L. Schwartz

Préliminaires à l'étude du problème de Dirichlet

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 11, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A14_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 11

PRÉLIMINAIRES A L'ÉTUDE DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

-:-:-:-

Soit Ω un ouvert $\subset R^n$, de frontière $\dot{\Omega}$. Le problème de DIRICHLET, en un sens vague, consiste à trouver une fonction f dans Ω, qui vérifie

$$\begin{cases} \Delta f = g & \text{dans } \Omega \\ f = u & \text{sur } \dot{\Omega}, \quad g \text{ et } u \text{ donnés.} \end{cases}$$

Pour étudier ce problème, et les problèmes analogues posés pour d'autres opérateurs différentiels, il faut introduire divers espaces fonctionnels.

Définition 1 : On désigne par $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ l'espace formé des $f \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant m$ dans Ω, au sens des distributions (c'est-à-dire les dérivées de f considérée comme élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$) sont dans $L^2(\Omega)$.

Sur $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, on met le produit scalaire suivant, qui définit sur $\mathcal{E}^m_{L^2}$ une structure préhilbertienne.

$$(f,g)_m = \sum_{|p| \leqslant m} (D^p f, D^p g)_{L^2}$$

(rappelons la notation : $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $|p| = p_1 + \ldots + p_n$,

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \text{).}$$

La norme correspondante sera notée $|||f|||_m$.

Proposition 1 : $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Cela revient à dire qu'il est complet ; or, soit (f_i) une suite de CAUCHY dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$; pour tout p, $|p| \leqslant m$, les $(D^p f_i)$ forment une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc les $(D^p f_i)$ tendent dans $L^2(\Omega)$ vers g_p ; posons $f = g_o$. Dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, les $D^p f_i$ tendent vers $D^p f$, on a donc : $D^p f = g_p$; donc f est dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et y est limite des f_i.

<u>Définition 2</u> : On désigne par $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ C'est aussi l'adhérence de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$: car toute $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ est limite de ses régularisées qui sont dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

C'est cet espace qui interviendra dans la résolution du problème de Dirichlet. Pour le moment, nous chercherons à en donner une interprétation montrant que, en un certain sens, $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ est le sous-espace de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ formé des fonctions nulles sur $\dot{\Omega}$ ainsi que leurs dérivées normales jusqu'à l'ordre $m-1$. Considérons d'abord le cas : $\Omega = R^n$.

<u>Proposition 2</u> : $\mathcal{D}$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{E}^m_{L^2}(R_n)$ (<u>autrement dit</u> : $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n) = \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$).

Soit α_i une suite de fonctions $\in \mathcal{D}$, dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ soient bornées, α_i étant égal à 1 sur la boule de centre 0 et de rayon i ; et soit $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$.

Pour tout i , $\alpha_i f$ est à support compact, et appartient à $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$; $\alpha_i f$ est limite dans $\mathcal{E}^m_{L^2}$ de ses régularisées, donc $\alpha_i f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$. Tout revient donc à démontrer que, dans $\mathcal{E}^m_{L^2}$, f est limite des $\alpha_i f$.

Or, dans L^2 , les $\alpha_i f$ tendent vers f (théorème de Lebesque) ; alors $\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_i f = (\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_i) . f + \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_1}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ dans L^2 , et ainsi de suite par récurrence ; donc les $D^p(\alpha_i f)$ $(|p| \leq m)$ tendent vers $D^p f$ dans L^2 ; d'où le résultat.

Nous verrons plus tard que la proposition 2 est valable pour tous les ouverts dont le complémentaire est assez petit (par exemple, s'il est réduit à un point) pour $m \leqslant [\frac{n}{2}]$.

Par contre, elle est fausse en général, et le théorème 1 va nous permettre d'en trouver des contre-exemples.

<u>Notation</u> : Pour $f \in L^2(\Omega)$, on désigne par $\tilde{f}$ la fonction $\in L^2(R^n)$ <u>égale à</u> f <u>sur</u> Ω <u>et à zéro sur</u> $\complement\Omega$.

<u>Théorème 1</u> : <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, <u>on a</u> : $\tilde{f} \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$; <u>plus précisément, pour tout</u> p , $|p| \leq m$, <u>on a</u> : $D^p \tilde{f} = \widetilde{(D^p f)}$. En effet, f est limite dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ de fonctions $f_i \in \mathcal{D}(\Omega)$; comme $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ induisent la même norme sur $\mathcal{D}(\Omega)$, les f_i forment une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$, espace complet : soit g sa limite ; dans L^2 , g est la

limite des $\tilde{f}_i$, donc $g = \tilde{f}$.

On a trivialement $D^p \tilde{f}_i = (D^p f_i)^\sim$; mais $(D^p f_i)^\sim$ converge vers $(D^p f)^\sim$ dans $L^2(R^n)$, pour $|p| \leq m$, et, puisque $\tilde{f}_i$ converge vers $\tilde{f}$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$, $D^p \tilde{f}_i$ converge vers $D^p \tilde{f}$ dans $L^2(R^n)$; donc $(D^p f)^\sim = D^p \tilde{f}$, C.Q.F.D.

<u>Exemple</u> : Soit Ω une boule, et f une fonction indéfiniment différentiable sur $\overline{\Omega}$: pour que f soit dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, il est nécessaire que les $D^p \tilde{f}$, $|p| \leq m$, ne contiennent pas de couches portées par $\dot{\Omega}$; c'est-à-dire que f soit nulle sur $\dot{\Omega}$ ainsi que ses dérivées normales d'ordre $\leq m-1$. Dans ce cas, on voit donc que <u>la fonction égale à</u> 1 <u>sur</u> Ω <u>n'est pas dans</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, <u>pour</u> $m \geqslant 1$.

Si l'on n'impose aucune restriction à Ω , la réciproque du théorème 1 est fausse.

Voici des cas où elle est vraie. Enonçons-la sous une forme équivalente :

<u>Proposition 3</u> : <u>Si</u> Ω <u>est un demi-espace</u>, <u>toute fonction</u> $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$, <u>dont le support est contenu dans</u> $\overline{\Omega}$, <u>a pour restriction à</u> Ω <u>une fonction appartenant à</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. On peut supposer que Ω est le demi-espace : $x_n > 0$; considérons les translations τ_ε parallèles à $0\,x_n$ avec $\varepsilon > 0$, Les fonctions

$$\tau_\varepsilon f = f(x_1 , x_2 , \dots , x_{n-\varepsilon})$$

ont leurs supports dans le demi-espace : $x_n \geqslant \varepsilon$ - En tronquant et régularisant, on voit que les restrictions à Ω des $\tau_\varepsilon f$ sont dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. Mais, si $\varepsilon \to 0$, les $\tau_\varepsilon f$ tendent vers f dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ (car les opérateurs τ_ε sont équicontinus (de norme 1), et convergent vers l'identité sur $\mathcal{D}(R^n)$, dense dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$), donc leurs restrictions à Ω dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Par suite, on a : $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

Le même raisonnement s'appliquerait à un ouvert Ω possédant la propriété suivante : il existe un point a tel que toutes les homothéties de rapport $1+\varepsilon$ (ou $1-\varepsilon$) de centre a <u>envoient</u> $\overline{\Omega}$ <u>dans</u> Ω . Exemples : les ouverts convexes, les ouverts complémentaires de convexes d'intérieur non vide. Les hypothèses précédentes sur Ω sont globales, mais le problème est visiblement de caractère local :

<u>Proposition 3 bis</u> : <u>Soit Ω un ouvert de R^n</u> . <u>Supposons qu'il existe un recouvrement de R^n par des ouverts $\mathcal{O}_i$ tels que toute fonction de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ de support compact contenu dans $\bar{\Omega}\cap\mathcal{O}_i$ ait pour restriction à $\Omega_i = \Omega \cap \mathcal{O}_i$ une fonction de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega_i)$, alors toute fonction de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ de support contenu dans $\bar{\Omega}$ a pour restriction à Ω une fonction de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$</u> .

Soit en effet $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ de support dans $\bar{\Omega}$. Elle est limite de tronquées βf , de sorte qu'on peut toujours se ramener au cas où f a un support compact $K \subset \bar{\Omega}$. Soit α_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de R^n par les $\mathcal{O}_i$. Alors f , à support compact, est une somme finie $\sum_i \alpha_i f$, et il suffit de démontrer la propriété pour $\alpha_i f$; cela revient à se ramener au cas où f a un support compact $K_i \subset \bar{\Omega} \cap_s \mathcal{O}_i$. On sait alors que la restriction de f à Ω_i est limite dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega_i)$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega_i)$ donc sa restriction à Ω est aussi limite dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ de ces mêmes fonctions $\in \mathcal{D}(\Omega)$.

<u>Exemple</u> : Supposons que $\dot{\Omega}$ soit une variété indéfiniment différentiable à n-1 dimensions, et que Ω soit d'un seul coté de cette variété. On pourra prendre des $\mathcal{O}_i$ telles que pour chaque i on ait la propriété suivante :

a) ou bien $\Omega_i = \Omega \cap \mathcal{O}_i$ est vide ;

b) ou bien $\Omega_i = \mathcal{O}_i$;

c) ou bien il existe un homéomorphisme indéfiniment différentiable d'un voisinage V_i de $\bar{\mathcal{O}}_i$ sur un ouvert V'_i de R^n tel que $\Omega \cap V_i$ soit amené sur la partie $x_n > 0$ de V'_i , $\dot{\Omega} \cap V_i$ sur la partie $x_n = 0$ de V'_i .

Les conditions d'application de la proposition 3 bis sont alors vérifiées. C'est trivial pour a) et pour b). Dans le cas c), soit $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ de support compact contenu dans $\bar{\Omega} \cap \mathcal{O}_i$. L'image de f par l'homéomorphisme est une fonction $g \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ de support compact dans $(x_n \geqslant 0) \cap \mathcal{O}'_i$ ($\mathcal{O}'_i$ l'image de $\mathcal{O}_i$). g est alors limite des $\tau_\varepsilon g$ (voir page 11-03) qui, si ε est assez petit, ont leurs supports compacts contenus dans $(x_n > 0) \cap \mathcal{O}'_i$, donc f est limite dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ de fonctions à support compact dans Ω_i
C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : L'hypothèse suivant laquelle Ω est d'un seul coté de $\dot{\Omega}$ est essentielle dans cet exemple. Ainsi pour $\Omega = \complement(x_n = 0)$ dans R^n , une

fonction $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ est dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ si et seulement si ses restrictions à $\Omega_+ = (x_n > 0) \cap \Omega$ et $\Omega_- = (x_n < 0) \cap \Omega$ sont respectivement dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega_+)$ et $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega_-)$; donc si $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ est indéfiniment différentiable, sa restriction à Ω ne peut appartenir à $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ qui si f est nulle ainsi que ses dérivées normales d'ordre $\leqslant m-1$ sur $x_n = 0$ (proposition 3), alors que toute f a son support dans $\bar{\Omega} = R^n$.

Nous allons voir maintenant que moyennant certaines hypothèses sur Ω, on peut donner un sens précis à la notion de "valeur au bord" d'une fonction $\in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

<u>Théorème 2</u> : <u>Soit</u> Ω <u>un demi-espace</u> $x_n > 0$. <u>Pour</u> $m \geqslant 1$, <u>il existe une application continue</u> $\gamma : \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \to L^2(\dot{\Omega})$ <u>qui coïncide, pour les fonctions indéfiniment différentiables sur</u> $\bar{\Omega}$, <u>avec la trace de</u> f <u>sur</u> $\dot{\Omega}$.

Soit $\alpha(x_n) \in \mathcal{D}$ une fonction de la variable x_n, égale à 1 au voisinage de $x_n = 0$, de support contenu dans $|x_n| \leqslant h$. Soit f une fonction $\in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. On aura encore : $\alpha f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, et il existe une constante k telle que $|||\alpha f|||^2_m \leqslant k\, |||f|||^2_m$.

On peut (Distributions, chapitre II, théorème 5) choisir une fonction $\hat{f}$ presque partout égale à f, absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_n, de dérivée usuelle $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n}$ presque partout égale à $\frac{\partial f}{\partial x_n}$. Nous allons montrer que, pour presque toutes les valeurs de $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $\hat{f}(\xi, x_n)$ a une limite $\gamma f(\xi)$ pour $x_n \to 0$. S'il en est ainsi, cette limite sera définie presque partout, et indépendante du choix de $\hat{f}$ à une équivalence près ; car pour 2 choix différents, les 2 fonctions $\hat{f}$ sont presque partout égales, donc, sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_n, elles sont presque partout égales donc partout égales puisque continues, et leurs limites pour $x_n \to 0$ seront bien presque partout égales. Pour montrer l'existence de cette limite, il suffit de le montrer pour $\alpha \hat{f}$, qui est absolument continue en x_n quand $\hat{f}$ l'est. Or

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n}\right|^2 dx_1 \ldots dx_n < \infty \quad \text{donc, pour presque tout } \xi :$$

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n < +\infty .$$

Comme cette fonction est à support compact, a fortiori

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial(\alpha \hat{f})}{\partial x_n} \right| dx_n < +\infty \quad .$$

Donc sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_n , $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n}$ est sommable, donc $\alpha \hat{f}$ a bien une limite $\gamma f(\xi)$. De plus

$$\|\gamma f\|^2_{L^2(\dot{\Omega})} \leqslant \int_{R^{n-1}} d\xi \left(\int \left| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right| dx_n \right)^2$$

$$\leqslant h \int_{R^{n-1}} d\xi \int \left| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right|^2 dx_n \leqslant h \left\| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right\|^2$$

$$\leqslant h \|\alpha f\|^2_m \leq h\ k\ \|f\|^2_m \quad , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Remarque</u> : Comme nous ne savons pas encore que les fonctions indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ sont denses dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, nous ne savons pas encore que l'application trace γ , est <u>la seule</u> à vérifier les propriétés de ce théorème.