L. Schwartz

Opérateurs invariants par rotations. Fonctions métaharmoniques

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 9, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 9

OPÉRATEURS INVARIANTS PAR ROTATIONS. FONCTIONS MÉTAHARMONIQUES

-:-:-:-

Opérateurs différentiels invariants par rotation.

Nous gardons les notations de l'exposé 7 .

Soit D un opérateur différentiel invariant par tous les déplacements de R^n ; $D = P(\frac{\partial}{\partial x})$ où P est un polynôme à n variables à coefficients complexes, puisque D est invariant par translation. D'autre part P est invariant par rotation, donc $P(X) = Q(\sum X_i^2)$, et par suite $D = Q(\Delta)$, $Q(z)$ étant un polynôme à une variable z et Δ étant le laplacien.

Ecrivons le développement de $\frac{1}{Q(z)}$ en éléments simples

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum c_{\lambda,k} (z+\lambda)^{-k} \tag{1}$$

Si $c_{\lambda,k} \neq 0$, Q est divisible par $(z+\lambda)^k$, soit $Q(z) = Q_{\lambda,k}(z)(z+\lambda)^k$, et de l'égalité (1) on déduit en multipliant par Q

$$1 = \sum c_{\lambda,k} Q_{\lambda,k} (z) \text{ , donc } I = \sum c_{\lambda,k} Q_{\lambda,k} (\Delta) . \tag{2}$$

Donc si U est une distribution quelconque, et si on pose

$$U_{\lambda,k} = Q_{\lambda,k} (\Delta) U \text{ , on a}$$

$$Q (\Delta) U = (\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k} \qquad , \qquad U = \sum c_{\lambda,k} U_{\lambda,k} \tag{3}$$

Il en résulte que si U est une solution élémentaire de $Q (\Delta)$, chaque $U_{\lambda,k}$ est solution élémentaire de $(\Delta+\lambda)^k$; et réciproquement si, pour toute valeur de λ , k, $U_{\lambda,k}$ est une solution élémentaire quelconque de $(\Delta+\lambda)^k$, alors la distribution U donnée par la dernière formule (3) vérifie

$$Q(\Delta)U = \sum c_{\lambda,k} Q(\Delta)U_{\lambda,k} = \sum c_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(\Delta)(\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k} = \sum c_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(\Delta)\delta = \delta .$$

La recherche des solutions élémentaires de D est donc ramenée à celle des solutions élémentaires de $(\Delta+\lambda)^k$. Soit U une solution élémentaire de $\Delta+\lambda$ qui dépende (comme distribution en x) différentiablement du paramètre λ . Posons

(4) $$U_{\lambda,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{k-1} U_\lambda \qquad k \geqslant 1$$

On va montrer par récurrence sur k que $U_{\lambda,k}$ est solution élémentaire de $(\Delta+\lambda)^k$. Or, pour $k = 1$, $U_{\lambda,1} = U_\lambda$; c'est donc bien le cas. Puis, si $(\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k} = \delta$, dérivant par rapport à λ et appliquant l'opérateur $\Delta+\lambda$, il vient

(5) $$k\,(\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k} + (\Delta+\lambda)^{k+1} (-k\, U_{\lambda,k+1}) = 0$$

d'où en tenant compte de l'hypothèse de récurrence

(6) $$(\Delta+\lambda)^{k+1} U_{\lambda,k+1} = \delta$$

Or la formule (31) de l'exposé 8 fournit une solution élémentaire de $\Delta+\lambda$, à savoir

(7) $$U_\lambda(x) = \frac{\lambda^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}} \; \frac{1}{r^{\frac{n}{2}-1}} \; N_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad r = |x|$$

Mais, quelle que soit la parité de n, la fonction de Neumann peut s'écrire

$$N_{\frac{n}{2}-1}(u) = \frac{1}{u^{\frac{n}{2}-1}}\, A(u) + \log u \;\, B(u)$$

où A et B sont des fonctions entières. On en déduit

(8) $$U_\lambda(x) = \frac{1}{r^{n-2}}\, A_1(\sqrt{\lambda}\, r) + \frac{\lambda^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}-1}} \log(\sqrt{\lambda}\, r)\; B_1(\sqrt{\lambda}\, r)$$

ce qui prouve que U_λ dépend même <u>analytiquement</u> de λ dans l'espace des distributions, <u>pour</u> $\lambda \neq 0$. De plus, ses dérivées partielles en λ sont les fonctions égales, pour $r > 0$, aux dérivées usuelles.

$U_{\lambda,k}$ s'obtient en dérivant $(k-1)$ fois U_λ par rapport à λ. Ce faisant il est bon de rappeler la formule de récurrence des fonctions de Neumann

(9) $$N'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} N_\nu(x) + N_{\nu-1}(x)$$

Ou encore, ce qui est équivalent

(10) $$\frac{d}{dx}\left(N_\nu(x)\, x^\nu\right) = N_{\nu-1}(x)\, x^\nu$$

La formule suivante s'en déduit immédiatement par récurrence en tenant compte de $\frac{d}{d\lambda} f(\sqrt{\lambda}\, r) = \frac{r}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f'(\sqrt{\lambda}\, r)$ (avec $f(u) = u^\nu N_\nu(u)$) :

$$(11) \qquad U_{\lambda,k}(x) = \frac{(-1)^{k-1}\lambda^{\frac{n}{4}-\frac{k}{2}}}{(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,2^{\frac{n}{2}+k}}\ \frac{1}{r^{\frac{n}{2}-k}}\ N_{\frac{n}{2}-k}(\sqrt{\lambda}\ r)$$

Ceci n'est valable que si $\lambda \neq 0$. Dans le cas $\lambda = 0$, les solutions élémentaires de Δ^k sont calculées dans le tome 1 des Distributions (page 47).

$$(12) \qquad \Delta^k(r^{2k-n}) = (2k-n)(2k-2-n)\ldots(4-n)(2-n)\ 2^{k-1}(k-1)!\ \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\ \delta$$

si $2k-n < 0$, ou si $2k-n \geqslant 0$ et n impair ;

$$(13) \qquad \Delta^k(r^{2k-n}\log r) = (2k-n)\ldots \hat{0} \ldots(2-n)2^{k-1}(k-1)!\ \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\ \delta$$

(le facteur 0 est omis) si $2k-n \geqslant 0$ et n pair.

<u>Fonctions métaharmoniques</u>

Une fonction U solution de l'équation $(\Delta+\lambda)\,U = 0$ s'appelle λ-métaharmonique. D'après la formule (31) de l'exposé 8, toute fonction métaharmonique invariante par rotation est proportionnelle à la fonction

$$(14) \qquad \frac{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{r^{\frac{n}{2}-1}\,\lambda^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}\ J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}\ r) = \sum_{m\geqslant 0} (-1)^m\lambda^m r^{2m}\ \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4^m m!\ \Gamma(m+\frac{n}{2})} = j(r)$$

qui prend la valeur 1 à l'origine (en vertu du choix du coefficient).

Soit U métaharmonique, alors comme $(\Delta\, U)^{\natural} = \Delta\, U^{\natural}$, $U^{\natural}$ est aussi métaharmonique et invariante par rotation et $U^{\natural}(0) = U(0)$, on a donc $U^{\natural}(x) = j(|x|)\ U(0)$ autrement dit si $\bar{U}(R)$ est la valeur moyenne de U sur la sphère de rayon R centrée en 0 , on a

$$(15) \qquad \bar{U}(R) = U(0)\ j(R)$$

<u>Réciproquement</u>, supposons que U soit continue et vérifie l'équation (15) quels que soient 0 et R . Cette équation s'écrit $U * (\mu(R) - j(R)\delta) = 0$ si $\mu(R)$ est la masse $+1$ répartie de manière homogène sur la sphère de rayon R . On va démontrer que toute distribution U vérifiant cette équation de convolution quel que soit R , est λ-métaharmonique. Cherchons le développement asymptotique de $\mu(R)$ par rapport au paramètre R tendant vers 0 .

Si δ_R est la masse $+1$ au point $(R\,,\,0\,,\,0\,,\,\ldots\,,\,0)$ on a

$\mu(R) = \hat{\delta}_R^{\natural}$ et $(D_1 = \frac{\partial}{dx_1})$

(16) $$\delta_R \simeq \sum_{m \geqslant 0} (-1)^m \frac{R^m}{m!} (D_1)^m \delta$$

d'après la formule de Taylor ($\simeq$ indique qu'il s'agit d'un développement asymptotique non convergent) . Appliquant l'opération $\natural$ terme à terme (ce qui est licite car elle est continue) on trouve

(17) $$\mu(R) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{(-1)^m}{m!} R^m (D_1^m \delta)^\natural$$

Or $(D_1^m \delta)^\natural$ est nulle en dehors de l'origine, homogène d'ordre $-m$ (en tant que courant de degré n) et invariante par rotation, donc $= 0$ si m est impair et égale à $a_p \Delta^p \delta$ si $m = 2p$. De plus

(18) $$\langle (D_1^{2p} \delta)^\natural, \ r^{2p} \rangle = \langle D_1^{2p} \delta, \ r^{2p} \rangle = (2p)!$$

et d'autre part $\Delta (r^{2p}) = 2p(2p+n-2)\, r^{2p-2}$ d'où

(19) $$\langle \Delta^p \delta, \ r^{2p} \rangle = 2^{2p}\, p!\ \Gamma(p+\tfrac{n}{2}) / \Gamma(\tfrac{n}{2})$$

Finalement

(20) $$\mu(R) \simeq \sum_{p \geqslant 0} \frac{\Gamma(n/2)}{2^{2p}\, p!\ \Gamma(p+\frac{n}{2})} R^{2p} \Delta^p \delta \simeq j(iR\, \Delta^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}})\ \delta$$

En négligeant les termes d'ordre $\geqslant 3$ on a donc

(21) $$\mu(R) - j(R)\delta \simeq \frac{R^2}{2n} (\Delta \delta + \lambda \delta)$$

c'est-à-dire $0 = \frac{1}{R^2} (\mu(R) * U - j(R)\, U) \xrightarrow[R \to 0]{} \frac{1}{2n} (\Delta + \lambda)\, U$

<u>Donc l'équation (15) caractérise les fonctions λ-métaharmoniques</u>.

<u>Propriétés des fonctions métaharmoniques</u>

Elles se déduisent de l'équation (15)

1) $\lambda > 0$ la fonction $j(R)$ est oscillante et décroit pour les petites valeurs de R . D'autre part $\sqrt{R^{n-1}}\ j(R)$ est asymptotique à un polynôme trigonométrique lorsque $R \longrightarrow \infty$. En conséquence

a) si $a_{n,\nu}$ est la suite des zéros de $J_{\frac{n}{2}-1}$ alors pour $R = \frac{a_{n,\nu}}{\sqrt{\lambda}}$, $\overline{U}(R) = 0$; donc U a <u>une valeur moyenne nulle sur toute sphère de rayon</u> $\frac{a_{n,\nu}}{\sqrt{\lambda}}$; en particulier sur toute sphère ayant un tel rayon, elle doit (si elle est réelle) changer de signe , d'où

<u>Si</u> $U \geqslant 0$ <u>est métaharmonique, elle est identiquement nulle</u>

b) si $U(0) > 0$,comme $j(R)$ décroit pour R assez petit, $U(0)$ est plus grand que $\overline{U}(R)$ pour R petit donc U <u>ne peut avoir un minimum local</u>

<u>en un point où elle est</u> > 0 . De même elle n'a pas de maximum local en un point où elle est < 0 . Et <u>si</u> $U(0) = 0$ $\bar{U}(R) = 0$ pour tout R , donc U ne peut avoir <u>aucun extremum au point</u> 0 .

c) d'après la valeur asymptotique de $j(R)$, si $U \not\equiv 0$, on ne peut avoir $U(x) = o(|x|^{(1-n)/2})$. Une majoration dans un sens suffit même.

2) $\lambda < 0$ $j(R)$ est strictement croissante donc constamment positive et l'on a pour $R \longrightarrow \infty$ $j(R) \simeq \dfrac{e^{\sqrt{\lambda}\, R}}{R^{(n-1)/2}}$. En conséquence

a) $\bar{U}(R)$ est une fonction strictement croissante de R si $U(0) > 0$ et la valeur moyenne de U sur la sphère de rayon R centrée en 0 augmente avec R .

b) donc, si $U(0) > 0$, U ne peut avoir de maximum en 0 , et de même pas de minimum en un point où elle est négative. Si $U(0) = 0$, il n'y a pas d'extremum à l'origine.

c) si $U \not\equiv 0$ on ne peut avoir $U(x) = o\left(\dfrac{e^{\sqrt{\lambda}\,|x|}}{|x|^{(n-1)/2}}\right)$ et par suite il existe des régions dans lesquelles U croit exponentiellement au moins (mais $U > 0$ est possible).

3) $\lambda = 0$ on retrouve les propriétés bien connues des fonctions harmoniques.

<u>Remarques</u> : 1) pour $\lambda = 0$, on a $j(R) = 1$ et l'équation (15) n'est autre que le <u>théorème de la moyenne des fonctions harmoniques</u>, théorème qui repose donc sur le fait qu'il n'y a pas de fonction harmonique non constante invariante par rotation.

2) Il n'y a aucune chance pour que les propriétés des fonctions λ-métaharmoniques pour $\lambda > 0$ s'étendent aux fonctions pour lesquelles $\lambda < 0$, car $j(R)$ les met déjà toutes en défaut. Et vice-versa.