

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

**1ère partie : ouverts  $\Omega$  à frontière régulière, espaces  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$**

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 13, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A16_0)

© Séminaire Schwartz  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

(Equations aux dérivées partielles)

Année 1954/55

-:-:-

Exposé n° 131<sup>ere</sup> partie : OUVERTS  $\Omega$  À FRONTIÈRE RÉGULIÈRE, ESPACES  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ .

-:-:-

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière  $\dot{\Omega}$  est une sous-variété indéfiniment différentiable de l'espace, de dimension  $n-1$ ,  $\Omega$  étant d'un seul côté de  $\dot{\Omega}$ . On désignera par  $L^2_{loc}(\dot{\Omega})$  l'espace des classes de fonctions sur  $\dot{\Omega}$ , de carré sommable sur tout compact de  $\dot{\Omega}$ , pour la mesure superficielle  $d\sigma$ , et muni de la topologie définie par les semi-normes

$N_K(f) = \int_K |f|^2 d\sigma$ ,  $K$  désignant une base de la famille des compacts de  $\dot{\Omega}$ . On a alors le

Théorème 1 : Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\dot{\Omega}$  variété indéfiniment différentiable de dimension  $n-1$ ,  $\Omega$  étant d'un seul côté de  $\dot{\Omega}$ . Il existe une application continue unique  $\gamma : \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega) \rightarrow L^2_{loc}(\dot{\Omega})$  ( $m \geq 1$ )

qui coïncide, pour chaque fonction indéfiniment différentiable sur  $\bar{\Omega}$ , avec sa trace à la frontière.

Démonstration : Soit  $\mathcal{O}_i$  un voisinage ouvert (dans  $\mathbb{R}^n$ ) relativement compact d'un point  $a_i \in \dot{\Omega}$  tel qu'il existe un homéomorphisme indéfiniment différentiable  $h_i$  de  $\mathcal{O}_i$  sur l'intérieur d'un cube  $\Gamma_i$ , voisinage de zéro dans  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble des points de  $\mathcal{O}_i \cap \Omega$  étant appliqué sur l'ensemble des points de  $\Gamma_i$  vérifiant  $x_n > 0$ . ( $\omega_i = \mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega}$  est appliqué sur l'ensemble des points de  $\Gamma_i$ , vérifiant  $x_n = 0$ ).

Si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  ( $m \geq 1$ ) telle que  $\tilde{f}$  ait son support dans  $\mathcal{O}_i$  on définira  $\gamma f$  par

$$\gamma f = [\gamma(f \circ h_i^{-1})] \circ h_i|_{\omega_i}$$

où  $h_i|_{\omega_i}$  est la restriction de  $h_i$  à  $\omega_i$ . (Transport de la définition

dans  $R_n^+$ ). Ceci a un sens car si  $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  alors  $f \circ h_i^{-1} \in \mathcal{E}_{L^2}^m(R_n^+)$  puisque  $f$  est à support compact et de même  $\gamma(f \circ h_i^{-1}) \in L^2(R_n^+)$  entraîne que  $\gamma(f \circ h_i^{-1}) \cdot h_i \in L^2(\mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega})$ .

Lorsque  $\tilde{f}$  garde son support dans  $\mathcal{O}_i$ , l'application  $f \rightarrow \gamma f$  est manifestement continue de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  dans  $L^2_{loc}(\mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega})$ .

Si maintenant  $\mathcal{O}_j$  ouvert relativement compact de  $\Omega$  tel que  $\overline{\mathcal{O}_j} \cap \dot{\Omega} = \emptyset$ , alors si  $\tilde{f}$  a son support dans  $\mathcal{O}_j$ , on pourra  $\gamma f = 0$ .

Et maintenant, on peut trouver un recouvrement localement fini de  $\overline{\Omega}$  par des ouverts  $\mathcal{O}_i$  tels que, ou bien  $\mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega} = \omega_i \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{O}_i$  jouissant des propriétés données plus haut, ou bien  $\overline{\mathcal{O}_i} \cap \dot{\Omega} = \emptyset$ .

Soit  $\alpha_i$  une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée aux  $\mathcal{O}_i$ .

On a  $f = \sum (\alpha_i f)$  et on pose  $\gamma f = \sum \gamma(\alpha_i f)$

Cette somme est bien définie, car si  $K$  est un compact de  $\dot{\Omega}$  il n'existe qu'un nombre fini des  $\mathcal{O}_i$ , qui rencontrent  $K$ .

Alors si des  $f_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ , les  $\alpha_i f_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  donc les  $\gamma(\alpha_i f_n) \rightarrow 0$  dans  $L^2_{loc}(\omega_i)$ , donc l'application  $f \rightarrow \gamma f$

est bien continue de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  dans  $L^2_{loc}(\dot{\Omega})$ . Si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\Omega$ ,  $\gamma f$  est bien égal à la trace de  $f$  sur  $\dot{\Omega}$ .

$\gamma$  satisfait aux propriétés du théorème.

Il reste à prouver que  $\gamma$  est la seule application à jouir de ces propriétés (en particulier qu'elle est indépendante du recouvrement et des  $\alpha_i$ ). Cela résultera de ce qui suit :

Théorème 1bis : Si  $\Omega$  vérifie les conditions indiquées au théorème 1, les restrictions à  $\Omega$  de fonctions de  $\mathcal{D}(R^n)$  sont denses dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ .

a) Soit  $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ . Si  $\beta_j$  est une suite de fonctions  $\in \mathcal{D}(R^n)$ , égales à 1 sur des compacts de plus en plus grands, et de dérivées d'ordre  $\leq m$  bornées, les  $\beta_j f$  convergent vers  $f$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ . Il suffit donc de montrer que  $\beta_j f$  est adhérente dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  à  $\mathcal{D}(R^n)$ , ce qui revient à raisonner sur  $f$ , en supposant  $\tilde{f}$  à support compact.

b) Mais alors nous allons montrer que  $f$  est la restriction à  $\Omega$  d'une fonction de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ . Comme  $\tilde{f}$  est à support compact,  $f$  est une somme finie  $\sum (\alpha_i f)$ , relativement aux  $\alpha_i$  utilisées dans la démonstration du théorème 1, et il suffit de démontrer cette propriété pour  $\alpha_i f$ , c'est-à-dire pour une fonction, appelée encore  $f$ , telle que  $\tilde{f}$  ait son support compact dans un ouvert  $\mathcal{O}_i$  du recouvrement. On se ramène alors par l'homéomorphisme  $h_i$  au cas d'une fonction  $f$  à support compact dans  $\mathbb{R}^n$ , appartenant à  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}_+^n)$ ; or, on a vu dans l'exposé 12 qu'elle est restriction d'une fonction de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ , dont le support peut être choisi (par troncature) dans un voisinage arbitraire du support de  $f$ . c) Comme enfin  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ , le théorème est démontré.

Propriété multiplicative de la fonction trace.

Soit  $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ; alors si  $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ ,  $\alpha f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ .

On a  $\gamma(\alpha f) = \gamma(\alpha) \cdot \gamma(f)$ .

Caractérisation de  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$  par les valeurs au bord de ses éléments ( $\Omega$  vérifiant toujours les conditions du théorème 1).

Si  $f \in \mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ , alors par définition  $f$  est limite pour la topologie de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  d'éléments de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , qui sont de trace nulle, donc  $\gamma D^p f = 0$ . Réciproquement soit  $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  telle que  $\gamma f = 0$ , et  $\gamma D^p f = 0$  pour  $|p| \leq m-1$ . Alors  $f$  est limite de tronquées  $\beta f$  qui, en vertu des propriétés multiplicatives de l'application trace jouissent des mêmes propriétés au bord que  $f$ . On peut donc supposer que l'adhérence dans  $\overline{\Omega}$  du support de  $f$  est compacte.

Donc  $f$  est une somme finie  $\sum \alpha_i f$  (Notations du théorème 1) avec  $\gamma(D^p(\alpha_i f)) = 0$   $|p| \leq m-1$

et chaque  $\alpha_i f$  est, ou bien dans  $\mathcal{E}^1(\Omega) \cap \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  donc dans  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ , ou bien (en se ramenant à  $\mathbb{R}_n^+$ ), où la propriété a été démontrée antérieurement, limite de fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ ; donc  $f \in \mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ . D'où la

Proposition 1:  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ , dans les hypothèses du théorème 1, est le sous-espace de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  formé des fonctions  $f$  telles que  $\gamma(D^p f) = 0$  pour  $|p| \leq m-1$ .

L'espace  $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$  :

Définition 1 :  $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$  désigne l'espace des distributions dans  $\Omega$  sommes de fonctions de  $L^2(\Omega)$  et de dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $m$  de fonctions de  $L^2(\Omega)$ .

Théorème 2 :  $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$  est isomorphe au dual topologique de  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ .

Si  $T = \sum_{|p| \leq m} D^p f_p$  où  $f_p \in L^2(\Omega)$  et si  $\varphi \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} \int_{\Omega} f_p(x) D^p \varphi(x) dx$$

établit la dualité entre ces deux espaces.

Démonstration :  $\mathcal{D}(\Omega)$  est partout dense dans  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  l'injection de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  donnera donc par transposition une injection de  $(\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))'$  sur un sous-espace de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . On identifiera  $(\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))'$  avec ce sous-espace.

Soit  $T \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ ,  $\varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} \int_{\Omega} f_p(x) D^p \varphi(x) dx$

est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  et si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq m} \langle D^p f_p, \varphi \rangle = T(\varphi) \text{ donc } \varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ est le}$$

prolongement unique de la distribution  $T$  à  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  et on a bien

$$T \in (\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))' .$$

Réciproquement si  $T \in (\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))'$ , puisque  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  est un espace de Hilbert, on peut trouver  $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  telle que

$$\langle T, \varphi \rangle = (\varphi, f)_{\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)} = \sum_{|p| \leq m} \int_{\Omega} D^p \varphi \cdot \overline{D^p f} dx \quad \text{pour chaque } \varphi .$$

et si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ceci peut s'écrire

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} \langle \varphi, D^p (D^p \bar{f}) \rangle$$

ce qui identifie  $T$  à la distribution  $\sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (D^p \bar{f})$

et nous avons montré

$$(\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))' = \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega) \quad \text{c.q.f.d.}$$

Désormais  $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$  sera muni de la topologie forte de dual de  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ .

2e partie : RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UN OUVERT

$\Omega$  DE  $\mathbb{R}^n$ , POUR L'OPÉRATEUR  $D = -\Delta + \lambda$ ,  $\lambda > 0$

Théorème 3 : Soit  $T \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$  et  $g \in \mathcal{C}^1_{L^2}(\Omega)$ , il existe u unique tel que  $Du = T$  et tel que  $u - g \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$

Démonstration : Remarquons que la condition  $u - g \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$  signifie bien que u prend des valeurs données au bord, à savoir  $\chi g$ , en vertu de la proposition 1, lorsque  $\Omega$  est à frontière bien régulière. Posons  $u - g = v$ . On a à trouver v tel que  $Dv = S$  ou  $S = T - Dg$

( $S \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ ) et où  $v \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ .

Introduisons sur  $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$  la métrique hilbertienne

$$((f, g))_D = \sum_i \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} dx + \lambda \int_{\Omega} f \bar{g} dx$$

Elle est manifestement équivalente, puisque  $\lambda > 0$ , à la métrique utilisée jusqu'ici

$$(f, g)_1 = \sum_i \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} dx \right) \right) + \int_{\Omega} (f \cdot \bar{g}) dx$$

Etant donné  $S \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$  il existe donc v unique dans  $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$  tel que

$$(1) \quad \langle S, \bar{\varphi} \rangle = ((v, \varphi))_D$$

$$(2) \quad \text{donc} \quad \langle S, \bar{\varphi} \rangle = \sum_i \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} dx \right) \right) + \lambda \int_{\Omega} v \cdot \bar{\varphi} dx$$

et pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  cette expression se transforme

$$(3) \quad \text{en} \quad \langle S, \bar{\varphi} \rangle = \langle (-\Delta + \lambda) v, \bar{\varphi} \rangle \quad \text{ou} \quad S = (-\Delta + \lambda) v.$$

v est une solution du problème. Pour prouver, dans les conditions indiquées, que cette solution est unique, il suffit de montrer que toute solution v dans  $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$  satisfait à l'équation (1). Or, on a par hypothèse pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , l'équation (3), qui peut s'écrire sous la forme (2). Les deux membres de (2) étant égaux sur un sous-ensemble partout dense de  $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ , définis sur tout  $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$  ( $v \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ ), et y dépendant continuellement de  $\varphi$ , sont égaux partout donc (1) est vraie. c.q.f.d.