre $(2k - 1)$ inclus, nulles en $t = 0$.