L. Schwartz

Les espaces $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ (suite)

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 12, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A15_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 12

LES ESPACES $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ ET $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. (Suite).

-:-:-:-

Soit toujours $\Omega = R^n_+$ (région $x_n > 0$ de R^n).

Proposition 1 : Lapplication $f \longrightarrow \gamma f$ est continue de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^{m-1}_{L^2}(R^{n-1})$, et l'on a :

$$(1) \qquad D^p_\xi \gamma f = \gamma D^p_\xi f \quad \text{pour} \quad |p| \leq m-1$$

En d'autres termes, une dérivée horizontale de la trace de f est égale à la trace de la dérivée horizontale pourvu que l'ordre de dérivation soit inférieur ou égal à $m-1$.

Démonstration : Le fait que $\gamma f \in \mathcal{E}^{m-1}_{L^2}(R^{n-1})$ et que l'application soit continue résultera de (1). Car on aura $\| D^p_\xi \gamma f\|^2_{L^2} = \| \gamma D^p_\xi f\|^2_{L^2}$ et d'après l'exposé (11),

$$\| \gamma D^p_\xi f\|^2_{L^2} \leqslant k \, \| D^p_\xi f\|^2_{\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)} \leqslant k \, |||f|||^2_m$$

Les deux membres de (1) ont un sens et sont dans $L^2(\Omega)$. L'égalité (1) pour une dérivée d'ordre un l'entraîne pour toute dérivée d'ordre $|p| \leqslant m-1$.

Soit donc $f \in \mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$. En supposant une fois pour toutes que f a été tronquée pour être à support borné en x_n, on se propose de montrer :

$$(1)^{\text{bis}} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma f = \gamma \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad\qquad j < n$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n-1})$:

$$< \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma f , \varphi > = - < \gamma f , \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} > = \int_{R^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_n} \, dx_n$$

Cette dernière intégrale s'écrit encore

$$\iint_{R^n} \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\xi \, dx_n$$

et cette expression a un sens parce que le support de $\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ est borné.

Elle est donc aussi égale à

$$\int_0^{+\infty} dx_n \int_{R^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\xi \qquad (2)$$

Modifions alors $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ pour qu'elle soit absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_j, et qu'elle ait alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$ pour dérivée usuelle. (Cette modification est possible parce que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$ est localement sommable ; cf. Distributions, Schwartz, Chapitre II. théorème V). Dans presque tous les hyperplans $x_n = C^{te}$ elle sera alors absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_j, de dérivée usuelle presque partout $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$.

Comme aussi dans presque tous les hyperplans $x_n = C^e$, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$ sont localement sommables, on en déduira que dans presque tous les hyperplans $x_n = C^e$, la trace de $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ a pour dérivée en x_j la trace de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$, en tant que distributions en ξ.

Ce qui permet d'écrire (2) :

$$-\int_0^{+\infty} dx_n \int_{R^{n-1}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j} \varphi \, d\xi = -\int_{R^{n-1}} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j} dx_n$$

$$= \int_{R^{n-1}} \gamma \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) \varphi(\xi) \, d\xi = \left\langle \gamma \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle$$

ce qui démontre (1^{bis}).

Introduisons $\gamma_k f = \gamma \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}$ pour $k \leq m-1$. C'est la dérivée normale intérieure d'ordre k au contour, qui existe d'après ce qu'on a déjà vu.

La prolongée $\tilde{f}$ de f par zéro n'est pas en général dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ car les dérivées font intervenir des couches portées par le bord, donc les traces des dérivées de f sur le bord.

<u>Proposition 2</u> : Soit $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Et soit $D^p_\xi \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \tilde{f}$ pris pour $|p| + k \leq m$; on a :

$$(3) \quad D_\xi^p \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \tilde{f} = (D_\xi^p \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} f)^\sim + \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} (\frac{\partial}{\partial x_n})^\ell \delta_{x_n} \otimes \gamma_{k-\ell-1} \; D_\xi^p f$$

Démonstration : Montrons tout d'abord que pour $|p| \leq m$, $D_\xi^p \tilde{f} = (D_\xi^p f)^\sim$ (étude des dérivations longitudinales). Il suffit ici encore de démontrer que :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{f} = (\frac{\partial f}{\partial x_j})^\sim \quad \text{pour} \quad f \in \mathcal{E}^1_{L^2} (\Omega)$$

Or on sait qu'on peut modifier f sur un ensemble de mesure nulle de façon qu'elle devienne absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_j , de dérivée usuelle presque partout égale à $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Mais alors $\tilde{f}$ est aussi absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_j , de dérivée usuelle $(\frac{\partial f}{\partial x_j})^\sim$; donc la dérivée distribution de $\tilde{f}$ est bien $(\frac{\partial f}{\partial x_j})^\sim$, c.q.f.d.

Montrons maintenant la validité de (3) pour les dérivations transversales. Pour cela, il suffit, par récurrence, de démontrer que pour $f \in \mathcal{E}^1_{L^2} (\Omega)$:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{f} = (\frac{\partial}{\partial x_n} f)^\sim + \delta_{x_n} \otimes \gamma f(\xi)$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D} (R^n)$,

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{f} , \varphi \rangle = - \langle \tilde{f} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \rangle = - \int_{R^n_+} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \, d\xi \, dx_n$$

$$= - \int_{R^{n-1}} d\xi \int_0^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \, dx_n$$

En modifiant f pour qu'elle soit absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_n , on peut intégrer par parties et l'intégrale précédente s'écrit :

$$- \int_{R^{n-1}} d\xi \left[(f \varphi)_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi \frac{\partial f}{\partial x_n} \, dx_n \right] =$$

$$\int_{R^{n-1}} \gamma f(\xi) \varphi(\xi) \, d\xi + \int_{R^{n-1}} d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_n} \varphi \, dx_n$$

Et la dernière intégrale est $\int_{R^n_+} \frac{\partial f}{\partial x_n} \varphi \, d\xi \, dx_n$

On obtient finalement :

$$\langle \delta_{x_n} \otimes \gamma f(\xi), \varphi \rangle + \langle (\frac{\partial f}{\partial x_n})^\sim, \varphi \rangle$$

On déduit alors de ces résultats :

<u>Théorème 1</u> : Si $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_+)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{f} \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ est que f ait toutes ses traces nulles jusqu'à l'ordre $m-1$ inclus.

Il résulte alors de l'exposé 11, proposition 3 , que, pour qu'une fonction $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ appartienne à $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, il faut et il suffit que ses traces $\gamma_k f$, $k \leq m-1$, soient nulles.

<u>Théorème 2</u> : Toute fonction $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_+)$ est la restriction à R^n_+ d'une fonction de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$.

<u>Démonstration</u> : Soient $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_+)$ et $g \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_-)$. Le raccolement de ces deux fonctions est dans $L^2(R^n)$. Il sera dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ si et seulement si <u>toutes les traces jusqu'à l'ordre</u> $m-1$ <u>coïncident</u>.

Car alors

$$D^p(\tilde{f} + \tilde{g}) = (D^p f)^\sim + (D^p g)^\sim \in L^2(R^n) \qquad \text{pour } |p| \leq m .$$

(Remarquons en effet que pour $\tilde{g}$, on a la formule 3 , mais avec le signe $-$ devant toutes les couches portées par le bord, définies par des produits tensoriels).

Pour $x_n < 0$, soit

$$(6) \qquad g(\xi, x_n) = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu f(\xi, -\nu x_n)$$

Il est évident que $g \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_-)$. D'autre part

$$\gamma_k g = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu (-\nu)^k \gamma_k f$$

La coïncidence des traces conduit à la résolution de

$$(7) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu (-\nu)^k = 1 \qquad k = 0, 1, 2 \ldots, m-1$$

(La valeur $\nu = 0$ a été exclue du fait qu'il faut $-\nu x_n \neq 0$).

Ce système de m équations par rapport aux m inconnues a_ν est cramérien (déterminant de Vandermonde) donc il est résoluble et on peut trouver g , d'où $\tilde{f} + \tilde{g}$ prolongeant f . Remarquons que nous trouvons même un prolongement linéaire continu de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_+)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$.

<u>Corollaire</u> : <u>Dans</u> $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_+)$, <u>les restrictions de fonctions de</u> $\mathcal{D}(R^n)$ <u>sont denses</u>.

En effet, $\mathcal{D}(R^n)$ est dense dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$.

<u>Corollaire</u> : <u>L'application</u> $f \longrightarrow \gamma f$ <u>est la seule application linéaire continue de</u> $\mathcal{E}^1_{L^2}(R^n_+)$ <u>dans</u> $L^2(R^{n-1})$ <u>qui coïncide avec la trace usuelle pour la restriction d'une fonction de</u> $\mathcal{D}(R^n)$.