

SÉMINAIRE SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Rappels divers

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 2, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A2_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

4 mai 1956

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondesExposé n° 2

Année 1955/56

-:-:-

RAPPELS DIVERS

par Laurent SCHWARTZ

- 1 -

DISTRIBUTIONS A VALEURS VECTORIELLES1.- Définition des distributions à valeurs vectorielles. Espace $\mathcal{D}'(E)$.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe complet. \mathcal{D} désigne l'espace des fonctions scalaires définies sur \mathbb{R}^n , indéfiniment différentiables à support compact, muni de la topologie habituelle [1]. On désigne par $\mathcal{D}'(E)$, espace des distributions à valeurs dans E , l'espace $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}, E)$ des applications linéaires continues de \mathcal{D} dans E , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées (ou ce qui est équivalent, sur les parties compactes) de \mathcal{D} .

Toute fonction $x \mapsto \vec{u}(x)$ continue de \mathbb{R}^n dans E , définit une distribution de $\mathcal{D}'(E)$ (notée encore \vec{u}) par

$$\vec{u}(\varphi) = \int \vec{u}(x) \varphi(x) dx$$

intégrale à valeurs dans E , $\varphi \in \mathcal{D}$.

De même, un élément de l'espace $\mathcal{D}' \otimes E$ (\mathcal{D}' espace des distributions scalaires) est une distribution de $\mathcal{D}'(E)$. $T \otimes \vec{e}$, $T \in \mathcal{D}'$, $\vec{e} \in E$, définit en effet une distribution de $\mathcal{D}'(E)$ par

$$(T \otimes \vec{e})(\varphi) = T(\varphi) \vec{e} \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

On définit le support, dans \mathbb{R}^n , d'une distribution $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ comme dans le cas scalaire.

2.- Opérations sur les distributions à valeurs vectorielles.

N.B. Dans ce paragraphe et dans les 2 suivants (transformations de Fourier et de Laplace) nous nous proposons seulement de rappeler certaines définitions et certaines propriétés relatives aux distributions à valeurs vectorielles. Nous ne donnerons donc aucune démonstration des résultats énoncés.

- Si $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$, sa dérivée $\frac{\partial \vec{T}}{\partial x_k} \in \mathcal{D}'(E)$ est définie par

$$\left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \vec{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

- Soit F , un espace vectoriel topologique localement convexe, complet. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ par u , et on note $u \circ \vec{T}$ ou $u(\vec{T})$ ou $u \vec{T}$, la distribution $\vec{S} \in \mathcal{D}'(F)$ définie par

$$\vec{S}(\varphi) = u[\vec{T}(\varphi)] \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

- Si $\alpha \in \mathcal{C}$, espace des fonctions indéfiniment différentiables, définies sur \mathbb{R}^n , à valeurs scalaires, muni de la topologie usuelle [1], $\alpha \vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ est défini par

$$\langle \alpha \vec{T}, \varphi \rangle = \langle \vec{T}, \alpha \varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

- Si $S \in \mathcal{D}'$, moyennant certaines conditions sur les supports de S et de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$, on définit $\vec{T} * S \in \mathcal{D}'(E)$ par

$$\langle \vec{T} * S, \varphi \rangle = \langle \vec{T}, \check{S} * \varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

En particulier, on peut définir la régularisée $\vec{S}(x)$ de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ par $\alpha \in \mathcal{D}$:

$$\vec{S}(x) = \vec{T} * \alpha = \langle \vec{T}_\xi, \alpha(x - \xi) \rangle.$$

$\vec{S}(x)$ est une fonction indéfiniment différentiable de x à valeurs dans E

Produit de composition de $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$ par $\vec{T} \in \mathcal{C}'(F)$. (E et F Banach).

$\mathcal{C}'(F)$ est formé des distributions de $\mathcal{D}'(F)$ à support compact ; il sera muni de la topologie $\mathcal{S}'_b(\mathcal{C}, F)$.

Soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G .

Si \vec{f} est une fonction continue à valeurs dans E et \vec{g} une fonction continue à valeurs dans F et à support compact.

$$h(x) = \vec{f} * \vec{g} = \int B(\vec{f}(x - \xi), \vec{g}(\xi)) d\xi.$$

définit une fonction continue de x à valeurs dans G que l'on appelle produit de composition des fonctions \vec{f} et \vec{g} , relativement à B .

Cette notion se généralise et on peut définir le produit de composition $\vec{S} * \vec{T} = \vec{U}$, relativement à B . \vec{U} sera alors une distribution de $\mathcal{D}'(G)$ et l'application $(\vec{S}, \vec{T}) \rightarrow \vec{S} * \vec{T}$ de $\mathcal{D}'(E) \times \mathcal{C}'(F)$ dans $\mathcal{D}'(G)$ est hypocontinue par rapport aux parties bornées (pour une définition précise de $\vec{S} * \vec{T}$, voir [2], exposés 23 et 24).

3.- Transformation de Fourier.

\mathcal{S} , \mathcal{O}_M , et \mathcal{O}'_C désignent respectivement les espaces des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide, à croissance lente, et l'espace des distributions à décroissance rapide. Les topologies sont celles de [1]. On introduit l'espace $\mathcal{S}'(E) = \mathcal{L}'_b(\mathcal{S}, E)$: une distribution $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ est dans $\mathcal{S}'(E)$ si elle se prolonge en une application linéaire continue de \mathcal{S} dans E , on dira encore qu'elle est tempérée.

On définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}\vec{T}$, de $\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$ par

$$\langle \mathcal{F}\vec{T}, \varphi \rangle = \langle \vec{T}, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{S} .$$

C'est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}'(E)$ sur $\mathcal{S}'(E)$. De plus, si $\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$ et $\alpha \in \mathcal{O}_M$

alors

- 1°) $\mathcal{F}\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$; $\mathcal{F}\alpha \in \mathcal{O}'_C$
- 2°) $\alpha\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$; $\mathcal{F}(\alpha\vec{T}) \in \mathcal{S}'(E)$
- 3°) $\mathcal{F}\vec{T} \times \mathcal{F}\alpha$ a un sens et est élément de $\mathcal{S}'(E)$ et on a

$$\mathcal{F}(\alpha\vec{T}) = \mathcal{F}\vec{T} \times \mathcal{F}\alpha .$$

4.- Transformation de Laplace (pour les démonstrations voir [4]) .

- Cas des distributions scalaires à une variable t

Soit $T \in \mathcal{D}'_R$, vérifiant

- 1°) $T \in \mathcal{D}'_+$ (support dans $[0, +\infty[$) .
- 2°) il existe ξ_0 , tel que pour $\xi > \xi_0$, on ait

$$e^{-\xi t} T \in \mathcal{S}'$$

T admet une transformée de Laplace :

$$F(p) = \langle T, e^{-pt} \rangle \quad \text{définie pour } \xi = \operatorname{Re}(p) > \xi_0 .$$

En effet, soit $\alpha(t)$ une fonction indéfiniment différentiable à support limité à gauche, et égale à 1 dans un voisinage du support de T .

Pour $\xi > \xi_0$, il existe ξ_1 vérifiant $\xi_0 < \xi_1 < \xi$. Alors $e^{-\xi_1 t} T \in \mathcal{S}'$ et $\alpha(t) e^{-(p-\xi_1)t} \in \mathcal{S}$. Par suite, l'expression

$$(1) \quad \langle e^{-\xi_1 t} T, \alpha(t) e^{-(p-\xi_1)t} \rangle$$

a un sens. Cette expression est indépendante de ξ et donne par définition ce que nous appelons $\langle T, e^{-pt} \rangle$.

On a relativement à $F(p)$ la proposition suivante

PROPOSITION 1 : $F(p)$ est une fonction holomorphe de p , pour $\xi = \operatorname{Re}(p) > \xi_0$. De plus, pour $\xi \geq \xi_1 > \xi_0$, on a

$$|F(p)| \leq \text{Polynome en } |p| .$$

Réciproquement, si $F(p)$ est une fonction de la variable complexe p , holomorphe dans un demi-plan $\xi = \operatorname{Re}(p) > \xi_0$, et majorée par un polynome en $|p|$, alors $F(p)$ est transformée de Laplace d'une distribution T unique à support dans $[0, +\infty]$ et vérifiant $e^{-\xi t} T \in \mathcal{S}'$ pour $\xi > \xi_0$.

- Cas des distributions de la variable t , à valeurs dans E .

Nous désignerons par $\mathcal{D}'_t(E)$ l'espace des distributions de la seule variable t , à valeurs dans E .

Soit $\vec{T} \in \mathcal{D}'_t(E)$. Si \vec{T} vérifie les 2 propriétés suivantes :

1°) \vec{T} a son support dans $[0, +\infty]$

2°) il existe ξ_0 tel que pour $\xi > \xi_0$, on ait $e^{-\xi t} \vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$

Sa transformée de Laplace :

$$\vec{F}(p) = \langle \vec{T}, e^{-pt} \rangle$$

fonction de la variable complexe p , à valeurs dans E , est alors définie par

$$\vec{F}(p) = \langle e^{-\xi_1 t} \vec{T}, \alpha(t) e^{-(p - \xi_1)t} \rangle$$

pour $\xi = \operatorname{Re}(p) > \xi_0$.

Si E est un Banach, la proposition 1 se généralise par :

PROPOSITION 2 : $\vec{F}(p)$ est une fonction holomorphe de p , à valeurs dans E pour $\xi = \operatorname{Re}(p) > \xi_0$, et on a

$$\|\vec{F}(p)\|_E \leq \text{Polynome en } |p| \text{ pour } \xi \geq \xi_1 > \xi_0 .$$

Réciproquement, si $\vec{F}(p)$ est une fonction holomorphe de p , à valeurs dans E , pour $\xi = \operatorname{Re}(p) > \xi_0$ et si $\|\vec{F}(p)\|_E$ est majorée par un polynome en $|p|$, alors $\vec{F}(p)$ est transformée de Laplace d'une distribution \vec{T} unique de $\mathcal{D}'_t(E)$, à support dans $[0, +\infty]$ et vérifiant pour

$\xi > \xi_0$, $e^{-\xi t} \vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$.

PROBLÈME DE DIRICHLET RELATIF À $p^2 - \Delta$.

Notations : Nous utiliserons constamment dans tout ce qui va suivre, les espaces $\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$, définis dans l'exposé 1 de ce séminaire et dans l'exposé n° 14 de [3]. Pour simplifier l'écriture nous les désignerons respectivement par \mathcal{D}'_1 et \mathcal{D}^1_1 .

Nous verrons plus loin comment l'étude des problèmes mixtes pour l'équation des ondes nous conduira, par une transformation de Laplace par rapport à la variable t , à la résolution du problème suivant :

Problème : A étant donnée dans \mathcal{D}'_1 , trouver U dans \mathcal{D}^1_1 , vérifiant

$$(p^2 - \Delta) U = A.$$

(p nombre complexe, Δ Laplacien, Ω ouvert de \mathbb{R}^n).

Ce problème a été étudié dans [3]. Nous nous proposons ici de montrer que la fonction de Green G_{p^2} , relative à l'opérateur $(p^2 - \Delta)$ est transformée de Laplace en t d'une distribution

$$\vec{G}_t \in \mathcal{D}'_+ (\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}_1)),$$

($\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}_1)$ est muni de sa topologie d'espace de Banach) ce qui nous permettra de passer, par une transformation de Laplace inverse du problème posé au problème initial.

Nous savons, d'après [3], que G_{p^2} possède les propriétés suivantes :

1°) C'est une fonction holomorphe de p , à valeur dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}_1)$ pour p^2 différent d'un nombre réel < 0 , c'est-à-dire pour $\xi = \text{Re}(p) > 0$.

2°) Elle vérifie les équations fonctionnelles :

$$\begin{aligned} (p^2 - \Delta) G_{p^2} &= I && \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_1) \\ G_{p^2} (p^2 - \Delta) &= I && \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1) \end{aligned}$$

3°) Majoration de $\|G_{p^2}\|$ quand $|p| \rightarrow \infty$.

Posons $p = \xi + i \eta$

Il suffit de majorer $\|G_{p^2}\|$ dans les 2 régions suivantes

a) région 1, correspondant à $\operatorname{Re} p^2 = \xi^2 - \eta^2 \geq 1$

On sait que dans cette région

$$\|G_{p^2}\| \leq 1$$

b) région 2, correspondant à $\operatorname{Re} p^2 \leq 1$, ou $\xi^2 - \eta^2 \leq 1$. Dans cette région, on a, pour $|p| \rightarrow \infty$:

$$\|G_{p^2}\| \leq \frac{|p^2 - 1|}{|\operatorname{Im} p^2|} \leq \frac{|p^2 - 1|}{2\xi|\eta|} \quad \text{si} \quad \xi \geq \varepsilon > 0.$$

Quand $|p| \rightarrow \infty$,

$$|p^2 - 1| \text{ est de l'ordre de } |p|^2 = \xi^2 + \eta^2 \lesssim 2\eta^2.$$

On a donc dans la région 2, quand $|p| \rightarrow \infty$.

$$\|G_{p^2}\| \leq K \frac{|\eta|^2}{|\eta|} = K |\eta| \quad \left\{ \begin{array}{l} K \text{ est constante} \\ > 0. \end{array} \right.$$

ou encore

$$\|G_{p^2}\| \leq K |p|.$$

Par suite pour $|p|$ assez grand, $\|G_{p^2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{O}'_1, \mathcal{O}_1)}$ est majorée par un polynôme en $|p|$. 1°) et 3°) ainsi que la proposition 2, entraînent alors que G_{p^2} est transformée de Laplace d'une distribution unique

$$\vec{G}_t \in \mathcal{O}'_+ (\mathcal{L}(\mathcal{O}'_1, \mathcal{O}_1)).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SCHWARTZ, L., Théorie des distributions, t. 1 et 2.- Paris, Hermann, 1950 et 1951.
- [2] SCHWARTZ, L., Séminaire SCHWARTZ, 1. Paris, 1953/54 (multigraphié).
- [3] SCHWARTZ, L., Séminaire SCHWARTZ, 2. Paris, 1954/55 (multigraphié).
- [4] SCHWARTZ, L., Transformation de Laplace des distributions, Tome supplémentaire. - Lund, 1952.