B. Malgrange

Compléments sur les théorèmes d'approximation

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 3 bis, p. 14-19
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 3 bis (B. MALGRANGE)

COMPLÉMENTS SUR LES THÉORÈMES D'APPROXIMATION

-:-:-:-

Un théorème d'approximation :

Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants défini sur R^n. Soient Ω_1 et Ω deux ouverts de R^n tels que $\Omega \supset \Omega_1$, on désignera par $H_D(\Omega)$ l'espace des solutions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, de l'équation (1) $D.T = 0$, par $H_D(\Omega_1)$ l'espace des solutions de (1) dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, par $\bar{H}_D(\Omega)$ l'espace des restrictions $\bar{T}$ à Ω, des éléments T de $H_D(\Omega)$, muni de la topologie induite par $\mathcal{D}'(\Omega_1)$.

De même on désignera par $h_D(\Omega)$ l'espace des solutions de (1) dans $\mathcal{E}(\Omega)$, etc ... Considérant $\bar{H}_D(\Omega)$ comme plongé dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ on se propose de voir sous quelles conditions $\bar{H}_D(\Omega)$ est dense dans $H_D(\Omega_1)$. Désignons par L_i les composantes connexes compactes du complémentaire de Ω_1 relativement à Ω (que nous noterons dans la suite $\complement\Omega_1$). Les $L_{i'}$ désignerons les autres composantes connexes de $\complement\Omega_1$. Soit $\tilde{\Omega}_1 = (\Omega_1) \cup (\bigcup_i (L_i))$. $\tilde{\Omega}_1$ est ouvert et c'est la réunion de Ω, et des ensembles compacts de $\complement\Omega_1$ ouverts dans $\complement\Omega_1$. En effet compactifions Ω par un point à l'infini, soit ∞. $(\complement\Omega_1) \cup (\infty)$ est compact; or on sait que, dans un espace compact, la composante connexe d'un point est compacte et c'est l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés qui contiennent ce point. Or la composante de ∞ est justement $(\complement\tilde{\Omega}_1) \cup (\infty) = (\infty) \cup (\bigcup_{i'} (L_{i'}))$ ce qui démontre ce que nous annoncions.

Appelons enfin $\tilde{\Omega}'_1$ la réunion de Ω_1 et des composantes connexes compactes de $\complement\Omega_1$, d'intérieur non vide dans Ω. On a $\Omega_1 \subset \tilde{\Omega}'_1 \subset \tilde{\Omega}_1$ ($\tilde{\Omega}'_1$ n'est pas nécessairement ouvert dans Ω).

Montrons maintenant que :

Si D est différent de l'opérateur identique

1). Pour que $\bar{H}_D(\Omega)$ soit dense dans $H_D(\Omega_1)$ il est nécessaire que $\Omega_1 = \tilde{\Omega}_1$

2). Si D est elliptique, pour que $\overline{h_D(\Omega)}$ soit dense dans $h_D(\Omega_1)$ il est nécessaire que $\Omega_1 = \tilde{\Omega}_1$.

3). Pour que $h_D(\overline{\Omega})$ soit dense dans $h_D(\Omega_1)$, il est nécessaire que $\tilde{\Omega}'_1 = \Omega_1$.

Démonstration : 1). Supposons que $\tilde{\Omega}_1 \neq \Omega_1$. Nous pouvons trouver K compact dans $\complement\Omega_1$ et ouvert dans $\complement\Omega_1$ et tel que $K \subset \tilde{\Omega}_1$. Soit $x_0 \in K$ et soit E une distribution dans Ω telle que $D\,E = \delta_{(x_0)}$ (translatée d'une solution élémentaire). Nous allons montrer que sa restriction $\bar{E}$ à Ω_1 ne peut pas être approchée par des filtres d'éléments de $\bar{H}_D(\Omega)$. Remarquons que, dans Ω_1 , $D\,\bar{E} = \overline{DE} \equiv 0$ donc $\bar{E} \in H_D(\Omega_1)$. K étant ouvert dans $\complement\Omega_1$ $\Omega_1 \cup K$ est ouvert dans Ω. K étant compact, on peut trouver un voisinage compact V de K dans Ω inclus dans $\Omega_1 \cup K$. Il existe donc $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\alpha(x) = 1$ pour $x \in V$ et $\alpha(x) = 0$ pour $x \in \complement(\Omega_1 \cup K)$.

Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $\check{D}[e^{\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n}] = 0$ (il en existe toujours si $D \neq I$) .

La fonction $\check{D}(\alpha e^{\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n})$ a son support dans Ω_1 puisqu'elle est nulle sur $V \cup \complement(\Omega_1 \cup K)$. Elle est orthogonale à tout élément de $\bar{H}_D(\Omega)$.

En effet : soit $S \in H_D(\Omega)$ de restriction $\bar{S}$ à Ω_1 . On a $\langle \check{D}(\alpha e^{\lambda x}) , \bar{S} \rangle = \langle \check{D}(\alpha e^{\lambda x}) , S \rangle$ puisque $\check{D}(\alpha e^{\lambda x})$ a son support dans Ω_1 . Et, $\langle \check{D}(\alpha e^{\lambda x}) , S \rangle = \langle \alpha e^{\lambda x} , D\,S \rangle = 0$ puisque $D\,S = 0$. Calculons $\langle \check{D}(\alpha e^{\lambda x}) , \bar{E} \rangle$, pour la même raison qu'au dessus c'est :

$$\langle \check{D}(\alpha e^{\lambda x}) , E \rangle = \langle \alpha\, e^{\lambda x} , D\,E \rangle \neq \alpha(x_0) e^{\lambda x_0} = e^{\lambda x_0} \neq 0$$

$\bar{H}_D(\Omega)$ n'est donc pas dense dans $H_D(\Omega_1)$.

2). Lorsque D est elliptique, l'utilisation d'une paramétrix permet de prouver que $H_D = h_D$ (et que les topologies coincident). Ceci sera fait ultérieurement (exposé 5), d'où la deuxième partie de la proposition.

3). Si D n'est pas elliptique, pour que $\bar{h}_D(\Omega)$ soit dense $h_D(\Omega_1)$ il n'est pas nécessaire que $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1$.

Exemple : $\Omega = R^2$, $\Omega_1 = \complement\, 0$, $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$: Toute fonction indéfiniment différentiable dans $\complement\, 0$, vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, est indépendante de x_1 (pour $x_2 \neq 0$ elle est trivialement indépendante de x_1 , et pour $x_2 = 0$ c'est vrai par passage à la limite à partir de $x_2 \neq 0$, $x_2 \longrightarrow 0$). Elle est donc de la forme $g(x_2)$, et g est indéfiniment différentiable parce que $g(x_2) = f\ (1 , x_2)$. Alors f est prolongeable dans R^2 tout entier en une fonction indéfiniment différentiable, en posant $f(0,0) = g(0)$, et cette fonction est encore indépendante de x_1 donc solution de l'équation homogène.

Dans cet exemple, $\Omega_1 = \tilde{\Omega}'_1 \neq \tilde{\Omega}_1$.

Montrons maintenant que si $\Omega_1 \neq \tilde{\Omega}'_1$, $\overline{h_D(\Omega)}$ n'est pas dense dans $h_D(\Omega_1)$. Comme dans la démonstration de 1), soit K compact ouvert de $\complement \Omega_1$ contenant un point x_o intérieur à une composante connexe compacte de $\complement \Omega_1$. Alors K contient un ouvert ω de Ω contenant x_o . On choisit V , $e^{\lambda x}$, α , E comme dans 1). $\check{D}(\alpha e^{\lambda x})$ est encore orthogonal à toute $\overline{h_D(\Omega)}$. Soit $\rho_j \in \mathcal{D}(R^n)$ de support tendant vers l'origine dans R^n pour $j \to \infty$, avec $\rho_j \to \delta$ dans $\mathcal{E}'(R^n)$. Alors $D(\rho_j * E)$ converge vers $\delta_{(x_0)}$, et à partir d'un certain moment $j \geq j_o$ son support est dans ω , donc sa restriction de $\rho_j * E$ Ω_1 appartient à $h_D(\Omega_1)$. Or $\check{D}(\alpha e^{\lambda x})$ ne lui est pas orthogonale pour tout j , car $< D(\alpha e^{\lambda x})$, $\rho_j * E >$ tend pour $j \to \infty$ vers $< \check{D}(\alpha e^{\lambda x})$, $E > \neq 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le :

<u>Théorème</u> : <u>Soit</u> D <u>un opérateur différentiel analytique elliptique sur</u> R^n <u>à coefficients constants</u>, <u>différent de</u> I .

<u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse approcher toute solution de l'équation sans second membre</u> D T = 0 <u>dans un ouvert</u> Ω_1 <u>par les solutions de l'équation sans second membre dans un ouvert</u> Ω <u>contenant</u> Ω_1 <u>est que le complémentaire de</u> Ω_1 <u>dans</u> Ω <u>n'ait pas de composante connexe relativement compacte</u>.

<u>Démonstration</u> : Remarquons avant de faire la démonstration que ce théorème étend les théorèmes connus, comme le théorème de Runge sur les fonctions analytiques d'une variable complexe, ou les théorèmes sur les fonctions harmoniques.

Nous avons déja montré que $\Omega_1 = \tilde{\Omega}_1$ était une condition nécessaire. Prouvons sa suffisance. Soit $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et K le support de $\check{D}\, S = T$. Alors le support de S est dans Ω_1 si K est dans Ω_1 . En effet, si $\tilde{K}$ est la réunion de K et des composantes connexes relativement compactes de $\complement K$, on a $\tilde{K} \subset \tilde{\Omega}_1 = \Omega_1$ donc puisque le support de S est dans $\tilde{K}$ (exposé n° 3) notre assertion est vraie.

L'orthogonal de $h_D(\Omega)$, est, nous l'avons vu dans le précédent exposé , $\check{D}(\mathcal{E}'(\Omega))$; l'orthogonal de $\bar{h}_D(\Omega)$ dans $\mathcal{E}'(\Omega_1)$ est $\check{D}(\mathcal{E}'(\Omega)) \cap \mathcal{E}'(\Omega_1)$ et de la propriété que nous venons d'établir sur les supports, nous déduisons que cet espace est $\check{D}(\mathcal{E}'(\Omega_1))$, ce qui prouve que $\bar{H}_D(\Omega)$ et $H_D(\Omega_1)$ ont même orthogonal et le théorème est complétement démontré.

NOUVEAUX COMPLEMENTS A L'EXPOSE n° 3

1.- Solution élémentaire.

Théorème : Tout opérateur différentiel D à coefficients constants admet une solution élémentaire E qui possède la propriété suivante :

Pour tout $T \in L^2 \cap \mathcal{E}'$, $E * T$ est localement $-L^2$

(ce résultat est plus fort que celui de l'exposé n° 3 : cela entraine en effet que E est somme de dérivées d'ordre $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ de fonctions localement $-L^2$, la réciproque étant inexacte).

La méthode présentant une grande ressemblance avec celles qui ont été exposées précédemment, nous serons très bref.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, soit $\Phi = \mathcal{F}\varphi$; on pose : $|||\varphi||| = \int |\Phi(\sigma_1,\dots,\sigma_n)| d\sigma_1 \dots d\sigma_n$ Supposons que l'hyperplan $x_1 = 0$ ne soit pas caractéristique et soit $r > 0$: on démontre alors (même méthode que dans (3)) qu'il existe une constante $C(r,D)$ qui vérifie :

$$(1) \quad |||\varphi||| \leq C(r,D) \sup_{|\rho| \leq r} |||e^{\rho x_1} \check{D}\varphi||| \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}$$

Munissons $\mathcal{D}$ de la norme $\psi \longrightarrow \sup_{|\rho| \leq r} |||e^{\rho x_1}\psi|||$. Sur le sous-espace $\check{D}\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$, muni de cette norme, la forme linéaire $\check{D}\varphi \longrightarrow \varphi(0)$ est continue car $|\varphi(0)| \leq \int |\mathcal{F}\varphi| = |||\varphi|||$ et il suffit alors d'appliquer (1). D'après le théorème de Hahn-Banach, cette forme linéaire se prolonge en une forme linéaire E sur $\mathcal{D}$, continue pour la norme ci-dessus. E est a fortiori continue pour la topologie usuelle de $\mathcal{D}$, c'est donc une distribution, qui vérifie $< E , \check{D}\varphi > = \varphi(0)$ ou $< D E , \varphi > = \varphi(0)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, donc $D E = \delta$; c'est une solution élémentaire.

Reste à montrer qu'elle a la propriété voulue. Il suffit pour cela de montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$ converge vers 0 dans L^2 en gardant son support dans un compact fixe, alors $E * \varphi$ converge vers 0 localement dans L^2 , ou encore que $< E * \varphi , \psi >$ converge vers 0 uniformément lorsque $\psi \in \mathcal{D}$ reste borné dans L^2 en gardant son support dans un compact fixe. Or

$$|< E * \varphi, \psi >| = |< E , \check{\varphi} * \psi >| \leq K \sup_{|\rho| \leq r} |||e^{\rho x_1}(\check{\varphi} * \psi)||| = K \sup_{|\rho| \leq r} |||(e^{\rho x_1}\check{\varphi}) * (e^{\rho z_1}\psi)|||$$

Mais, si $u \in \mathcal{D}$, $v \in \mathcal{D}$, on a :

$$|||u * v||| = \int |\mathcal{F} u \,.\, \mathcal{F} v| \, d\sigma_1 \dots d\sigma_n \leq \|\mathcal{F} u\| \|\mathcal{F} v\| = \|u\| \|v\|$$

(en posant, comme dans l'exposé (3) : $\|u\|^2 = \int u \bar{u}\, dx_1 \dots dx_n$).

Par suite, il vient :

(2) $$| < E * \varphi , \psi > | \leq K \sup_{|p| \leq r} (\| e^{\rho x_1} \check{\varphi} \| . \| e^{\rho x_1} \psi \|) .$$

La propriété annoncée suit immédiatement de (2).

Corollaire : Si $T \in \mathcal{E}'$ a ses dérivées d'ordre $\leq m$ dans L^2 , $E * T$ a ses dérivées d'ordre $\leq m$ localement dans L^2 .

Si $T \in \mathcal{E}'$ est somme de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de L^2 , $E * T$ est somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions localement dans L^2 .

En utilisant ensuite le théorème d'approximation, comme dans l'exposé n° 2, on verra que si $S \in \mathcal{D}'$ a ses dérivées d'ordre $\leq m$ localement dans L^2 (resp. est somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions localement dans L^2), il existe une distribution T vérifiant $D\, T = S$, et ayant les mêmes propriétés locales.

2.- Equations avec second membre.

On peut donner une démonstration plus simple de théorème 3 , 4ème partie[1]. Soit $E \in \mathcal{E}'^k$ une solution élémentaire de D . Montrons que

(3) $\Longrightarrow$ $D\, \mathcal{E}^0(\Omega) \supset \mathcal{E}^k(\Omega)$ [d'où résulte immédiatement 2°, en effet toute $S \in \mathcal{D}'^0(\Omega)$ est somme de dérivées d'ordre $\leq k'$ de fonctions de $\mathcal{E}^k(\Omega)$, d'où résulte bien qu'il existe $T \in \mathcal{E}'^{k'}(\Omega)$ tel que $D\, T = S$].

Soit $\mathcal{O}_i$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts dans Ω, telle que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathcal{O}_i = \Omega$; et soient $\mathcal{O}'_i$ des ouverts relativement compacts dans Ω , $\bar{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}'_i$; par hypothèse, si $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $D\, S \in \mathcal{E}'(\mathcal{O}'_i)$, il existe un compact K_i tel que S ait son support dans K_i ; soit $\mathcal{O}''_i$ un voisinage ouvert relativement compact de K_i dans Ω , $\mathcal{O}''_i \supset \mathcal{O}'_i$.

Soit f une fonction $\in \mathcal{E}^k(\Omega)$; on écrit $f = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i$, $f_i \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ le support de f_i ne rencontrant pas $\mathcal{O}''_i$; on pose : $g_i = f_i * E$; g_i est une fonction continue.

Dans $\mathcal{O}''_i$, on a $D\, g_i = 0$; le lemme qui suit montre qu'on peut trouver $h_i \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ et vérifiant : $D\, h_i = 0$ dans Ω , qui approche g_i uniformément sur $\mathcal{O}_i$, autant qu'on veut; on prendra : $| h_i - g_i | \leq \frac{1}{2^i}$ sur $\mathcal{O}_i$;

---

[1] - Cette démonstration est la généralisation de celle utilisée dans le théorème 2 de l'exposé n° 2.

$g_o + \Sigma(g_i - h_i)$ converge vers une limite g dans $\mathcal{E}^o(\Omega)$, et l'on a : $D^o g = f$.

Lemme : Les $f \in \mathcal{E}^o(\Omega)$ et vérifiant $D f = 0$, d'une part; et les $f \in \mathcal{E}^o(\mathcal{O}''_i)$ et vérifiant $D f = 0$ (dans $\mathcal{O}''_i$), d'autre part, engendrent le même sous espace fermé de $\mathcal{E}^o(\mathcal{O}'_i)$.

La démonstration est analogue à celle de l'exposé 1, page 1-06.

Soit $\mu \in \mathcal{E}'^o(\mathcal{O}'_i)$, orthogonal aux $f \in \mathcal{E}^o(\Omega)$ qui vérifient $D f = 0$ (dans Ω); montrons que μ est orthogonal aux $f \in \mathcal{E}^o(\mathcal{O}''_i)$ qui vérifient : $D f = 0$; le lemme en résultera immédiatement par dualité.

D'après l'hypothèse, on a, dans $\mathcal{E}'^o(\Omega)$ faible : $\mu = \lim \check{D} \nu_j$ (la limite étant prise sur le filtre $\{j\}$)[2]; a fortiori, dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ faible, $\mu = \lim_j \check{D} \nu_j$; mais on a vu (Troisième partie) que $3° \Rightarrow \check{D}\,\mathcal{E}'(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}'(\Omega)$: donc $\mu = \check{D}\nu$, $\nu \in \mathcal{E}'(\Omega)$; d'après la définition de K_i, le support de ν est contenu dans K_i.

Si $\alpha_j \in \mathcal{D}$, $\alpha_j \to \delta$, est une suite de régularisantes de supports assez voisins de 0 pour que $\mu * \alpha_j$ ait son support dans $\mathcal{O}''_i$ pour tout j, on a $\langle \mu, f \rangle = \lim \langle \mu * \alpha_j , f \rangle = \lim \langle \check{D}(\nu * \alpha_j), f \rangle =$
$= \lim_j \langle \nu * \alpha_j , Df \rangle = 0$, cqfd.

---

(2) - L'orthogonal de $\check{D}\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}'^o(\Omega)$ étant l'ensemble des $f\ \mathcal{E}^o(\Omega)$ solutions de $D f = 0$, l'orthogonal de l'ensemble de ces f est l'adhérence faible de $\check{D}\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}'^o(\Omega)$, on peut donc prendre les $\nu_j \in \mathcal{D}(\Omega)$.