

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

B. MALGRANGE

## Compléments divers. Équations elliptiques

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 3, p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A4_0)

© Séminaire Schwartz  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

26 novembre 1954

Exposé n° 3 (B. Malgrange)COMPLÉMENTS DIVERS. EQUATIONS ELLIPTIQUES

## I.- Compléments aux exposés 1 et 2

1.- Equations homogènes.

Soit  $D$  un opérateur différentiel à coefficients constants. On désignera par  $\check{D}$  son adjoint et par  $R, \mathcal{F}(\check{D} \delta)$ .

Théorème 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que toute solution dans  $\mathcal{E}$  de l'équation  $Df = 0$  soit limite dans  $\mathcal{E}$  de polynômes solutions est que chaque facteur irréductible de  $R$  s'annule à l'origine.

Démonstration. Pour que cette propriété d'approximation soit vérifiée, il faut et il suffit, évidemment, que l'on puisse approcher toute exponentielle-polynôme solution par des polynômes solutions. Or, dire que  $\mu \in \mathcal{E}'$  est orthogonale à toute exponentielle-polynôme solution c'est dire que :

$$(1) \quad \frac{\mathcal{F}\mu}{R} \text{ est analytique entière (exposé 1)}$$

Dire que  $\mu \in \mathcal{E}'$  est orthogonale à tout polynôme solution, c'est dire que :

$$(1') \quad \frac{\mathcal{F}\mu}{R} \text{ est holomorphe à l'origine (exposé 1)}$$

Nous devons donc démontrer que la condition de l'énoncé est nécessaire et suffisante pour que  $(1') \implies (1)$ .

Soit  $R = \prod_i R_i$  où  $R_i$  sont les facteurs irréductibles de  $R$  <sup>(1)</sup> (qui peuvent n'être pas tous distincts). Si, par exemple, on a :  $R_1(0) \neq 0$ , en prenant pour  $\mu$  le polynôme de dérivation défini par  $\mathcal{F}\mu = \frac{R}{R_1}$ , on voit que :

$\frac{\mathcal{F}\mu}{R}$  est holomorphe à l'origine, mais non entière ; donc  $\mu$  est orthogonale aux polynômes solutions, mais non à toutes les solutions  $S$  ; la condition est donc nécessaire.

---

(1) On démontre sans grande difficulté, et nous l'admettrons, que tout polynôme irréductible  $R_i$  a pour variété des zéros une variété irréductible en tant que variété analytique.

Supposons que, pour tout  $i$ , on ait :  $R_i(0) = 0$  ; soit  $\mu$  tel que  $\frac{\mathcal{F}_\mu}{R}$  soit holomorphe à l'origine ; la variété polaire de la fonction méromorphe  $\frac{\mathcal{F}_\mu}{R}$  est formée d'un certain nombre de composantes irréductibles de la variété  $R = 0$  ; toutes ces composantes passent à l'origine ; puisque  $\frac{\mathcal{F}_\mu}{R}$  est holomorphe à l'origine, sa variété polaire est vide et elle est holomorphe partout.

C.Q.F.D.

Exemple. La propriété vaut pour  $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  ;  $\Delta^2$  ;  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  ;

$$\frac{\partial}{\partial t} - \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Elle ne vaut pas pour  $\Delta + \lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ) (dans ce cas, où  $R(0) \neq 0$ , il n'y a pas de polynômes  $\neq 0$  solutions de l'équation).

## 2.- Propriétés de la solution élémentaire.

Proposition 1. Soit  $D$  un opérateur différentiel à coefficients constants tel que l'hyperplan  $x_1 = 0$  ne soit pas caractéristique.

Pour tout  $r > 0$ , il existe une constante  $C(r, D)$  telles que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on ait :

$$(2) \quad \|\varphi\|^2 \leq C(r, D) \left\{ \|e^{2\pi r x_1} D\varphi\|^2 + \|e^{-2\pi r x_1} D\varphi\|^2 \right\}$$

$$(\text{on pose } \|\varphi\|^2 = \int \psi \bar{\psi} dx_1, \dots, dx_n)$$

La démonstration résultera de deux lemmes :

Lemme 1. Soit  $H(\lambda)$  ( $\lambda = \sigma + i\tau$ ) une fonction d'une variable complexe, transformée de Fourier d'une fonction  $h(x) \in \mathcal{D}(R^1)$  ; on pose :

$$H_1(\lambda) = (\lambda - \alpha) H(\lambda) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C} \text{ quelconque, et } h_1 = \overline{\mathcal{F}} H,$$

Quels que soient  $\rho$  réel,  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$ , il existe une constante  $K > 0$  ne dépendant que de  $\rho, \rho_1, \rho_2$  (mais non de  $H$  et de  $\alpha$  ) et telle que :

$$\frac{1}{K} \int_{\tau=\rho} |H(\lambda)|^2 d\lambda \ll \int_{\tau=\rho+\rho_1} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda$$

Démonstration. Partageons la droite  $\tau = \rho$  en deux ensembles,  $L_1$  et  $L_2$  :

$L_1$  l'ensemble des points où  $|\lambda - \alpha| \geq K_1 = \min\left(\frac{\rho_1}{4}, \frac{\rho_2}{4}\right)$

$$L_2 = \int L_1$$

et majorons séparément  $\int_{L_1} |H(\lambda)|^2 d\lambda$  et  $\int_{L_2} |H(\lambda)|^2 d\lambda$

1°) Si  $\lambda \in L_1$ , on a :  $|H(\lambda)| \ll \frac{1}{K_1} |H_1(\lambda)|$

$$\text{d'où : } \int_{L_1} |H(\lambda)|^2 d\lambda \ll \frac{1}{K_1^2} \int_{\tau=\rho} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda$$

$$\ll K_2 \int |e^{2\pi\rho x} h_1(x)|^2 dx$$

$$\ll K_3 \left\{ \int |e^{2\pi(\rho+\rho_1)x} h_1(x)|^2 dx + \int |e^{2\pi(\rho-\rho_2)x} h_1(x)|^2 dx \right\}$$

et finalement :

$$(3) \quad \int_{L_1} |H(\lambda)|^2 d\lambda \ll K_3 \left\{ \int_{\tau=\rho+\rho_1} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda \right\}$$

$K_3$  ne dépendant que de  $\rho, \rho_1, \rho_2$ .

2°) Si  $\lambda \in L_2$ , on a :

$$|H(\lambda)| \leq \max_{|\zeta-\alpha|=K_1} |H(\zeta)| = \max_{|\zeta-\alpha|=K_1} \frac{1}{K_1} |H_1(\zeta)|$$

Mais  $\rho(\lambda) = \rho_1$  donc, si  $|\zeta-\alpha| = K_1$ , on aura :  $|\zeta-\rho| \leq 2K_1 \leq \frac{\rho_1}{2}$  et  $\leq \frac{\rho_2}{2}$ ,

c'est-à-dire :

$$(4) \quad |H(\lambda)| \leq \frac{1}{K_1} \max_{|\zeta-\rho| \leq 2K_1} |H_1(\zeta)|, \text{ si } \lambda \in L_2$$

Si l'on a :  $|\Im \zeta - \rho| \leq 2K_1$ , on aura :  $\rho - \rho_2 \leq \Im \zeta < \rho + \rho_1$  ;

par suite, on peut écrire :

$$H_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau = \rho - \rho_2} \frac{H_1(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau = \rho + \rho_1} \frac{H_1(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta}$$

d'où

$$|H_1(\zeta)|^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} \left| \int_{\tau = \rho - \rho_2} \frac{H_1(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \right|^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left| \int_{\tau = \rho + \rho_1} \frac{H_1(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \right|^2$$

(parce que  $u = v + w$  entraîne  $|u|^2 \leq 2(v^2 + w^2)$ )

En appliquant Cauchy-Schwarz au second membre, il vient :

$$|H_1(\zeta)|^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_{\tau = \rho - \rho_2} \frac{1}{|\zeta' - \zeta|^2} d\zeta' \int_{\tau = \rho - \rho_2} |H_1(\zeta')|^2 d\zeta' + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\tau = \rho + \rho_1} \int_{\tau = \rho + \rho_1}$$

Mais  $\int_{\tau = \rho - \rho_2} \frac{1}{|\zeta' - \zeta|^2} d\zeta' = \frac{\pi}{|\Im \zeta - \rho - \rho_2|}$  et, comme  $|\Im \zeta - \rho| \leq \frac{\rho_2}{2}$ ,

et qu'on a une inégalité analogue pour  $\int_{\tau = \rho + \rho_1}$

$$(5) \quad |H_1(\zeta)|^2 \leq \frac{1}{\pi \rho_2} \int_{\tau = \rho - \rho_2} |H_1(\zeta')|^2 d\zeta' + \frac{1}{\pi \rho_1} \int_{\tau = \rho + \rho_1} |H_1(\zeta')|^2 d\zeta'$$

lorsque  $\int$  est dans la bande considérée dans (4)

(4) + (5) montrent qu'il existe  $K_4$  ne dépendant que de  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , tel que :

$$|H(\lambda)|^2 \leq K_4 \left\{ \int_{\tau = \rho - \rho_2} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta + \int_{\tau = \rho + \rho_1} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta \right\}, \text{ si } \lambda \in L_2$$

Mais  $L_2$  est un intervalle de longueur  $\leq 2K_1$ , donc il existe  $K_5$ , ne dépendant que de  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , tel que :

$$(6) \quad \int_{L_2} |H(\lambda)|^2 d\lambda \leq K_5 \left\{ \int_{\tau = \rho - \rho_2} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta + \int_{\tau = \rho + \rho_1} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta \right\}$$

et (3) + (6) démontre le lemme 1.

Lemme 2.  $H(\lambda)$  est défini de la même manière que dans le lemme 1.

Soit  $Q(\lambda) = \lambda^m + \sum_{j=1}^m a_j \lambda^{m-j}$  un polynôme de degré  $m$  ;

et soit  $H_m(\lambda) = Q(\lambda)H(\lambda)$  ; quel que soit  $r > 0$ , il existe une constante  $C$ , dépendant de  $r$  et de  $m$ , mais non des  $a_j$ , telle que :

$$\int |H(\sigma)|^2 d\sigma \leq C \left\{ \int |H_m(\sigma + ir)|^2 d\sigma + \int |H_m(\sigma - ir)|^2 d\sigma \right\}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 1 par récurrence sur le degré  $m$  du polynôme  $Q$ .

On pose :  $Q(\lambda) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \alpha_j)$ ,  $Q_K(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \alpha_j)$ ,  $H_K(\lambda) = Q_K(\lambda)H(\lambda)$

Montrons que, si le lemme 2 est vrai pour  $H_K$ , il sera vrai pour  $H_{k+1}$ .

Par hypothèse, il existe une constante  $C(r, k)$  telle que :

$$(7) \quad \int |H(\sigma)|^2 d\sigma \leq C(r, k) \left\{ \int |H_k(\sigma + i\frac{r}{2})|^2 d\sigma + \int |H_k(\sigma - i\frac{r}{2})|^2 d\sigma \right\}$$

En appliquant le lemme 1 à  $\rho = \frac{r}{2}$ ,  $\rho + \rho_1 = r$ ,  $\rho - \rho_2 = -r$ , il vient :

$$\int |H_k(\sigma + i\frac{r}{2})|^2 d\sigma \leq C_1 \left\{ \int |H_{k+1}(\sigma + ir)|^2 d\sigma + \int |H_{k+1}(\sigma - ir)|^2 d\sigma \right\}$$

$C$ , ne dépendant que de  $r$

en majorant de même  $\int |H_k(\sigma - i\frac{r}{2})|^2 d\sigma$  et en portant ces deux majorations dans (7), on obtient le résultat cherché.

Démonstration de la proposition 1. En multipliant au besoin  $D$  par une constante (ce qui changera la constante  $C$ , mais non l'existence de l'inégalité), on peut supposer que  $R$  a la forme suivante :

$$R(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1^m + \sum_{j=1}^m R_j \lambda_1^{m-j} \quad , \quad R_j \text{ polynôme en } x_2, \dots, x_n .$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathcal{F}\varphi$ ,  $G = RF$ .

Pour  $\sigma_2, \dots, \sigma_n$  fixés, on a, en appliquant le lemme 2 :

$$\int |F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)|^2 d\sigma_1 \leq C(r, D) \left\{ \int |G(\sigma_1 + ir, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|^2 d\sigma_1 + \int |G(\sigma_1 - ir, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|^2 d\sigma_1 \right\}$$

où  $C(r, D)$  ne dépend pas de  $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ . Par suite :

$$\int |F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)|^2 d\sigma_1, \dots, d\sigma_n \leq C(r, D) \left\{ \int |G(\sigma_1 + ir, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|^2 d\sigma_1, \dots, d\sigma_n + \int |G(\sigma_1 - ir, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|^2 d\sigma_1, \dots, d\sigma_n \right\}$$

et, par transformation de Fourier :

$$\|\varphi\|^2 \leq C(r, D) \left\{ \|e^{2\pi r x_1} \check{D}\varphi\|^2 + \|e^{-2\pi r x_1} \check{D}\varphi\|^2 \right\}$$

C.Q.F.D.

Théorème 2. Tout opérateur différentiel à coefficients constants  $D$  opérant sur  $R^n$  admet une solution élémentaire  $E$  somme finie de dérivées d'ordre  $\leq [\frac{n}{2}] + 1$  de fonctions localement de carré sommable (en particulier,  $T \in \mathcal{D}'^{[\frac{n}{2}]+1}$ ).

Ceci améliore un résultat donné dans l'exposé 2 ( $T \in \mathcal{D}'^{n+1}$ ).

Par un changement de variable linéaire, nous pouvons nous ramener au cas où l'hyperplan  $x_1 = 0$  n'est pas caractéristique.

Désignons par  $V$  l'espace des fonctions  $f$  qui vérifient :

$$e^{2\pi r x_1} f \in L^2 \quad \text{et} \quad e^{-2\pi r x_1} f \in L^2 .$$

$V$  est un espace de Hilbert (produit scalaire évident).

L'inégalité (2) montre qu'il existe une application continue  $\check{G}$  de  $\check{D}(\mathcal{Q}) \subset V$  dans  $L^2$  telle que  $\check{G}(\check{D}\varphi) = \varphi$  pour  $\varphi \in \mathcal{Q}$ . Mais toute application linéaire continue d'un sous-espace d'un espace de Hilbert dans un espace vectoriel topologique complet et prolongeable à l'espace de Hilbert entier. On peut donc supposer  $\check{G}$  linéaire continue de  $V$  dans  $L^2$ .

$$\check{G}\check{D} = \varphi \text{ lorsque } \varphi \in \mathcal{Q}$$

Le transposé  $G$  de  $\check{G}$  applique  $L^2$  dans le dual  $V'$  de  $V$ .  $V'$  est comme on le voit immédiatement, l'espace des fonctions que l'on peut écrire sous la forme :

$$e^{2\pi i x_1} f_1 + e^{-2\pi i x_1} f_2, \quad \text{avec } f_1 \in L^2, f_2 \in L^2$$

Si  $f \in L^2$ , on a :  $\langle D G f, \varphi \rangle = \langle f, \check{G}\check{D}\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$  pour toute  $\varphi \in \mathcal{Q}$ , donc  $D(Gf) = f$ . On a ainsi résolu les équations avec second membre  $\in L^2$ , la solution étant localement  $-L^2$ .

Mais  $\mathcal{S}$  est somme de dérivées d'ordre  $\leq [\frac{n}{2}] + 1$  de fonctions  $\in L^2$  : on pourra donc trouver ainsi une solution élémentaire  $E$  somme de dérivées d'ordre  $\leq [\frac{n}{2}] + 1$  de fonctions  $\in V'$ , donc localement  $\in L^2$ .  
C.Q.F.D.

Remarque. Ce résultat est le meilleur possible : si  $D =$  identité,  $T = \mathcal{S}$  est somme de dérivées d'ordre  $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ , mais non  $< [\frac{n}{2}] + 1$  de fonctions localement de carré sommable.

On peut voir ces résultats par les méthodes indiquées au tome II des distributions (page 44, formule (VI,6;16) et ce qui suit). Toute fonction  $\varphi$  dont les dérivées (au sens distribution) d'ordre  $\leq [\frac{n}{2}] + 1$  sont localement  $-L^2$  est continue, et la forme linéaire  $\varphi \rightarrow \varphi(0)$  (c'est-à-dire  $\mathcal{S}$ ) est continue sur l'espace  $(\mathcal{Q}_{L^2}^{[\frac{n}{2}] + 1})$  de ces fonctions. Le dual de  $(\mathcal{Q}_{L^2}^{[\frac{n}{2}] + 1})$  est précisément l'espace des sommes finies de dérivées d'ordre  $\leq [\frac{n}{2}] + 1$  de fonctions à support compact de  $L^2$ , d'où le résultat positif annoncé pour  $\mathcal{S}$ .

Mais il n'en est plus de même si on remplace  $[\frac{n}{2}] + 1$  par  $[\frac{n}{2}]$ , comme le montre l'exemple de  $\varphi = (\log \frac{1}{r})^k$ , qui, pour  $0 < k < \frac{1}{2}$ , a ses dérivées d'ordre  $\leq [\frac{n}{2}]$  localement  $-L^2$  mais n'est pas bornée au voisinage de  $x = 0$ , d'où le résultat négatif relatif à  $\mathcal{S}$ .

II.- Equations à coefficients constants avec second membre,  
dans un ouvert quelconque.

Théorème 3. Soit  $\Omega$  un ouvert  $\subset \mathbb{R}^n$  et  $D$  un opérateur différentiel à  $n$  variables à coefficients constants. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1^{\circ}) D\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$$

$$2^{\circ}) \text{ Il existe un entier } k' \text{ tel que } D^{\mathcal{Q},k'}(\Omega) \supset D^{\mathcal{Q},0}(\Omega) \quad (2)$$

3<sup>o</sup>) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un compact  $K' \subset \Omega$  qui vérifie ceci, si  $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$  et si le support de  $\check{D}S$  est contenu dans  $K$ , alors le support de  $S$  est contenu dans  $K'$ .

Démonstration. Première partie :

1<sup>o</sup>)  $\Rightarrow$  3<sup>o</sup>) . Soit  $K$  un compact  $\subset \Omega$  et soit  $\check{\Phi}$  l'ensemble des fonctions  $\varphi \in \mathcal{Q}(\Omega)$  et telles que  $|\check{D}\varphi|$  ait son support dans  $K$  et soit  $\leq 1$ .  $\check{D}\check{\Phi}$  est un ensemble borné dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$ . Mais  $\check{\Phi}$  est aussi un ensemble borné dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .

Pour le voir, il suffit, puisque  $\mathcal{E}$  est complet, de montrer que  $\check{\Phi}$  est faiblement borné dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$ , donc que, pour toute  $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ ,  $|\langle f, \varphi \rangle|$  reste borné pour  $\varphi \in \check{\Phi}$ . L'hypothèse 1<sup>o</sup>) indique qu'il existe  $g \in \mathcal{E}(\Omega)$  telle que  $Dg = f$ . Alors

$$\sup_{\varphi \in \check{\Phi}} |\langle f, \varphi \rangle| = \sup_{\varphi \in \check{\Phi}} |\langle Dg, \varphi \rangle| = \sup_{\varphi \in \check{\Phi}} |\langle g, D\varphi \rangle| = \sup_{\varphi \in \check{D}\check{\Phi}} |\langle g, \varphi \rangle| < +\infty,$$

puisque  $g \in \mathcal{E}(\Omega)$  et que  $\check{D}\check{\Phi}$  est borné dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .

Comme  $\check{\Phi}$  est borné, les  $\varphi \in \check{\Phi}$  ont leurs supports dans un compact fixé, soit  $K'$ .

Si maintenant  $\varphi \in \mathcal{Q}(\Omega)$  est telle que  $\check{D}\varphi$  ait son support dans  $K$ , il existe  $C > 0$ , tel que  $C\varphi \in \check{\Phi}$ , donc  $\varphi$  aura aussi son support dans  $K'$ , ce qui montre 2<sup>o</sup>) dans le cas particulier de  $S = \varphi \in \mathcal{Q}(\Omega)$ . Cette démonstration est valable même si  $D$  est à coefficients variables, et  $\Omega$  une variété ;  $\check{D}$  est alors le transposé de  $D$ .

Passons à  $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$  quelconque

Soit  $L$  un voisinage compact de  $K$ ,  $L \subset \Omega$ . Si  $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$  est telle que  $\check{D}S$  a son support dans  $K$ , le support de  $\alpha \times \check{D}S = \check{D}(\alpha \times S)$  sera contenu dans  $L$  dès

(2) Nous mettons  $k'$  parce que, si  $k$  est l'ordre de la solution élémentaire, on pourra, comme il est montré plus loin, prendre  $k' = k + 1$ .

que  $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  aura son support assez voisin de l'origine ; alors il existe  $L'$  compact  $\subset \Omega$  tel que  $\alpha * S$  ait son support dans  $L'$ , et par passage à la limite  $\alpha \rightarrow \delta$ ,  $S$  aura aussi son support dans  $L'$ .

Deuxième partie :

2°)  $\Rightarrow$  3°) On procède de la même manière (on prendra pour  $\Phi$  l'ensemble des fonctions  $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tels que  $\check{D}\varphi$  ait son support dans  $K$ , et soit en module  $\leq 1$  ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k'$  ; on montre que  $\check{D}$  est borné dans  $\mathcal{D}'^0$ , et on achève comme précédemment).

Troisième partie:

3°)  $\Rightarrow$  1°) Il suffit de démontrer

- a) que l'application  $\check{D} : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}'(\Omega)$  est biunivoque ;  
 b) que  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$  est fermé dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$  (fortement ou faiblement,  $\mathcal{E}$  étant réflexif).

a) prouve en effet que  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$  ; (b) prouve que  $\check{D}$  est un homomorphisme faible de  $\mathcal{E}'(\Omega)$  dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$  donc un homomorphisme fort puisque  $\mathcal{E}'(\Omega)$  est un Fréchet, donc  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$  est complet donc fermé, donc  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$  sera bien  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .

a) est immédiat : si  $S$  distribution à support compact vérifie  $\check{D}S = 0$ , on a, par transformation de Fourier :  $\mathcal{F}(\check{D}\delta) \cdot \mathcal{F}S = 0$ , et comme c'est un produit de fonctions analytiques, l'une est nulle, donc  $\mathcal{F}S = 0$ , et  $S = 0$

b) Il suffit de montrer que l'intersection de  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$  avec tout ensemble borné faiblement fermé est faiblement fermée ; les distributions d'un ensemble borné ayant leur support dans un compact fixe, il suffit de démontrer ceci : pour tout  $K$  compact  $\subset \Omega$ ,  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{E}'_K$  est fermé dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .

Soit  $\check{E}$  une solution élémentaire de  $\check{D}$  ; si des  $T_i \in \mathcal{E}'(\Omega)$  sont telles que les  $\check{D}T_i$  aient leurs supports dans  $K$  et convergent vers  $S$ , on aura :  $T_i = \check{E} * \check{D}T_i$  donc les  $T_i$  tendent vers  $\check{E} * S$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ; mais les  $T_i$  ont leurs supports dans un compact fixe  $K' \subset \Omega$  en vertu de 3°), donc  $T = \check{E} * S$  a son support dans  $K'(\Omega)$  et l'on a  $\check{D}T = S$ , donc  $S$  appartient aussi à  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{E}'_K$  et 3°) entraîne bien 1°)

Quatrième partie:

3°)  $\Rightarrow$  2°) Soit  $\check{E} \in \mathcal{D}'^k$  une solution élémentaire de  $\check{D}$ .

Lemme 1. Soit  $\mathcal{O}$  un voisinage convexe de l'origine dans  $\mathcal{D}'^0(\Omega)$  ; pour tout compact  $K$  contenu dans  $\Omega$ , il existe un ouvert convexe contenant zéro  $\mathcal{O}'_K \subset \mathcal{D}'^k_K$  tel que l'on ait :  $\check{D}\mathcal{O}'_K \cap \mathcal{D}'^k_K \supset \mathcal{O}'_K \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$

Cela revient à dire : si des  $\varphi_i \in \mathcal{E}'(\Omega)$  sont telles que les  $\check{D}\varphi_i$  soient dans  $\mathcal{D}_K^k$  et y convergent vers zéro, les  $\varphi_i$  sont continues et convergent vers zéro dans  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ .

Or les  $\varphi_i$  vérifient :  $\varphi_i = \check{E} * \check{D}\varphi_i$  ; comme  $\check{E} \in \mathcal{D}'^k$ ,  $\check{D}\varphi_i \in \mathcal{D}^k$ ,  $\varphi_i$  est continue, et converge vers zéro uniformément sur tout compact ; comme les  $\varphi_i$  ont (par l'hypothèse 3°) leurs supports dans un compact  $K' \subset \Omega$ , elles tendent bien vers zéro dans  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ .

Nous allons maintenant montrer ceci :

Lemme 2.  $\mathcal{O}$  étant défini comme au lemme 1, il existe un ouvert  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$  et contenant zéro tel que :  $\check{D}\mathcal{O} \cap \mathcal{D}^{k+1}(\Omega) \supset \mathcal{O}' \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$ .

Cela revient à dire : si des  $\varphi_i \in \mathcal{E}'(\Omega)$  sont telles que les  $\check{D}\varphi_i$  convergent vers 0 dans  $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$ , alors  $\varphi_i$  convergent vers 0 dans  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ . (La difficulté provient des topologies limites inductives).

Soit  $L$  l'ensemble des fonctions  $\varphi$  dont les dérivées d'ordre  $\leq k+1$  (au sens distributions) sont des fonctions à support compact, mesurables, majorées en module par 1.  $L$  est dans  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  et  $L \cap \mathcal{D}_K^k$  est compact d'après Ascoli. Pour tout compact  $K$ , déterminons l'ouvert  $\mathcal{O}_K$  de  $\mathcal{D}_K^k$  d'après le lemme 1.

Posons  $M = L \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$ . Le lemme 1 nous montre que  $M \cap \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega) \subset \check{D}\mathcal{O} \cap \mathcal{D}_K^k \subset \check{D}\mathcal{O}$ . Donc si  $\mathcal{O}''$  est l'enveloppe convexe de tous les ouverts  $M \cap \mathcal{O}_K$  des  $M \cap \mathcal{D}_K^k$ ,  $K$  compacts de  $\Omega$ ,  $\check{D}\mathcal{O}$  contient  $\mathcal{O}''$ . Le lemme 3 qui va suivre nous permet de montrer que  $\mathcal{O}''$  est ouvert dans  $M$  pour la topologie induite par  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  (en prenant  $F = \mathcal{D}^k(\Omega)$ ,  $F_p = \mathcal{D}_K^k$ ,  $M$  et  $\mathcal{O}''$  pour appliquer ce lemme.  $M \cap \mathcal{D}_K^k$  est bien compact, car  $L \cap \mathcal{D}_K^k$  est compact, et  $\mathcal{D}_K^k \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$  est fermé dans  $\mathcal{D}_K^k$ , même pour la topologie induite par  $\mathcal{E}'(\Omega)$ , puisque, dans l'hypothèse 3°) où nous nous sommes placés,  $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$  est fermé dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$ ). Alors  $\mathcal{O}'' \cap \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$  est ouvert sur  $M \cap \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$ , et contenu dans  $\check{D}\mathcal{O} \cap \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$ . Un tel ouvert est de la forme  $M \cap \mathcal{O}'''$  où  $\mathcal{O}'''$  est un ouvert de  $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$  pour la topologie induite par  $\mathcal{D}^k$  donc a fortiori pour la sienne propre, ou encore  $L \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{O}'''$  ; mais  $L \cap \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$  est l'ensemble des  $\varphi \in \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$  dont les dérivées d'ordre  $\leq k+1$  sont majorées en module par 1, c'est un ouvert de  $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$ , donc finalement  $\mathcal{O}' = L \cap \mathcal{O}'''$  est ouvert dans  $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$ , et on a bien  $\mathcal{O}' \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega) = M \cap \mathcal{D}^{k+1}(\Omega) \subset \check{D}\mathcal{O} \cap \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$ . Reste à montrer le lemme 3.

Lemme 3. (B. Malgrange, C.R. Acad.Sc. 12.1.1954). Soit  $F$  un espace  $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ ,  $F_p$  une suite de définition de  $F$ , et  $M$  un convexe contenant zéro, tel que les

$M \cap F = M_p$  soient compacts ; tout  $\mathcal{O}' \subset M$  convexe contenant zéro et tel que les  $\mathcal{O}''_p = \mathcal{O}' \cap M_p$  soient des ouverts dans  $M_p$  est un voisinage de zéro dans  $M$ .

Pour la démonstration, consulter la note de Malgrange.

Démontrons maintenant que  $3^\circ) \Rightarrow 2^\circ)$ . Soit  $f \in \mathcal{D}'^0$  et considérons la forme linéaire suivante  $h$  sur  $\check{D}\mathcal{D}(\Omega) : \check{D}\varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$

Du lemme 2 résulte immédiatement : si des  $\check{D}\varphi_i$  convergent vers zéro dans  $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$ , les  $\varphi_i$  convergent vers zéro dans  $\mathcal{D}^0(\Omega)$  ; par suite  $\langle f, \varphi_i \rangle \rightarrow 0$  ;  $h$  est donc une forme linéaire continue sur  $\check{D}\mathcal{D}(\Omega)$  muni de la topologie induite par  $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$  ; donc on peut les prolonger en un  $g \in \mathcal{D}'^{k+1}(\Omega)$  ; et si  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a :  $\langle Dg, \varphi \rangle = \langle g, \check{D}\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$  d'où  $Dg = f$  ; c'est-à-dire  $D\mathcal{D}^{k+1}(\Omega) \supset \mathcal{D}^0(\Omega)$ , ce qui est  $2^\circ)$ , avec  $k' = k + 1$ .

#### Remarques.

a) Pour  $\Omega = \mathbb{R}^n$  (de  $\Omega$  convexe)  $3^\circ)$  est vérifié immédiatement (théorème des supports). On retrouve ainsi les résultats de l'exposé 2.

b)  $2^\circ)$  entraîne évidemment  $D\mathcal{D}'^{m+k'}(\Omega) \supset \mathcal{D}'^m(\Omega)$  d'où  $D\mathcal{D}'_F(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega)$  ( $\mathcal{D}'_F$  = espace des distributions d'ordre fini) ; on ne sait pas si la réciproque est vraie.

#### Cas des équations elliptiques.

Définition.  $D$  (opérateur différentiel quelconque sur une variété) est dit "elliptique" (resp. "analytique - elliptique) si, étant donnés  $S$  et  $T$  dans  $\mathcal{D}'$  tels que  $DS = T$ ,  $S$  est indéfiniment différentiable (resp. analytique) dans tout ouvert où  $T$  est indéfiniment différentiable (resp. analytique)

Nous verrons dans les exposés suivants que si  $D$  est un opérateur différentiel à coefficients constants sur  $\mathbb{R}^n$ ,

" $D$  elliptique" équivaut à "Il existe une solution élémentaire indéfiniment différentiable en dehors de l'origine".

" $D$  analytique-elliptique" équivaut à "Il existe une solution élémentaire analytique en dehors de l'origine".

En particulier, " $D$  analytique elliptique"  $\implies$  " $D$  elliptique".

Enfin, si  $D$  est elliptique (resp. analytique-elliptique),  $\check{D}$  est évidemment elliptique (resp. analytique-elliptique) puisqu'il a comme solution élémentaire  $\check{E}$ ,  $E$  étant une solution élémentaire de  $D$ .

Théorème 4.

a) Si  $D$  est elliptique, l'une quelconque des propriétés 1°), 2°), 3°) du théorème 3 équivaut à :

$$4°) D\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$$

b) Si  $D$  est analytique-elliptique, 1°), 2°), 3°), 4°) sont vraies pour tout ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

a) Si  $D$  est elliptique, 4°)  $\Rightarrow$  1°) ; en effet, si  $f \in \mathcal{C}'(\Omega)$ , il existe  $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tel que  $Dg = f$  ; mais  $g$  est indéfiniment différentiable d'après l'ellipticité.

Si  $D$  est elliptique, 1°)  $\Rightarrow$  4°) . Soit  $\{\mathcal{O}_i\}$  un recouvrement localement fini de  $\Omega$  par des ouverts  $\mathcal{O}_i \subset \Omega$  et relativement compacts dans  $\Omega$  ; et soit  $\{\alpha_i\}$  une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à  $\{\mathcal{O}_i\}$ .

Soit  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ; on peut trouver,  $S_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tel que :  $D S_i = T$  dans  $\mathcal{O}_i$  (il suffit de prendre  $S_i = E * \beta_i T$ , où  $E$  désigne une solution élémentaire de  $D$  et  $\beta_i$  une fonction de  $\mathcal{D}(\Omega)$  égale à 1 sur  $\mathcal{O}_i$ ).

Dans  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ , on a :  $D(S_i - S_j) = 0$  ; donc  $S_i - S_j$  est une fonction indéfiniment différentiable dans  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ , d'après l'ellipticité.

Soit  $S_i' = \sum_{j \neq i} \alpha_j (S_i - S_j)$   $S_i'$  est une distribution définie dans  $\mathcal{O}_i$  : en effet  $S_i$  est définie dans  $\mathcal{O}_i$  et  $\alpha_j$  partout, donc  $\alpha_j S_i$  dans  $\mathcal{O}_i$  ;  $\alpha_j S_j$  est définie partout.

$S_i'$  possède les propriétés suivantes :

1/  $S_i'$  est indéfiniment différentiable dans  $\mathcal{O}_i$ , car  $\alpha_j (S_i - S_j)$  a son support dans  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ , où  $S_i - S_j$  est indéfiniment différentiable.

2/  $S_i' - S_j' = S_i - S_j$  dans  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$  car :

$$\begin{aligned} S_i' - S_j' &= \sum_{k \neq i, j} \alpha_k [(S_i - S_k) - (S_j - S_k)] + \alpha_j (S_i - S_j) - \alpha_i (S_j - S_i) \\ &= \sum_k \alpha_k (S_i - S_j) = S_i - S_j \end{aligned}$$

On a donc aussi  $S_i' - S_i = S_j' - S_j$  dans  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ .

Il existe donc  $\Sigma \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tel que :  $\Sigma = S_i' - S_i$  dans  $\mathcal{O}_i$ , pour tout  $i$  (principe du recollement des morceaux).

Alors :  $D\Sigma = D S_i' - D S_i$  dans  $\mathcal{O}_i$  ;

donc  $D\Sigma + T = \varphi$  est indéfiniment différentiable (puisque dans  $\mathcal{O}_i, \varphi = D S_i'$ )

Par hypothèse, il existe  $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$  tel que :  $D\psi = \varphi$  ; d'où :

$$T = D(\psi - \Sigma) , \quad \text{C .Q.F.D.}$$

b) Montrons que 3°) est vérifié pour tout ouvert  $\Omega$  lorsque  $D$  est analytique-elliptique.

Soit  $K$  un compact  $\subset \Omega$  ; considérons  $K \cap \Omega$ , et décomposons le en ses composantes connexes ; les unes, soient  $\mathcal{O}'_i$ , sont des ouverts relativement compacts, les autres  $\mathcal{O}'_j$  sont des ouverts non relativement compacts.

Soit  $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$  tel que  $\check{D}S$  ait son support dans  $K$  ;  $S$  est analytique sur les  $\mathcal{O}'_j$  (et sur les  $\mathcal{O}'_i$ ) en vertu de l'hypothèse d'ellipticité

$S$  étant à support compact, est nécessairement nulle sur un ouvert  $\subset \mathcal{O}'_j$ , donc sur  $\mathcal{O}'_j$ .

Finalement, on trouve que le support de  $S$  est nécessairement contenu dans  $K' = K \cup (\cup \mathcal{O}'_i)$ .

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que  $K'$  est compact ;  $K'$  est fermé (car <sup>son</sup> complémentaire dans  $\Omega$  est  $\cup \mathcal{O}'_j$ ) . Soit  $V$  un voisinage compact de  $K$ , et  $F$  la frontière de  $V$  ;  $F \cap K'$  est compact ; comme il est recouvert par les  $\mathcal{O}'_i$ , il est recouvert par un nombre fini d'entre eux, soit  $\mathcal{O}'_{i_1}, \dots, \mathcal{O}'_{i_k}$  ;

Si  $i \neq i_1, \dots, i_k$ ,  $\mathcal{O}'_i$ , qui est disjoint des  $\mathcal{O}'_{i_j}$  ne peut rencontrer  $F$  ; comme il est adhérent à  $K$  et connexe, on a donc :  $\mathcal{O}'_i \subset V$  ; finalement :

$$K' \subset V \cup \mathcal{O}'_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{O}'_{i_k} \quad \text{et } K' \text{ est bien borné, donc compact.}$$

-----