L. SCHWARTZ

Fonctions - Traces

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A19_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)

Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 16

FONCTIONS - TRACES

-:-:-:-

Soit, comme précédemment, Ω un ouvert de R^n. En vertu du théorème principal de l'exposé n° 15, lorsque $\complement\Omega$ n'est pas m-polaire, $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ sont distincts. Dans ce cas, il y a grand intérêt à définir la trace γf d'une fonction quelconque f de $\mathcal{E}^m_{L^2}$, ainsi que les traces $\gamma^r f = \gamma(D^r f)$ de certaines de ses dérivées, sur $\complement\Omega$, et de pouvoir dire que $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ est le sous-espace de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, formé des fonctions dont toutes les traces $\gamma^r f$ sont nulles. Cela a été fait déjà lorsque $\Omega = R^n_+$ (Exposés n° 11 et 12). Nous allons le faire dans d'autres cas.

1.- Trace d'une fonction de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\complement\Omega$.

Nous nous bornerons au cas où Ω est le complémentaire, par rapport à une variété différentiable V^n à n dimensions, d'une sous-variété W^p à p dimensions. Et, puisque les résultats que nous avons en vue sont purement locaux, nous pouvons supposer que V^n est l'espace euclidien R^n et W^p un sous-espace X^p de R^n, isomorphe à R^p. Nous représenterons R^n comme le produit $X^p \times Y^{n-p}$; x (resp. y) sera un point variable dans X^p (resp. Y^{n-p}).

Nous pouvons supposer $p \leq n-2$, car le cas où X^p est un hyperplan de R^n a été déjà traité (Exposés n° 11 et 12) ; d'autre part, nous devons supposer $m \geq [\frac{n-p}{2}]+1$, sinon X^p serait m-polaire ; il n'est pas possible alors de définir une trace sur X^p de $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, mais d'autre part, $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

<u>Théorème 1</u> : <u>Il existe une application linéaire continue γ de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\complement X^p)$ dans $L^2(X^p)$, et une seule, qui coïncide, sur $\mathcal{D}(R^n)$, avec la trace sur X^p (au sens habituel).</u>

Pour démontrer ce théorème, il suffirait de prouver que la trace, définie sur $\mathcal{D}(R^n)$, est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(R^n)$, muni de la topologie induite par $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, dans $L^2(X^p)$; car $\mathcal{D}(R^n)$ est dense dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, et on pourrait donc prolonger la trace (d'une manière unique) à $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Nous préférerons adopter une méthode plus constructive, ce qui nous conduira à une formule donnant explicitement la trace γf de $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

Posons $\nu = n - p$; et soit V^ν une variété linéaire de R^n , parallèle à Y^{n-p} . Par hypothèse, on a $m \geq [\frac{\nu}{2}] + 1$. Soit $\delta(\eta - y)$ la mesure de Dirac, dans V^ν, au point $y \in V^\nu$; $\delta(\eta - y)$ est d'ordre $[\frac{\nu}{2}] + 1$ (Exposé n° 15), donc d'ordre $\leq m$ (par rapport à L^2) . C'est par suite une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^m_{L^2}(V^\nu)$; $\langle \delta(\eta - y) , f(\eta) \rangle$ a un sens pour tout $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(V^\nu)$ et nous poserons :

$$\overset{\circ}{f}(y) = \langle \delta(\eta - y) , f(\eta) \rangle \quad .$$

Soit

$$\delta(\hat{\eta}) = \sum_q D^q_\eta \, g_q(\hat{\eta})$$

une expression de δ dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(V^\nu)$; les ordres de dérivations $|q|$ sont $\leq m$ et les g_q sont à support compact. Nous pouvons écrire :

$$\overset{\circ}{f}(y) = \sum_q (-1)^{|q|} \int_{V^\nu} D^q f(y + \eta) \, g_q(\eta) \, d\eta$$

et, pour tout q , $D^q f(y + \eta) \in L^2_\eta$, $g_q \in L^2$.

Mais $\int_{V^\nu} D^q f(y + \eta) \, g_q(\eta) \, d\eta$ n'est pas autre chose que la convolution $D^q f * \check{g}_q$; c'est la convolution de deux fonctions de L^2 ; c'est par suite une fonction continue de $y \in V^\nu$; et il en est de même de $\overset{\circ}{f}(y)$; de plus, $\overset{\circ}{f} \in L^2$, puisque les g_q sont $\in L^2 \cap \mathcal{E}' \subset L^1$.

Lorsque $f \in \mathcal{D}(V^\nu)$, on a $\overset{\circ}{f} = f$; donc l'application qui, à $f \in \mathcal{D}(V^\nu)$ fait correspondre $\overset{\circ}{f}$, est l'identité ; comme cette application est continue de $\mathcal{D}(V^\nu)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{E}^m_{L^2}(V^\nu)$ dans $L^2(V^\nu)$, elle se prolonge en l'identité : autrement dit, la classe de f dans L^2 et celle de $\overset{\circ}{f}$ coïncident, f et $\overset{\circ}{f}$ sont presque partout égales.

Cela étant, remarquons que l'intersection de V^ν avec X^p est l'origine 0 dans V^ν ; et $\{0\}$ est 1-polaire, d'où il résulte que $\mathcal{E}^m_{L^2}(\complement \{0\}) = \mathcal{E}^m_{L^2}(V^\nu)$. Soit alors $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\complement X^p)$; sur <u>presque toutes</u> les variétés linéaires V^ν , la section de f (restriction de f à V^ν) appartient à $\mathcal{E}^m_{L^2}(V^\nu)$ et les dérivées (dans V^ν) de cette section de f

sont les sections des dérivées correspondantes de f .

Sur l'une quelconque de ces variétés linéaires V^{ν}, telle que $X^p \cap V^{\nu} = \{x\}$, on peut écrire :

$$\overset{\circ}{f}(x,y) = \sum_q (-1)^{|q|} \int D_{\eta}^q f(x,y+\eta)\ g_q(\eta)\ d\eta$$

$(x \in X^p\ ,\ y \in Y^{\nu})$. Pour x ainsi fixé, on a $\overset{\circ}{f}(x,y) - f(x,y) = 0$ pour presque tous les y ; et l'on peut former $\overset{\circ}{f}(x,y)$ pour presque tous les x . Cela ne suffit pas à entraîner que l'on ait $\overset{\circ}{f}(x,y) - f(x,y) = 0$ pour presque tous les $(x,y) \in R^n$. Il faut encore pour cela que l'ensemble sur lequel $\overset{\circ}{f}(x,y) \neq f(x,y)$ soit mesurable (on peut supposer $\overset{\circ}{f}$ partout définie en la prenant égale à 0 pour les valeurs de x pour lesquelles elle ne l'était pas). Or, par hypothèse, $D_{\eta}^q f(x,y+\eta)$ est mesurable par rapport à x , y et η , et de carré sommable en η pour presque tous les x,y ; l'une des assertions du théorème de Fubini entraîne que, dans ces conditions, $\int D_{\eta}^q f(x,y+\eta)\ g_q(\eta)\ d\eta$ soit une fonction mesurable de x et de y ; il en est donc ainsi de $\overset{\circ}{f}(x,y)$, et par suite, de $\overset{\circ}{f}(x,y) - f(x,y)$. Il en résulte bien que l'ensemble sur lequel $\overset{\circ}{f}(x,y) \neq f(x,y)$ est mesurable et alors (en vertu de ce qui précède) il est négligeable. $\overset{\circ}{f}(x,y)$ est, d'autre part, pour presque tout $x \in X^p$, une fonction continue de y .

On voit donc que f est presque partout égale à une fonction $\overset{\circ}{f}$ qui, pour presque toute valeur de x , est partout continue en y .

On pose alors $\gamma f(x) = \overset{\circ}{f}(x\ ,\ 0)$. De par la construction même de γf , on voit que γf est la trace (au sens usuel) de f sur X^p lorsque $f \in \mathcal{D}(R^n)$.

Reste à montrer que $f \longrightarrow \gamma f$ est une application linéaire continue de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(X^p)$. On a :

$$\gamma f(x) = \sum_q (-1)^{|q|} \int_{Y^{\nu}} D_{\eta}^q f(x\ ,\eta)\ g_q(\eta)\ d\eta \quad .$$

On en déduit, à l'aide de l'inégalité $\left(\sum_{i=1}^{h} a_i\right)^2 \leq h \sum_{h=1}^{h} a_i{}^2$

$$|\gamma f(x)|^2 \leq C \sum_q \left(\int_{Y^{\nu}} |D^q f(x\ ,\eta)|\ |g_q(\eta)|\ d\eta\right)^2$$

$$\leq \sum_q \| D_{\eta}^q f(x,\eta)\|^2_{L^2(Y^{\nu})}\ \|g_q(\eta)\|^2_{L^2(Y^{\nu})}$$

d'où :

$$\int_{X^p} |\gamma f(x)|^2 \, dx \leq C \sum_q \|g_q\|^2_{L^2(Y^\nu)} \, \| D^q_\eta f(x, \eta) \|^2_{L^2(R^n)}$$

ce qui prouve bien le résultat annoncé. Et le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Disons un mot des traces des dérivées. Si $D^r f$ est une dérivée transversale de f et si $m - |r| \geq [\frac{n-p}{2}] + 1$, on peut définir sa trace sur X^p ; on pose :

$$\gamma^r f = \gamma(D^r f) \; .$$

De même, si D^s est une dérivée tangentielle, et si $m - (|r| + |s|) \geq [\frac{n-p}{2}] + 1$, on peut définir $\gamma^r(D^s f)$; et l'on a l'égalité :

$$D^s(\gamma^r f) = \gamma^r(D^s f) \quad .$$

La situation est ici la même que lorsque X^p est un hyperplan $(p = n - 1)$ (voir démonstration de la proposition 1, exposé 12). Les deux situations ne sont, au contraire, pas comparables lorsqu'on s'occupe des prolongements $f \longrightarrow \tilde{f}$. En effet, X^p est toujours 1-polaire ; et donc (Exposé n°15), on a $D^q(\tilde{f}) = (D^q f)^\sim$. Il n'apparaît pas, à la traversée de X^p, de couches multiples, comme c'était le cas à la traversée de R^{n-1}. On peut concevoir cela intuitivement en remarquant que le complémentaire de R^{n-1} dans R^n n'est pas connexe, tandis que $\complement X^p$ l'est.

2.- <u>Caractérisation de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$</u>

<u>Théorème 2 : Pour que $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\complement X^p)$ appartienne à $\mathcal{D}^m_{L^2}(\complement X^p)$, il faut et il suffit que $\gamma^r f = 0$ pour toute trace γ^r que l'on a pu définir sur X^p.</u>

Ce théorème est vrai, quel que soit p. D'abord, si $p = n - 1$, nous sommes dans le cas où X^p est un hyperplan de R^n ; et il a déjà été démontré.

Si $m < [\frac{n-p}{2}] + 1$, X^p est m-polaire ; on ne peut définir aucune trace sur X^p mais on a bien $\mathcal{E}^m_{L^2}(\complement X^p) = \mathcal{D}^m_{L^2}(\complement X^p)$. C'est une conséquence du théorème principal de l'exposé 15.

Nous allons maintenant prouver que le théorème 2 est vrai lorsque $p \leq n-2$ et $m \geq [\frac{n-p}{2}] + 1$.

La nécessité de la condition est évidente. En effet, $\gamma^r \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\complement X^p)$; or $f \longrightarrow \gamma^r f$ est une application continue de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\complement X^p)$ dans $L^2(X^p)$; et $\mathcal{D}(\complement X^p)$ est dense dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\complement X^p)$.

Il s'agit donc de prouver que la condition est suffisante. Posons $\Omega = \complement X^p$.

Remarquons que l'orthogonal de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, considéré comme sous-espace de $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$, orthogonal pris dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$, est l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$, ayant leur support dans X^p . D'autre part, X^p est 1-polaire , puisque $p \leq n-2$, et par suite, $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \approx \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ (l'isomorphisme étant le prolongement $f \longrightarrow \tilde{f}$; cfr. p.7) . Soit alors $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$, telle que $\gamma^r f = 0$ quel que soit $|r| \leq m - [\frac{n-p}{2}] - 1$. Pour prouver que $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, il suffira de prouver que $\langle T , f \rangle = 0$ si $T \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$ a son support dans X^p . Or T peut se mettre sous la forme :

$$T = \sum_h T_h(x) \otimes D^h \delta(y) \qquad (x \in X^p , y \in Y^{n-p}) .$$

Montrons que, dans cette expression, on a nécessairement $|h| \leq m - [\frac{n-p}{2}] - 1$. Formons une suite $\{\varphi(x) \psi_\mu(y)\}$ de fonctions de $\mathcal{D}_{x,y}$, telle que $\varphi \in \mathcal{D}(X^p)$ soit fixée mais quelconque, et que les $\psi_\mu \in (Y^{n-p})$ convergent vers 0 au sens de $\mathcal{E}^m_{L^2}(Y^{n-p})$. Alors, les $\varphi(x) \psi_\mu(y)$ convergent vers 0 dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$; et puisque $T \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$, $\langle T , \varphi(x) \psi_\mu(y) \rangle \longrightarrow 0$.

Mais $\sum_h \langle T_h(x) \otimes D^h \delta(y) , \varphi(x) \psi_\mu(y) \rangle = \sum_h \langle T_h, \varphi \rangle \langle D^h \delta, \psi_\mu \rangle$ ne peut tendre vers 0 que si $\sum \langle T_h, \varphi \rangle D^h \delta$ est d'ordre $\leq m$; donc, d'après la proposition 3 de l'exposé 15, $\langle T_h, \varphi \rangle = 0$ pour $|h| \geq m - [\frac{n-p}{2}]$, et comme φ est arbitraire, $T_h = 0$ pour $|h| \geq m - [\frac{n-p}{2}]$.
(une démonstration en tous points analogue a été faite dans l'exposé n° 15).

Donc, on peut écrire : $T = \sum_h T_h(x) \otimes D^h \delta(y)$ $(x \in X^p , y \in Y^{n-p} , |h| \leq m - [\frac{n-p}{2}] - 1)$. Remarquons que T est limite, dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$, de ses régularisées "par rapport à x" : $\rho_\varepsilon(x) \underset{x}{*} T$ (1) converge vers T dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$; et l'on peut encore "tronquer" ces régularisées : on peut trouver des $\alpha_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(X^p)$, $\alpha_\varepsilon(x) = 1$ pour tout $|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, telles que les $\alpha_\varepsilon(x) (\rho_\varepsilon(x) \underset{x}{*} T)$ convergent vers T dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Mais :

$$\alpha_\varepsilon(x)(\rho_\varepsilon(x) \underset{x}{*} T) = \sum_h \alpha_\varepsilon(x)(\rho_\varepsilon * T_h(x)) \otimes D^h \delta(y) .$$

---

(1) – Nous notons ainsi le produit de convolution $(\rho_\varepsilon(x) \otimes \delta(y)) * T$.

Si nous prouvons que toutes ces distributions sont orthogonales à f , il en sera de même de T . Nous sommes ainsi ramenés à démontrer la propriété $\langle U , f \rangle = 0$ pour une distribution :

$$U = \beta(x) \otimes D^h \delta(y)$$

où $|h| \leq m - [\frac{n-p}{2}] - 1$, où $\beta \in \mathcal{D}(X^p)$, lorsque $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ a ses traces nulles. Or, pour cette distribution U , on a, pour $f \in \mathcal{D}(R^n)$ quelconque :

$$\langle U , f \rangle = (-1)^{|h|} \langle \beta(x), \langle \delta(y), D^h_y f(x,y) \rangle \rangle \quad .$$

Or la construction même de la trace donne :

$$\gamma(D^h_y f) = \langle \delta(y), D^h_y f(x,y) \rangle$$

et l'on a, par définition, $\gamma^h f = \gamma(D^h_y f)$. On a donc , pour $\beta \in \mathcal{D}(X^p)$, $f \in \mathcal{D}(R^n)$:

$$\begin{aligned} \langle U , f \rangle &= \langle \beta(x) \otimes D^h \delta(y) , f(x , y) \rangle \\ &= (-1)^{|h|} \int_{X^p} \beta(x) \gamma^h f (x) \, dx \end{aligned}$$

Le premier et le troisième membre sont définis pour $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$; ils dépendent continuement de f , et sont égaux pour $f \in \mathcal{D}(R^n)$, donc pour $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$.

Si alors par hypothèse, $\gamma^r f = 0$ pour tout $|r| \leq m - [\frac{n-p}{2}] - 1$, on a bien $\langle U , f \rangle = 0$.

C.Q.F.D.

3.- Application.

Au cours de ces exposés, nous avons introduit les espaces suivants :

$$\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) \quad , \quad \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \quad , \quad \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$$

et un espace que nous noterons N , celui des fonctions $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ telles que le prolongement $\tilde{f}$ appartienne à $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$.

Par $[\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega$, nous allons désigner l'espace des fonctions sur Ω qui sont des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$. On a les inclusions suivantes :

$$\underset{(1)}{\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)} \subset \underset{(2)}{N} \subset \underset{(3)}{[\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega} \subset \underset{(4)}{\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)} \quad .$$

La première inclusion a été démontrée dans le théorème 1 de l'exposé n° 11 , la deuxième et la troisième sont évidentes. Ce qui l'était moins et que nous sommes maintenant en mesure de prouver, c'est qu'en général, ces quatre espaces sont distincts les uns des autres.

1) Pr nons d'abord $\Omega = R^n_+$

On a, dans ce cas, $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = N$ (Exposé n° 11, prop.3) et $[\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ (Exposé n° 12, th.2). Mais $N \neq \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Donc (1) = (2) $\neq$ (3) = (4).

2) Prenons ensuite $\Omega = R^n_+ \cup R^n_-$ (autrement dit Ω est le complémentaire dans R^n de l'hyperplan $x_n = 0$).

Alors $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ est l'espace des $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}$ dont les traces γf pour $x_n = +0$ et $x_n = -0$ sont nulles toutes deux ; tandis que si f appartient seulement à N, ces traces sont égales, sans nécessairement être nulles.(par exemple $\mathcal{D}(R^n) \subset N$). D'ailleurs, $N = [\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega$. Mais si f appartient seulement à $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, ses traces γf pour $x_n = +0$ et $x_n = -0$ ne sont même pas égales en général. Donc, $[\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega \neq \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Donc (1) $\neq$ (2) = (3) $\neq$ (4).

3) Prenons $\Omega = \complement X^p$, $p \leqslant n-2$, $m \geqslant [\frac{n-p}{2}] + 1$.

Puisque X^p est 1-polaire, $N = [\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Mais $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) \neq N$, puisque $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ équivaut à $\gamma^r f = 0$ pour $|r| \leqslant m - [\frac{n-p}{2}] - 1$. (Th.2, p.8). Donc (1) $\neq$ (2) = (3) = (4).

Remarquons que $N = [\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega$ toutes les fois que $\complement\Omega$ est de mesure nulle, que $[\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)]_\Omega = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ toutes les fois que $\complement\Omega$ est 1-polaire, et que $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ toutes les fois que $\complement\Omega$ est m-polaire.