L. SCHWARTZ

Les opérateurs invariants par rotation, l'opérateur Δ

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A10_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 7

LES OPÉRATEURS INVARIANTS PAR ROTATION, L'OPÉRATEUR Δ.

(Exposé du 7.1.1955)

-:-:-:-

NOTATIONS : S_n désignera dans la suite la surface de la sphère de rayon 1 dans l'espace R^n, qu'on suppose rapporté à un système de coordonnées cartésiennes données une fois pour toutes : on note

$$x = (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \quad , \quad |x|^2 = \sum x_i^2 = r^2 \quad , \quad \Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$\varphi^{\natural}(x)$ désigne la moyenne d'une fonction φ sur la sphère de rayon $r = |x|$, dont l'élément de surface est noté dS :

$$\varphi^{\natural}(x) = \frac{1}{r^{n-1}.S_n} \int\cdots\int_{|\xi|=|x|=r} \varphi(\xi).dS$$

Sur cette formule il est clair que $\varphi^{\natural}(x)$ peut s'exprimer en fonction de r. On montrera tout à l'heure que $\Delta(\varphi^{\natural}) = (\Delta\varphi)^{\natural}$

ρ désigne une rotation de centre l'origine, et $O(n)$ désigne le groupe de Lie compact de toutes ces rotations, $d\rho$ désigne la mesure de Haar invariante de $O(n)$, normalisée, c'est-à-dire telle que $\int_{\rho \in O(n)} d\rho = 1$.

$\rho.f$ désigne la fonction $x \to f(\rho^{-1}.x)$

UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE L'OPÉRATEUR Δ.

Nous allons montrer que, pour $n \neq 2$, $\frac{-1}{(n-2)\,S_n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}}$ est une solution élémentaire de Δ, la seule d'ailleurs (à une constante près) qui soit "invariante" par rotation (cette notion est précisée plus loin). Pour calculer $\Delta(\frac{1}{r^{n-2}})$ au sens des distributions on revient à la définition. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, alors :

$$\langle \Delta(\frac{1}{r^{n-2}}) , \varphi \rangle = \langle \frac{1}{r^{n-2}} , \Delta\varphi \rangle = \int\cdots\int_{R_n} \frac{1}{r^{n-2}} . \Delta\varphi . dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^{n-2}} \cdot \int\cdots\int_{|x|=r} \Delta\varphi . dS = \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^{n-2}} \cdot (\Delta\varphi)^{\natural} . (r^{n-1}.S_n)$$

ou $$\langle \Delta (\frac{1}{r^{n-2}}) , \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} r \,.\, \Delta (\varphi^{\natural}) \,.\, dr$$

$\varphi^{\natural}$ est une fonction de r. Posons $r^2 = t$, $\varphi^{\natural}$ devient une fonction de t. Or soit ψ une fonction de r en posant $t = r^2$ et $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$, $\psi'' = \frac{d^2\psi}{dt^2}$, il vient $\frac{\partial^2\psi}{x_i^2} = 2 \,.\, \psi' + 4 \,.\, x_i^2 \psi''$ d'où $\Delta\psi = 2 \,.\, n \,.\, \psi' + 4 \,.\, r^2 \,.\, \psi''$ et en portant cette expression dans l'intégrale à calculer avec le changement de variable $t = r^2$, il vient :

$$\langle \Delta (\frac{1}{r^{n-2}}) , \varphi \rangle = \frac{S_n}{2} \int_0^{+\infty} (2\, n\, \varphi^{\natural\prime} + 4\, t\, \varphi^{\natural\prime\prime}) dt$$
$$= \frac{S_n}{2} \int_0^{+\infty} [(4\, t\, \varphi^{\natural\prime})' + (2n - 4)\, \varphi^{\natural\prime}] dt$$

ou $$\langle \Delta (\frac{1}{r^{n-2}}) , \varphi \rangle = - (n - 2)\, S_n \varphi(0) \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\Delta (\frac{1}{r^{n-2}}) = - (n - 2)\, S_n\, \delta \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour $n = 2$ un calcul analogue montrerait que $-\frac{1}{2\pi} \log (\frac{1}{r})$ est la solution élémentaire de Δ, d'où le

<u>THÉORÈME 1</u>.- Δ <u>est un opérateur analytique elliptique</u>.

<u>FONCTIONS ET DISTRIBUTIONS INVARIANTES PAR ROTATION</u>.

Soit f une fonction continue définie sur R^n. f est dite invariante par rotation si $\rho.f = f$ pour tout $\rho \in O(n)$, $f^{\natural}(x)$ pouvant s'exprimer en fonction de $r(x)$, qui est invariant par rotation, est invariante par rotation.

On peut définir une nouvelle moyenne de f, invariante par rotation, à savoir :

$$f_{\natural}(x) = \int_{\rho \in O(n)} f(\rho^{-1}.x).d\rho$$. L'invariance à gauche de la mesure de Haar entraîne que $\sigma \,.\, f_{\natural} = f_{\natural}$, et son invariance à droite entraîne que $(\sigma.f)_{\natural} = f_{\natural}$, pour tout $\sigma \in O(n)$; la première identité exprime l'invariance par rotation, $f_{\natural}$ étant invariante par rotation est constante sur la sphère de rayon r. On a donc $(f_{\natural})^{\natural} = (f_{\natural})$. $f^{\natural}$ étant invariante par rotation, on a : $(f^{\natural})_{\natural} = f^{\natural}$.

$$(f^{\natural})_{\natural}(x) = \int_{\rho \in O(n)} d\rho \,.\, \int \cdots \int_{|\xi|=|x|=r} f(\rho^{-1} \xi) \frac{dS}{S_n \,.\, r^{n-1}}$$

On peut permuter les intégrales car tous les champs d'intégration sont compacts et les fonctions continues. Donc :

$$(f^{\natural})_{\natural}(x) = \int\cdots\int_{|\xi|=|x|=r} \frac{dS}{S_n \cdot r^{n-1}} \cdot \int_{\rho\in O(n)} f(\rho^{-1}\xi)d\rho = (f_{\natural})^{\natural}$$

donc $f^{\natural} = f_{\natural}$; la deuxième notation est superflue.

$$\frac{1}{S_n \cdot |x|^{n-1}} \cdot \int_{|\xi|=|x|} f(\xi)d\xi = \int_{\rho\in O(n)} f(\rho^{-1} x)d\rho$$

On a remarqué que si f est invariante par rotation alors $f = f^{\natural}$. Si f est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, la fonction $f(\rho^{-1}x)$ définie sur $O(n) \times R^n$ est indéfiniment dérivable en ρ et x et lorsque ρ décrit $O(n)$, les supports des fonctions (en x) $f(\rho^{-1}x)$ restent dans une boule fixe. Les propriétés classiques de l'intégrale de Riemann assurent alors que $f^{\natural}(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, donc appartient à $\mathcal{D}$, et que l'application $f \to f^{\natural}$ est continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{D}^{\natural}$ le sous-espace formé des fonctions de $\mathcal{D}$ invariantes par rotation. Les propriétés énumérées ci-dessus signifient que l'application $\natural : f \to f^{\natural}$ est un projecteur de $\mathcal{D}_{R^n}$ sur $\mathcal{D}^{\natural}_{R^n}$.

$\mathcal{D}$ admet donc une décomposition topologique $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\natural} + \natural^{-1}(0)$, $\natural^{-1}(0)$ étant l'espace des fonctions de $\mathcal{D}$ dont la moyenne sphérique est nulle. Nous allons étendre ces résultats à l'espace des distributions.

<u>Effet d'une rotation sur une distribution</u>.

On désigne par $\rho.T$ la distribution définie par $\langle \rho.T , \varphi\rangle = \langle T , \rho^{-1}.\varphi\rangle$ pour toute φ t $\mathcal{D}_{R^n}$. <u>La distribution $\rho.T$ est dite la distribution obtenue à partir de T par la rotation ρ</u>.

<u>DÉFINITION 1</u>.- <u>On dit que la distribution T est invariante par rotation autour de l'origine si $\rho.T = T$ pour tout $\rho \in O(n)$</u>.

<u>EXEMPLES</u> : δ est une distribution invariante par rotation, de même $\frac{1}{r^{n-2}}$. Soit T quelconque, $(T \in \mathcal{D}'_{R^n})$.

On peut définir une moyenne invariante de T, à savoir $\int(\rho.T).d\rho = T^{\natural}$; cette expression a un sens car la fonction $\rho \to \rho.T$ à valeur dans $\mathcal{D}'_{R^n}$ est continue sur $O(n)$ qui est compact, et $\mathcal{D}'_{R^n}$ est complet, ce qui rend possible l'intégration. On peut encore définir $T^{\natural}$ par l'égalité suivante équivalente :

$$\langle T^{\natural}, \varphi\rangle = \langle T , \varphi^{\natural}\rangle \quad \text{où } \varphi \in \mathcal{D}_{R^n}$$

On a :

$$\langle \sigma.T^{\natural}, \varphi\rangle = \langle T^{\natural}, \sigma^{-1}.\varphi\rangle = \langle T , (\sigma^{-1}.\varphi)^{\natural}\rangle = \langle T , \varphi^{\natural}\rangle$$

donc l'invariance à droite de la mesure de Haar entraîne que $T^{\natural}$ est invariante par rotation. On a :

$$<(\rho.T)^{\natural}, \varphi> = <\rho.T, \varphi^{\natural}> = <T, \rho^{-1}.\varphi^{\natural}> = <T, \varphi^{\natural}>$$

l'invariance à gauche de la mesure de Haar entraîne que : $(\rho.T)^{\natural} = T^{\natural}$ pour tout $\rho \in O(n)$. Si T est invariante par rotation, on a $T = T^{\natural}$, donc $(T^{\natural})^{\natural} = T^{\natural}$.

L'application $\natural$, qui est linéaire et continue de $\mathcal{D}'_{R^n}$ dans $\mathcal{D}'_{R^n}$, est donc un projecteur de $\mathcal{D}'_{Rn}$ sur le sous-espace $\mathcal{D}'_{Rn}$ des distributions invariantes par rotation. On a donc une décomposition

$\mathcal{D}'_{Rn} = \mathcal{D}'^{\natural}_{Rn} + \natural^{-1}(0)$ où $\natural^{-1}(0)$ est l'espace des distributions dont la moyenne par rotation est nulle.

L'orthogonal de $\mathcal{D}'^{\natural}_{Rn}$ dans $\mathcal{D}_{Rn}$ est formé des φ , telles que $0 = <T^{\natural}, \varphi>$ pour toute $T \in \mathcal{D}'_{Rn}$ ou $0 = <T, \varphi^{\natural}>$ pour toute T , donc $\varphi^{\natural} = 0$. C'est donc $\natural^{-1}(0)$ $(0 \in \mathcal{D}_{Rn})$. De même l'orthogonal de $\mathcal{D}^{\natural}_{Rn}$ dans $\mathcal{D}'_{Rn}$ est $\natural^{-1}(0)$ $(0 \in \mathcal{D}'_{Rn})$. On peut donc énoncer la

<u>PROPOSITION</u> 1.- 1) $\mathcal{D}_{Rn}$ <u>admet une décomposition en somme directe topologique de deux sous-espaces fermés,</u> $\mathcal{D}^{\natural}_{Rn}$ <u>espace des éléments de</u> $\mathcal{D}_{Rn}$ <u>invariants par rotation, et</u> $\natural^{-1}(0)$ <u>espace des éléments de</u> $\mathcal{D}_{Rn}$ <u>de moyenne sphérique nulle</u>. $f \to f^{\natural}$ <u>est un projecteur continu de</u> $\mathcal{D}_{Rn}$ <u>sur</u> $\mathcal{D}^{\natural}_{Rn}$.

2) $\mathcal{D}'_{Rn}$ <u>admet une décomposition duale de la précédente</u>. $(\mathcal{D}^{\natural}_{Rn})'$, <u>dual de</u> $\mathcal{D}^{\natural}_{Rn}$ <u>est l'espace</u> $\mathcal{D}'^{\natural}_{Rn}$ <u>des distributions invariantes par rotation, et l'application</u> $T \to T^{\natural}$ <u>transposée de l'application</u> $(f \to f^{\natural})$ <u>est un projecteur de</u> $\mathcal{D}'_{Rn}$ <u>sur</u> $\mathcal{D}'^{\natural}_{Rn}$.

Nous allons montrer qu'on peut identifier l'espace des distributions invariantes par rotation dans R^n et celui des distributions sur la demi-droite positive $R_+ : \{ t \mid t \geqslant 0 \}$. Pour cela il nous suffira de montrer que la correspondance $f(\hat{t}) \to f(\hat{r}^2)$ établit un isomorphisme topologique entre $\mathcal{D}^{\natural}_{Rn}$ et $\mathcal{D}_{R_+}$.

L'application $f(\hat{t}) \to f(\hat{r}^2)$ applique manifestement d'une façon biunivoque, linéaire et continue $\mathcal{D}_{R_+}$ dans $\mathcal{D}^{\natural}_{Rn}$. Montrons qu'elle est épijective.

Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}^{\natural}_{Rn}$, φ étant invariante par rotation et indéfiniment dérivable. C'est une fonction de la forme $\Psi(\sum_i x_i^2)$ ou Ψ est en tout cas continue.

D'autre part $\Psi(t) = \varphi(\sqrt{t}, 0, \ldots 0)$, et $\varphi(\hat{u}, 0, \ldots 0)$ est indéfiniment dérivable et paire. Pour voir que Ψ est indéfiniment dérivable, on appliquera le

<u>LEMME</u> : <u>Soit</u> $\theta(\hat{x})$ <u>une fonction indéfiniment dérivable et paire sur la droite, alors la fonction</u> $t \to \theta(\sqrt{t})$ <u>définie sur</u> R_+ <u>y est indéfiniment dérivable</u>.

<u>Démonstration</u> : Supposons que nous ayons démontré le lemme d'ordre m : si θ vérifie les conditions ci-dessus, alors $\theta(\sqrt{t})$ est m fois continuement différentiable. Nous en déduisons alors, comme suit, le lemme d'ordre $m+1$. Soit θ vérifiant les hypothèses du lemme. En dehors de l'origine $\frac{d}{dt}[\theta(\sqrt{t})] = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\theta'(\sqrt{t})$ ou θ' désigne la fonction $\frac{d}{dx}(\theta(x))$, indéfiniment dérivable et impaire. $\theta'(0) = 0$. Donc la fonction $\frac{\theta'(x)}{x}$ est indéfiniment dérivable sur l'axe réel (Distributions, tome 1, page 121), et paire. Elle vérifie donc les hypothèses du lemme d'ordre m, donc $\frac{\theta'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$ est m fois continuement différentiable sur R_+ donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{d^{m+1}}{d\,t^{m+1}}(\theta(\sqrt{t})) = \lim_{t \to 0} \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\theta'(\sqrt{t})\right)$$

existe et il est classique que c'est alors la dérivée de $\frac{d^m}{dt^m}(\theta(\sqrt{t}))$ à l'origine. Ce qui démontre le lemme d'ordre $m+1$. Or le lemme d'ordre zéro est vrai car il signifie que $\theta(\sqrt{t})$ est continue sur R_+. Donc la récurrence peut démarrer et le lemme est complètement démontré.

L'application $f(t) \to f(r^2)$ est donc bien épijective. Mais la récurrence précédente montre en même temps que si des $f_j(r^2)$ tendent vers zéro dans $\mathcal{D}^{\natural}_{R^n}$ alors il en est de même des $f_j(t)$ dans $\mathcal{D}_{R_+}$. On a donc bien défini ainsi un isomorphisme topologique entre ces deux espaces. Il induit par dualité un isomorphisme topologique entre $\mathcal{D}'^{\natural}_{R^n}$ et $\mathcal{D}'_{R_+}$ d'où la

<u>PROPOSITION 2.</u>- 1) <u>L'application</u> $f(t) \to f(r^2)$ <u>établit un isomorphisme topologique entre</u> $\mathcal{D}_{R+}$ <u>et</u> $\mathcal{D}_{R^n}$.

2) <u>L'application transposée de l'application précédente est un isomorphisme topologique entre</u> $\mathcal{D}'^{\natural}_{R^n}$ et $\mathcal{D}'_{R_+}$.

Soit $\tilde{T}$ l'image de $T \in \mathcal{D}'^{\natural}_{R^n}$ dans $\mathcal{D}_{R_+}$, définie par l'application canonique de la proposition 2. $\tilde{T}$ vérifie l'identtité $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T_x, \varphi(r^2) \rangle$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_{R_+}$.

Calculons explicitement quelques transformées.

<u>Mesure de Dirac</u>. Soit $\delta(\hat{x})$ la mesure de Dirac dans R^n, $\tilde{\delta}$ son image.

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta(x), \varphi(r^2) \rangle = \varphi(0)$$

donc $\tilde{\delta} = \delta(t)$, mesure de Dirac sur R_+.

Transformée de $f(r^2)$.

Soit $f(\hat{t})$ une fonction sur R_+ , telle que $f(\hat{r}^2)$ soit localement sommable sur R^n . Calculons l'image T de $f(\hat{r}^2)$ (considérée comme distribution sur R^n).

$$\langle T , \varphi \rangle = \langle f(r^2), \varphi(r^2) \rangle = \iint\cdots\int f(r^2)\,\varphi(r^2)\,dx$$

$$= S_n \int_0^{+\infty} f(r^2)\,\varphi(r^2)\,r^{n-1}\,dr = \frac{S_n}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,t^{\frac{n-2}{2}}\,dt$$

$$= \langle \frac{S_n}{2}\, t^{\frac{n-2}{2}}\, f(t), \varphi(t) \rangle$$

donc l'image de $f(\hat{r}^2)$ est, non pas $f(\hat{t})$, comme ce serait le cas si on considérait f comme une fonction sur R^n , mais

$$\frac{S_n}{2}\,\hat{t}^{\frac{n-2}{2}}\, f(\hat{t}) \quad .$$

Il en résulte que si $f(\hat{t})$ est maintenant une fonction localement sommable sur R_+ , considérée comme distribution sur R_+ , son image dans $\mathcal{D}'^{\natural}_{R^n}$ est $\frac{2}{S_n}\frac{1}{\hat{r}^{n-2}} f(\hat{r}^2)$. En particulier :

$$1 \in \mathcal{D}'^{\natural}_{R^n} \to \frac{S_n}{2}\,\hat{t}^{\frac{n-2}{2}} \in \mathcal{D}'_{R_+} \quad \text{et} \quad \frac{2}{S_n}\frac{1}{\hat{r}^{n-2}} \in \mathcal{D}'^{\natural}_{R^n} \to 1 \in \mathcal{D}'_{R_+} \quad .$$