L. SCHWARTZ

Équation de la chaleur. Retour aux propriétés du laplacien

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 10, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 10

ÉQUATION DE LA CHALEUR.
RETOUR AUX PROPRIÉTÉS DU LAPLACIEN.

-:-:-:-

Equation de la chaleur.

n désignant un entier > 0, on pose $N = n + 1$; le point courant de R^N sera désigné par (x , t) où $t \in R$ est la variable de "temps" et $x \in R^n$ la variable "d'espace". L'équation de la chaleur avec second membre est alors :

(1) $$\left(c \frac{\partial}{\partial t} - \gamma \Delta\right) f = Df = g$$

$\Delta = \sum_1^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$ est le laplacien par rapport aux variables d'espace. On fera $c = \gamma = 1$ dans la suite.

PROPOSITION : On définit une solution élémentaire de l'équation de la chaleur en posant :

(2) $$E(x , t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \exp\left(-\frac{u}{4t}\right) Y(t)$$ Y fonction d'Heaviside, $u = x_1^2 + \dots + x_n^2$

E est nulle pour $t < 0$ à cause du facteur $Y(t)$ et il est clair qu'elle est analytique en (x , t) pour $t > 0$, autrement dit elle est analytique en (x , t) pour $t \neq 0$. Pour montrer qu'elle est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine, il suffit d'après un résultat bien connu de faire voir que lorsque x reste dans un compact ne contenant pas 0 et que t tend vers 0 par valeurs positives, E tend vers 0 ainsi que chacune de ses dérivées. Or ceci résulte de ce que chacune de ces dérivées est le produit de E par un polynôme en $t^{-\frac{1}{2}}$ et x, et que le facteur exponentiel (pour $x \neq 0$) tend vers 0 plus vite que toute puissance de t.

D'autre part, on a vu à l'exposé n° 6 que E est en dehors de l'origine indéf. diff. de classe $(1,2)$ en (x , t).

Le calcul suivant montre que E est solution "usuelle" de l'équation homogène :

$$\left\{\frac{\partial E}{\partial t}\right\} = (2\sqrt{\pi})^{-n}\, t^{-n/2}\left(-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{u}{4t^2}\right)\exp\left(-\frac{u}{4t}\right) Y(t)$$

$$\left\{\Delta E\right\} = 4u\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}+2n\frac{\partial E}{\partial u} = (2\sqrt{\pi})^{-n}\, t^{-n/2}\left(4u\left(\frac{-1}{4t}\right)^2-\frac{n}{2t}\right)\exp\left(-\frac{u}{4t}\right) Y(t)$$

$$= \left\{\frac{\partial E}{\partial t}\right\}$$

Pour montrer que E définit une distribution, il faut montrer qu'elle est localement sommable ; on va montrer plus, à savoir qu'elle est sommable dans toute bande $a \leq t \leq b$. Comme E est une fonction positive et qu'elle est évidemment mesurable, il suffit pour prouver notre assertion de montrer que $\int_a^b dt \int E(x\,,\,t)\,dx < +\infty$, ceci en vertu de Lebesgue-Fubini. Or si l'on pose $x = 2\sqrt{\pi t}\;\xi$ et $v = |\xi|^2 = \sum_1^n \xi_i^2$, on a

$$(3) \qquad \int E(x\,,\,t)\,dx = \int \exp(-\pi v)\,d\xi = \prod_1^n \int \exp(-\pi\xi_i^2)\,d\xi_i = 1$$

car $u = 4\pi t\,v$,

d'où immédiatement l'inégalité cherchée.

Pour achever, nous considérerons E comme une fonction $\vec{E}(t)$ en t à valeur dans l'espace $\mathcal{D}'_x$ des distributions en x. Pour $t \neq 0$, c'est une fonction de classe C^∞ en t à valeur dans l'espace $\mathcal{E}_x$ des fonctions de classe C^∞ en x, donc a fortiori à valeur dans $\mathcal{D}'_x$, fonction qui est nulle pour $t < 0$. D'autre part, lorsque t tend vers 0 par valeurs positives, on va montrer que $E(\hat{x}\,,\,t)$ tend vers $\delta(\hat{x})$: pour voir cela, on remarque que E est positive, qu'elle tend uniformément vers 0 sur tout compact de l'espace des x qui ne contient pas 0 et que si K est un voisinage compact de 0 dans l'espace des x

$$(4) \qquad \int_K E(x\,,\,t)\,dx = \int_{\frac{K}{2\sqrt{\pi t}}} \exp(-\pi|\xi|^2)\,d\xi \longrightarrow 1$$

car $K/2\sqrt{\pi t}$ tend à remplir tout l'espace. Ceci assure la convergence de $E(\hat{x}\,,\,t)$ vers $\delta(\hat{x})$ en vertu de critères bien connus.

Nous pouvons maintenant montrer que E est solution élémentaire de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$. En effet dérivons $\vec{E}(t)$ par rapport à t en tant que distribution en t à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$; comme il y a une discontinuité de première espèce pour $t = 0$, il faut ajouter à la dérivée usuelle $\left\{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\}$

le terme $\delta(t)\, E(+0) - \delta(t)\, E(-0)$ soit $\delta(t)\, \delta(x) = \delta(\hat{x}\, ,\, t)$

(5) $$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} + \delta(\hat{x}\, ,\, t)$$

D'autre part pour $t \neq 0$, on a $\triangle \vec{E} = \left\{\triangle \vec{E}\right\}$, d'où finalement :

(6) $$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \triangle \vec{E} = \left\{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} - \left\{\triangle \vec{E}\right\} + \delta(\hat{x}\, ,\, t) = \delta(\hat{x}\, ,\, t)$$

parce que E est solution de l'équation homogène de la chaleur en dehors de l'origine. (6) est bien équivalente à $\frac{\partial E}{\partial t} - \triangle E = \delta$.

C.Q.F.D.

Opérateur $P(D)$ où P est un polynome.

De la même manière que dans l'exposé précédent, le problème de la recherche d'une solution élémentaire de l'opérateur $P(D)$ se ramène au même problème dans le cas où $P(D) = (D + \lambda)^k$. Plus généralement, nous allons montrer que si D est un opérateur de la forme $\frac{\partial}{\partial t} - D_x$ où D_x est un opérateur linéaire continu opérant sur l'éspace $\mathcal{D}'_x$ (non nécessairement un opérateur différentiel), et qu'on possède une distribution $E_0^1 = E$ vérifiant l'équation :

(7) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x + \lambda\right)^k E_\lambda^k = \delta(x\, ,\, t)$$

avec $k = 1$, $\lambda = 0$, on obtient une solution de l'équation (7) la plus générale en posant $E_\lambda^k = e^{-\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} E$. Pour le voir, on suppose d'abord $k = 1$ et cela résulte alors du calcul suivant :

(8) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x\right) E_\lambda^1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\lambda t} E\right) - e^{-\lambda t} D_x E = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x\right) E\right] e^{-\lambda t} - \lambda E\, e^{-\lambda t}$$
$$= \delta(x\, ,\, t) - \lambda E_\lambda^1 \quad .$$

Puis on raisonne par récurrence sur k .

(9) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x + \lambda\right) E_\lambda^k = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} E_\lambda^1\right) - D_x E_\lambda^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda E_\lambda^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} E_\lambda^1 + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{\partial E_\lambda^1}{dt} - D_x E_\lambda^1 + \lambda E_\lambda^1\right)$$
$$= E_\lambda^{k-1} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, \delta(x\, ,\, t)$$

Si $k \geqslant 2$, le deuxième terme est nul et il reste

(10) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x + \lambda\right) E_\lambda^k = E_\lambda^{k-1} \qquad k \geqslant 2$$

d'où immédiatement le résultat cherché par récurrence sur k .

Si on revient au cas de $D_x = \Delta$, on peut étendre la définition de E_λ^k pour tout nombre complexe k en posant $E_\lambda^k = e^{-\lambda t} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} E(x , t)$ pour $\mathcal{R}k > 0$ et en se servant ensuite de la formule (10) pour $\mathcal{R}k \leq 0$, cette définition étant sans ambiguité car le même calcul que plus haut montre que la formule (10) est valable pour $\mathcal{R}k > 1$. On peut aussi utiliser des parties finies.

On a alors $E_\lambda^0 = \delta$, $E_\lambda^{-1} = (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \lambda)\delta$ et la formule (10) avec $D_x = \Delta$ est valable en toute généralité. Pour λ fixé E_λ^k est une fonction holomorphe de k à valeur dans $\mathcal{D}'_{(x , t)}$, car on voit sur la définition qu'il en est ainsi pour $\mathcal{R}k > 1$ et la formule (10) permet d'étendre ce résultat au cas où $\mathcal{R}k \leq 1$. (Car $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \lambda$ est un opérateur continu dans $\mathcal{D}'_{(x,t)}$) .

Enfin, on peut définir le produit de convolution de E_λ^k et E_λ^h car ce sont des distributions appartenant à l'espace $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \hat{\otimes} (\mathcal{D}'_+)_t$ comme on le voit en examinant d'abord le cas où k et h ont des parties réelles strictement plus grandes que 1 (elles appartiennent même dans ce cas à l'espace $(\mathcal{D}'_+)_t (L^1_x) = (L^1)_x \hat{\otimes} (\mathcal{D}'_+)_t$) et en appliquant ensuite un certain nombre de fois l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \lambda$. On va démontrer la formule suivante

$$E_\lambda^k * E_\lambda^h = E_\lambda^{k+h} \tag{11}$$

Si la formule (11) est démontrée pour $\mathcal{R}k$, $\mathcal{R}h > 1$, le principe de prolongement analytique la démontrera en toute généralité. Or si k et h ont des parties réelles strictement plus grandes que 1 , on a affaire à des fonctions sommables en x , à support limité à gauche en t et Lebesgue-Fubini montre que

$$(E_\lambda^k * E_\lambda^h)(x , t) = \int_0^t E_\lambda^k (\hat{x} , t-s) \underset{(x)}{*} E_\lambda^h (\hat{x} , s)\, ds \tag{12}$$

$$= e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{s^{h-1}}{\Gamma(h)} E(\hat{x} , t-s) \underset{(x)}{*} E(\hat{x} , s)\, ds$$

Or pour t fixé, la transformée de Fourier en x de $E(x , t)$ est $\hat{E}(p , t) = \exp(- 4\pi^2 t\, |p|^2)$ et donc $\hat{E}(p , t-s)\, \hat{E}(p , s) = \hat{E}(p , t)$ d'où en appliquant la transformation de Fourier inverse

$$E(\hat{x} , t-s) \underset{(x)}{*} E(\hat{x} , s) = E(\hat{x} , t) \tag{13}$$

et finalement :

$$(E_\lambda^k * E_\lambda^h)(x,t) = E(x,t)e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{s^{h-1}}{\Gamma(h)}\, ds = E(x,t)e^{-\lambda t} \frac{t^{h+k-1}}{\Gamma(h+k)} \tag{14}$$

ce qui achève de démontrer la formule (11) .

Retour à l'étude du laplacien.
Ordre d'une distribution par rapport à L^2 .

Nous allons introduire une notion d'ordre d'une distribution différente de celle introduite dans le Tome 1 du Traité des distributions mais qui est plus maniable dans les questions où interviennent les fonctions de carré sommable.

Nous dirons donc, par définition, qu'une distribution T est, dans un ouvert Ω, d'ordre $\leq -m$ $(0 \leq m \leq +\infty)$ (par rapport à L^2), si localement dans Ω, ses dérivées d'ordre $\leq m$ sont dans L^2 ; et qu'elle est d'ordre $\leq m$ $(0 \leq m < +\infty)$ si elle est localement dans Ω somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions appartenant à L^2 . Si l'ordre de T est $\leq m$ (m entier positif ou négatif) mais qu'il n'est pas $\leq m - 1$, nous dirons que l'ordre de T est exactement m .

D'après le théorème de structure des distributions, toute distribution est dans un ouvert borné d'ordre fini positif, ou négatif. Pour qu'elle soit une fonction de classe C^∞, il faut et il suffit que son ordre soit $-\infty$. D'autre part, il est clair sur la définition que les sous-ensembles de $\mathcal{D}'$ formés par les distributions d'ordre $\leq m$ forment une suite croissante de sous-espaces et que si T est d'ordre $\leq m$, D^pT est d'ordre $\leq m + |p|$. Nous allons démontrer une réciproque de ce résultat dans le cas du laplacien en énonçant le théorème :

THÉORÈME : Si T est une distribution d'ordre $\leq m$ dans un ouvert Ω, T est une distribution d'ordre $\leq m - 2$ dans Ω .

Pour $m = 0$, ce théorème signifie que si localement $\Delta T \in L^2$, les dérivées partielles de T d'ordre ≤ 2 sont aussi localement dans L^2 .

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

A) On suppose d'abord T à support compact, $f(p)$ désignera alors sa transformée de Fourier qui est en tout cas une fonction continue.

(A_1) Pour que T à support compact soit d'ordre $\leq m$, il faut et il suffit que $f(p)/|p|^m$ soit une fonction de carré sommable pour $|p| \geq 1$

Soit pour commencer $m = -m' \leq 0$, autrement dit, dire que T est d'ordre $\leq m$ signifie que T est une fonction à support compact dont les dérivées d'ordre $\leq m'$ sont dans L^2 . Mais on sait que la transformation de Fourier est un isomorphisme de $L^2(x)$ sur $L^2(p)$ et que si P est un polynôme à n variables, $P(\frac{\partial}{\partial x})\, T$ a pour transformée de Fourier $P(2\pi i p) f(p)$; donc, dire que T est d'ordre $\leq m$ équivaut à dire que le produit de f par un polynôme de degré $\leq m'$ est dans L^2 dans tout l'espace ou même simplement pour $|p| \geq 1$ puisque f est continue. On en déduit que chaque $p_i^{m'} f$ donc $\sum |p_i|^{m'} f$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$, mais pour $|p| \geq 1$ le rapport $|p|^{m'} / \sum |p_i|^{m'}$ est borné donc $|p|^{m'} f$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$. En sens inverse, si $|p|^{m'} f$ est de carré sommable pour $|p| \geq 1$, il en est de même du produit de f par un polynôme de degré $\leq m'$, car le rapport d'un tel polynôme à $|p|^{m'}$ est borné pour $|p| \geq 1$.

Supposons maintenant $m \geq 0$, donc T d'ordre $\leq m$ signifie que T est de la forme $T = \sum_{|k| \leq m} D^k T_k$ où les T_k sont localement dans L^2. Mais on peut choisir les T_k à support compact ; en effet puisque T est à support compact il existe une fonction α de classe C^∞ à support compact égale à 1 sur un voisinage du support de T, donc $T = \alpha T = \sum_{|k| \leq m} \alpha(D^k T_k)$. Or la formule de Leibniz montre que $D^k(\alpha T_k)$ est somme de termes $D^q \alpha\, D^r T_k$ avec $|q| + |r| = k$; mais en vertu du choix de α, tous ces termes sont nuls sauf $\alpha D^k T_k$, donc $T = \sum D^k (\alpha T_k)$, $\alpha T_k \in \mathcal{E}'$ et $\in L^2$. Si f_k est la transformée de Fourier de αT_k on a donc $f = \sum_{|k| \leq m} (2 i \pi p)^k f_k$ et les f_k sont dans L^2 donc $f/|p|^m$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$. Réciproquement si $f/|p|^m$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$, comme f est continue, $g = f/(1 + \sum |p_i|^m)$ est dans L^2 dans tout l'espace des p, de même que $\frac{|p_i|^m}{(p_i)^m}\, g = g_i$; et par suite $f = g + \sum_i p_i^m g_i$, donc par Fourier T est somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de L^2. Ceci achève la démonstration de notre assertion (A_1).

(A_2) <u>Si</u> T <u>est à support compact et</u> ΔT <u>est d'ordre</u> $\leq m$, <u>alors</u> T <u>est d'ordre</u> $\leq m - 2$.

En effet la transformée de Fourier de ΔT est $-4\pi^2 |p|^2 f$; d'après (A_1) $|p|^2 f/|p|^m$ est donc dans L^2 pour $|p| \geq 1$, donc $f/|p|^{m-2}$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$, ce qui toujours d'après (A_1) prouve que T est d'ordre $\leq m - 2$.

B) <u>Si</u> ΔT <u>est à support compact et d'ordre</u> $\leq m$, <u>alors</u> T <u>est d'ordre</u> $\leq m-2$.

La définition de l'ordre d'une distribution est locale, nous avons donc à démontrer que pour tout ouvert borné U , T est d'ordre $\leq m-2$ sur U . Introduisons donc une fonction α de classe C^∞ à support compact égale à 1 identiquement sur U et sur un voisinage du support (compact) de ΔT . $\Delta(\alpha T)$ est la somme de $\alpha . \Delta T$ et de termes qui font intervenir des dérivées de α donc sont nuls dans un voisinage du support ΔT . Mais si ΔT est nulle dans un ouvert, T est dans cet ouvert une fonction harmonique donc analytique et donc les termes restants de $\Delta(\alpha T)$ sont de classe C^∞ dans tout l'espace. Mais ΔT est d'ordre $\leq m$ et α de classe C^∞ , donc $\alpha \Delta T$ est d'ordre $\leq m$. Finalement $\Delta(\alpha T)$ est d'ordre $\leq m$, mais comme αT est à support compact, on peut appliquer le résultat du A_2 et conclure que αT est d'ordre $\leq m-2$, donc que T égale à αT dans U est, dans cet ouvert, d'ordre $\leq m-2$.

C) <u>Cas général</u> : On suppose que ΔT est d'ordre $\leq m$ dans un ouvert Ω On prend alors un ouvert borné ω , $\bar{\omega}$ contenu dans Ω , puis une fonction α de classe C^∞ à support compact égale à 1 sur ω . Si l'on pose $S_1 = \alpha \Delta T$ et $S_2 = (1-\alpha) \Delta T$, S_1 est à support compact, S_2 est nulle dans ω et $\Delta T = S_1 + S_2$. Appelons T_1 le potentiel de S_1 , c'est donc une distribution telle que $\Delta T_1 = S_1$, puis posons $T = T_1 + T_2$. Mais ΔT est d'ordre $\leq m$, donc il en est de même de $S_1 = \alpha . \Delta T$, et par suite en appliquant le résultat de B) ce qui est licite puisque $S_1 = \Delta T_1$ est à support compact, on voit que T_1 est d'ordre $\leq m-2$. Par ailleurs on a $\Delta T_2 = S_2$ et S_2 est nulle dans ω , donc T_2 est une fonction harmonique donc analytique dans ω , et T qui est somme de T_1 et T_2 est donc bien d'ordre $\leq m-2$ dans ω , donc dans Ω puisque ω est quelconque et que la notion d'ordre est locale.

C.Q.F.D.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Si</u> D_1 <u>est un opérateur différentiel d'ordre</u> ≤ 1 <u>à coefficients indéfiniment différentiables, l'opérateur</u> $\Delta + D_1$ <u>est elliptique</u>.

Soit Ω un ouvert borné et supposons que $(\Delta + D_1) T$ soit une fonction de classe C^∞ dans Ω , autrement dit $\alpha = (\Delta + D_1) T$ est d'ordre $\leq m$ pour tout entier m (de signe quelconque) dans Ω . Mais alors si T est exactement d'ordre n dans Ω , $D_1 T$ est d'ordre

$\leq n+1$ dans Ω et $\Delta T = \alpha - D_1 T$ est aussi d'ordre $\leq n+1$ dans Ω ; donc T est d'ordre $\leq n-1$ dans Ω d'après le théorème. Cela signifie que $n \leq n-1$, donc, en se rappelant que $-\infty \leq n < +\infty$, on a $n = -\infty$, et $T \in \mathcal{E}(\Omega)$, ce qui prouve bien que $\Delta + D_1$ est elliptique.

Plus généralement, <u>si</u> $(\Delta + D_1)\,T$ <u>est d'ordre</u> $\leq m$ <u>dans</u> Ω , T <u>est d'ordre</u> $\leq m-2$.

Soit en effet n l'ordre exact de T dans Ω . Alors l'ordre de $D_1 T$ est $\leq n+1$, donc l'ordre de $\Delta T = (\Delta + D_1)\,T - D_1 T$ est $\leq \sup(m\ ,\ n+1)$; alors d'après le théorème, l'ordre de T est $\leq \sup(m-2\ ,\ n-1)$. On a donc $n \leq \sup(m-2\ ,\ n-1)$ donc $n \leq m-2$, cqfd .

<u>REMARQUE</u> : La notion d'ordre au sens de L^2 a des propriétés bien plus simples que la notion d'ordre introduite dans le tome I des Distributions. Signalons en particulier que :

1°) Si les dérivées d'ordre $\leq k$ de T sont d'ordre $\leq m$, T est d'ordre $\leq m-k$. Il suffit de le montrer pour $k = 1$. Or, si les dérivées d'ordre ≤ 1 de T sont d'ordre $\leq m$, ΔT est d'ordre $\leq m+1$, donc T est bien d'ordre $\leq m-1$.

2°) Soit $\mathcal{L}^m$ l'espace des distribubions d'ordre $\leq m$, $\mathcal{K}^m$ l'espace des distributions à support compact d'ordre $\leq m$.(1)

On voit sans peine qu'on peut mettre sur $\mathcal{L}^m$ une topologie (de caractère local sur R^n) et sur $\mathcal{K}^m$ une topologie limite inductive, qui en font des espaces réflexifs, $\mathcal{L}^m$ Fréchets, $\mathcal{K}^m$ type $\mathcal{LF}$, le dual de $\mathcal{K}^m$ étant $\mathcal{L}^{-m}$.

---

(1) $\mathcal{K}$ est l'initiale de compact ; $\mathcal{L}$ est l'initiale de local, l'appartenance à $\mathcal{L}^m$ étant une propriété de caractère local sur R^n .