Séminaire Schwartz

L. Schwartz

Rappels sur les supports de produits de convolution

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 5, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55

-:-:-:-

10 décembre 1954

Exposé n° 5 (L. SCHWARTZ)

RAPPELS SUR LES SUPPORTS DE PRODUITS DE CONVOLUTION

Notations : (a) Le support d'une distribution T sera $\underline{T}$

(b) Si y parcourt A et si x parcourt un ouvert Ω, l'ensemble des $x-y$ sera noté $\Omega - A$. C'est un ouvert, réunion des ouverts $\Omega - y$, $y \in A$, translatés de Ω. Lorsqu'en particulier A contient l'origine, $\Omega \subset \Omega - A$.

Définitions : $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ sera l'ensemble des points dont la distance à $\complement \Omega$ est $> \varepsilon$ c.a.d. $x \in \Omega_\varepsilon \Leftrightarrow d(x, \complement\Omega) > \varepsilon$

Théorème 1. Si $\underline{S} \subset A$ et $\underline{T} \subset B$, $\underline{S * T} \subset \overline{A + B}$
(L. Schwartz, Théorie des Distributions, tome II, p. 12 et ailleurs).

Proposition 1. Si $\underline{S} \subset A$ et si T est nulle dans $\Omega - A$, $S * T$ est nulle dans Ω.

L'hypothèse sur T entraine que $\underline{T} \subset \complement(\Omega - A)$. Si $x \in \Omega$ et $y \in \complement(\Omega - A)$, on ne peut avoir $x + y \in \Omega$ qui entrainerait $y \in \Omega - A$. Donc $x + y \in \complement\Omega$ (fermé car Ω est ouvert). Il en résulte que $\underline{S * T} \subset \complement\Omega$ et $S*T$ est nulle dans Ω.

Corollaire. Si $\underline{S} \subset A$ et si T est nulle dans $(\Omega - A)_\varepsilon$, $S * T$ est nulle dans Ω_ε.

On vient de voir que $A + \complement(\Omega - A) \subset \complement\Omega$ Or $\complement\Omega_\varepsilon = \complement\Omega + B_\varepsilon$, $B_\varepsilon =$ boule $|x| \leq \varepsilon$. Donc $A + \complement(\Omega - A) + B_\varepsilon \subset \complement\Omega + B_\varepsilon$ ou encore $A + \complement(\Omega - A)_\varepsilon \subset \complement\Omega_\varepsilon$ (cqfd).

Ainsi :

(1). $\underline{S} \subset A$, $T = 0$ dans $(\Omega - A)_\varepsilon \Longrightarrow S * T = 0$ dans Ω_ε

(2). $\underline{S} \subset A + B_\varepsilon$, $T = 0$ dans $\Omega - A \Longrightarrow S * T = 0$ dans Ω_ε

(3). $\underline{S} \subset A + B_\varepsilon$, $T = 0$ dans $(\Omega - A)_\varepsilon \Longrightarrow S * T = 0$ dans $\Omega_{2\varepsilon}$

Proposition 2. Si $\underline{S} \subset A$, si T est définie dans $\Omega - A$ mais non forcément prolongeable et si $\Omega - A \subset A_1$, ensemble fermé tel que la convolution pour des distributions de supports A et A_1 sont possibles, alors $S * T$ est définie dans Ω.

Prenons une distribution T_1 qui coïncide avec T dans $(\Omega-A)_\varepsilon$ et telle que $T_1 \subset (\Omega-A)_{\varepsilon/2}$. T_1 est prolongeable, a son support dans A_1, donc $S * T_1$ a un sens. Cette définition est indépendante de T_1 dans Ω_ε car si on remplace T_1 par T_1', on a $T_1 - T_1' = 0$ dans $(\Omega - A)_\varepsilon$, donc $S * T_1 = S * T_1'$ dans Ω_ε (cf. Corollaire de la proposition 1). En faisant alors tendre ε vers 0, on définit $S * T$ dans Ω.

<u>Proposition 3</u>. <u>Si</u> $\underline{S} \subset A$ <u>et si</u> T, <u>prolongeable ou non, est dans</u> $\Omega - A \subset A_1$ (voir prop.2), <u>une fonction indéfiniment différentiable</u>, $S * T$ <u>est dans</u> Ω <u>une fonction indéfiniment différentiable</u>.

En choisissant T_1 comme précédemment, elle est indéfiniment différentiable, donc $S * T_1$ est indéfiniment différentiable dans Ω_ε. On a le résultat lorsque $\varepsilon \to 0$..

<u>Remarque</u>. Le résultat subsiste si S, définie dans R^n et de support $\subset A$, est dans $\mathcal{E}(R^n)$, et T dans $\mathcal{D}'(\Omega-A)$.

<u>Proposition 4</u>. Si $\underline{S} \subset A$ et si T, prolongeable ou non, est dans $\Omega - A \subset A_1$ (prop.2) une fonction analytique, $S * T$ est dans Ω une fonction analytique.

La démonstration étant locale, on prend Ω petit (donc borné). La valeur de $S * T$ ne dépend alors dans Ω que des valeurs de S dans un ensemble borné (1). On peut donc supposer que $A = \underline{S}$ est compact. Comme T est analytique dans $\Omega - A$, en prenant $f = T$, on aura :

$$|D^p f| \leq C^{|p|} |p|! \quad \text{dans} \quad (\Omega - A)_\varepsilon .$$

Par ailleurs S, de support compact A, est somme de k dérivées de fonctions continues de supports contenus dans $A + B_\varepsilon$:

$$S = \sum_q D^q g_q \quad , \quad |q| \leq m \; , \int_{R^n} |g_q| \leq M .$$

D'après la proposition 2, $S * f$ est indéfiniment différentiable dans Ω.

---

(1) - L'hypothèse relative à A et A_1 signifie que l'addition $(\xi, \eta) \longrightarrow \xi + \eta$ restreinte à $A \times A_1$, est continue à l'infini. L'image réciproque d'une partie bornée de $A + A_1$ est alors bornée dans $A \times A_1$. Donc pour connaitre $S * T$ dans Ω borné il suffit de connaitre S dans $\Omega - A_1$ dont l'intersection avec A est bornée. Si alors $\beta \in \mathcal{D}(R^n)$ est égale à 1 sur $(\Omega - A_1) \cap A$, on peut remplacer S par $\beta S \in \mathcal{E}'(R^n)$.

Dans $\Omega_{2\varepsilon}$, on aura la mojoration :

$$|D^p(S*f)| \leq |S * D^p f| \leq \sum_q |g_q * D^{p+q} f| \leq k\, M\, C^{(|p|+m)} (|p|+m)\, !$$

donc $S * f$ est bien analytique dans $\Omega_{2\varepsilon}$, donc dans Ω.

<u>Remarque</u>. On aurait pu utiliser uneprolongement aux valeurs complexes des variables. L'intérêt de la méthode de majoration est qu'elle s'étend aux <u>classes</u> de fonctions indéfiniment différentiables différentes de la classe analytique.

<u>APPLICATION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES</u>.

<u>Théorème 2</u>. <u>Soit</u> D <u>un opérateur différentiel à coefficients constants, ayant une solution élémentaire à gauche indéfiniment différentiable dans</u> $\complement 0$, <u>et soit</u> T <u>une distribution dans l'ouvert</u> Ω <u>de</u> R^n. <u>Si</u> $D * T = S$ <u>est indéfiniment différentiable dans</u> Ω, S <u>l'est aussi</u>.

Soit en effet ϖ une paramétrix à gauche de support contenu dans la boule B_ε. On a $T = \varpi * S + L * T$. Comme $\underline{\varpi} \subset B_\varepsilon$ et que $S \in \mathcal{E}(\Omega)$, $\varpi * S$ est définie et indéfiniment différentiable dans Ω_ε. Comme $\underline{L} \subset B_\varepsilon$ et que T est définie dans Ω, $L * T$ est définie dans Ω_ε ; comme $L \in \mathcal{D}(R^n)$, $L * T$ est dans $\mathcal{E}(\Omega_\varepsilon)$ (remarque suivant la prop.3). D'où le résultat, avec $\varepsilon \to 0$.

Ce théorème donne la démonstration complète de la proposition 3 de l'exposé n° 4, dans le cas elliptique.

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> D <u>un opérateur différentiel à coefficients constants, ayant une solution élémentaire à gauche</u>, <u>analytique dans</u> $\complement 0$, <u>et soit</u> T <u>une distribution définie dans l'ouvert</u> Ω <u>de</u> R^n. <u>Si</u> $D * T = S$ <u>est analytique dans</u> Ω, T <u>l'est aussi</u>.

A). Supposons d'abord $D * T = 0$ dans Ω borné (T est solution de l'équation homogène).

Soit $T_1 \in \mathcal{E}'(\Omega)$, égale à T dans Ω_ε. Alors $T_1 = E * D\,T_1$. On a $\underline{D\,T_1} = K$ compact $\subset \complement \Omega_\varepsilon$. La valeur de T_1 dans Ω_ε ne dépend que de celle de E dans $\Omega_\varepsilon - K \subset \complement 0$, alors E est analytique dans cet ouvert, donc (prop.4) T_1 est analytique dans Ω_ε, et par suite T dans Ω, en faisant tendre ε vers 0.

B). Soit maintenant S analytique quelconque. Le théorème étant purement local, on peut prendre Ω aussi petit qu'on veut. Mais s'il est assez petit, on peut, d'après le théorème de Cauchy-Kowaleswka, trouver une fonction analytique f dans Ω telle que $D f = S$ (2); alors $D(T - f) = 0$ dans Ω donc d'après A). $T - f$ est analytique dans Ω, et par suite aussi T.

Ce théorème donne la démonstration de la proposition 3 de l'exposé n° 4 dans le cas analytique-elliptique. La démonstration a l'inconvénient d'utiliser Cauchy-Kowalewska et par suite d'être absolument spéciale au cas analytique. Une autre démonstration sera donnée dans l'exposé suivant (n° 6).

-:-:-:-

(2) - L'équation $Df = S$ est en effet analytique, on peut donc trouver f en choisissant même un certain nombre de ses dérivées transversales sur une hypersurface non caractéristique, égales à des fonctions analytiques données.