L. SCHWARTZ

Le produit tensoriel $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ comme espace d'applications linéaire

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 8, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Année 1953/1954

-:-:-:-

20 janvier 1954

Exposé n° 8

LE PRODUIT TENSORIEL $E \hat{\hat{\otimes}} F$ COMME ESPACE D'APPLICATIONS LINÉAIRE.

L'ESPACE $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau ; E)$.

On sait qu'il y a un isomorphisme algébrique entre l'espace $\mathcal{B}(E'_\sigma , F'_\sigma)$ des formes bilinéaires séparément faiblement continues sur $E' \times F'$, et l'espace $\mathcal{L}(F'_\sigma ; E_\sigma)$ des applications linéaires faiblement continues de F' dans E (cet isomorphisme met en correspondance la forme bilinéaire $(x',y') \to \langle x', \Phi(y') \rangle$ et l'application linéaire Φ de F' dans E). Toute application linéaire continue de F'_σ dans E_σ est continue de F'_τ dans E_τ, donc a fortiori de F'_τ dans E muni de sa topologie initiale, moins fine que τ ; réciproquement toute application linéaire continue de F'_τ dans E est continue pour les topomogies affaiblies, donc de F'_σ dans E_σ. On peut donc remplacer $\mathcal{L}(F'_\sigma ; E_\sigma)$ par $\mathcal{L}(F'_\tau ; E)$.

La correspondance établie entre $\mathcal{B}(E'_\sigma , F'_\sigma)$ et $\mathcal{L}(F'_\tau ; E)$ transporte la topologie $\mathcal{B}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$ de la convergence uniforme sur les produits $A' \times B'$ de $E' \times F$, A' (resp. B') partie équicontinue de E' (resp F'), sur la topologie $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau ; E)$ de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F' (parce que la topologie de E n'est autre que la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'). Le fait que la topologie ε soit une topologie d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(F'_\tau ; E)$ vient de ce que toute partie équicontinue de F' est fortement bornée donc τ-bornée (sur un dual F', la topologie forte est plus fine que τ). Donc :

PROPOSITION 1 .

$$\mathcal{B}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau ; E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_\tau ; F) .$$

PROPOSITION 2 .

Les espaces précédents sont complets si E et F sont complets.

Soit en effet $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{B}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$. Pour $x' \in E'$, $y' \in F'$ fixés, il donne un filtre de Cauchy sur le corps des scalaires, donc convergent vers un scalaire, soit $B_0(x', y')$. B_0 est évidemment une forme bilinéaire sur $E' \times F'$. Montrons qu'elle est séparément faiblement continue. Fixons y', il faut montrer que $x' \longrightarrow B_0(x' ; y')$ est faiblement continue. Mais pour $B \in \mathcal{L}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$, on a $B(x',y') = \langle x' , \Phi(y') \rangle$; $\Phi \in \mathcal{L}(F'_\sigma ; E_\sigma)$. Pour y' fixé, l'image de $\mathcal{F}$ par $\Phi \longrightarrow \Phi(y')$ est un filtre de Cauchy dans E, donc, E étant complet, $\Phi(y')$ converge suivant $\mathcal{F}$ vers $\Phi_0(y') \in E$. Alors $B_0(x', y') = \langle x', \Phi_0(y') \rangle$ donc B_0 est bien faiblement continue en x', pour y' fixé. Le même raisonnement appliqué à ${}^t\Phi$, utilisant le fait que F est complet, montre la continuité séparée en y' ; donc $B_0 \in \mathcal{L}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$. Comme enfin B converge vers B_0 uniformément sur tout produit de parties équicontinues de E' et F', $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$ est bien complet.

PROPOSITION 3 .

Si E et F sont complets, $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est un sous-espace vectoriel topologique des espaces isomorphes de la proposition 1 .

Nous avons vu (exposé n° 7) que $E \otimes_\varepsilon F$ est un sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$. Son interprétation comme sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau ; E)$ est la suivante: à tout élément $\sum_\nu x_\nu \otimes y_\nu$ de $E \otimes F$, on fait correspondre l'application linéaire Φ : $y' \rightarrow \sum_\nu \langle y', y_\nu \rangle x_\nu$ de F' dans E. Cette application est faiblement continue (et même continue de F'_σ dans E muni de sa topologie initiale) et de rang fini. Réciproquement, soit Φ une application linéaire faiblement continue de rang fini de F' dans E. $\Phi(F')$ a une dimension finie, soit (x_ν) une base de ce sous-espace ; on a $\Phi(y') = \sum_\nu \Phi_\nu(y') x_\nu$, avec $\Phi_\nu(y') = \langle x'_\nu , \Phi(y') \rangle$, (x'_ν) étant un système biorthogonal au système (x_ν) ; comme Φ est faiblement continue, Φ_ν est une forme linéaire faiblement continue sur F', donc il existe $y_\nu = {}^t\Phi(x'_\nu) \in F$ tel que $\Phi_\nu(y') = \langle y_\nu , y' \rangle$, alors Φ est définie par $\sum_\nu x_\nu \otimes y_\nu \in E \otimes F$.

Donc $E \otimes_\varepsilon F$ est le sous-espace topologique de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau ; E)$ constitué par les applications linéaires faiblement continues de rang fini ; comme $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau ; E)$ est complet si E et F sont complets, $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est bien un sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau ; E)$.

UN NOUVEL ESPACE D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

PROPOSITION 4 .

Soit Φ une application linéaire faiblement continue de F' dans E, ${}^t\Phi$ sa transposée, application linéaire faiblement continue de E' dans F. Les 8 propriétés suivantes sont équivalentes :

-a) L'image par Φ de toute partie équicontinue de F' est relativement compacte dans E ;

-a') L'image par ${}^t\overline{\Phi}$ de toute partie équicontinue de E' est relativement compacte dans F ;

-b) Restreinte à une partie équicontinue de F', $\overline{\Phi}$ est continue pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E ;

-b') Restreinte à une partie équicontinue de E', ${}^t\overline{\Phi}$ est continue pour la topologie faible de E' et la topologie initiale de F ;

-c) $\overline{\Phi}$ est continue de F'_c (F' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes de F) dans E ;

-c') ${}^t\overline{\Phi}$ est continue de E'_c dans F ;

-d) La forme bilinéaire B : $(x', y') \rightarrow \langle x', \overline{\Phi}(y')\rangle = \langle {}^t\overline{\Phi}(x'), y'\rangle$ est continue sur tout produit de parties équicontinues de E' et F' muni du produit des topologies faibles ;

-e) La forme bilinéaire précédente est hypocontinue sur $E'_c \times F'_c$, relativement aux parties équicontinues de E' et F'.

DÉMONSTRATION.

Sur une partie relativement compacte de E, topologie initiale et topologie faible sont identiques ; donc si l'image par $\overline{\Phi}$ d'une partie de F' est relativement compacte dans E, comme $\overline{\Phi}$ est faiblement continue, elle est continue sur la partie considérée de F' pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E ; donc $a \rightarrow b$. Réciproquement, si $\overline{\Phi}$ est continue sur toute partie équicontinue de F' pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E, l'image par $\overline{\Phi}$ de toute partie équicontinue faiblement compacte de F' est compacte dans E ; comme l'adhérence faible de toute partie équicontinue de F' est faiblement compacte, l'image par $\overline{\Phi}$ de toute partie équicontinue de F' est relativement compacte dans E, et $b \rightarrow a$. Donc $a \longleftrightarrow b$, et, par raison de symétrie, $a' \longleftrightarrow b'$.

Supposons b). Cela veut dire que, pour x' fixé, la forme bilinéaire B est faiblement continue en y', pour $y' \in B'$, partie équicontinue de F', et uniformément lorsque x' parcourt une partie équicontinue A' de E' ; mais elle est aussi, pour y' fixé, faiblement continue en x', elle est donc continue sur $A' \times B'$ muni du produit des topologies faibles, et $b \rightarrow d$. Réciproquement, supposons d). Une fonction continue de 2 variables est séparément continue par rapport à chacune d'elles, uniformément lorsque l'autre décrit un compact ; comme on peut toujours, ainsi qu'il a été vu précédemment, supposer A' faiblement compacte, d) entraîne que B soit continue en y' sur B' muni de la topologie faible, uniformément lorsque x' parcourt A', donc Φ est continue sur B' pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E, et $d \to b$. Finalement $a \leftrightarrow b \leftrightarrow d$, mais comme d) est symétrique relativement à $\bar{\Phi}$ et ${}^t\bar{\Phi}$, $a' \leftrightarrow b' \leftrightarrow d$, et $a \leftrightarrow a' \leftrightarrow b \leftrightarrow b' \leftrightarrow d$. Montrons maintenant que $a \to c'$. Soient G, G', H, H', 2 couples d'espace en dualité, Φ une application linéaire faiblement continue de G dans H, ${}^t\Phi$ sa transposée. Si A est une partie quelconque de G, on a $(\Phi(A))^0 = {}^t\Phi^{-1}(A^0)$; prenons $G = F'$, $H = E$, A = partie équicontinue convexe faiblement compacte de F'. Alors A^0 est un voisinage de 0 convexe équilibré fermé arbitraire de F ; ${}^t\bar{\Phi}^{-1}(A^0)$ son image réciproque par ${}^t\bar{\Phi}$, dans E'. Si on a a), $\bar{\Phi}(A)$ est partie convexe compacte de E, et $(\bar{\Phi}(A))^0$ un voisinage de 0 de E'_c ; ainsi l'image réciproque par ${}^t\bar{\Phi}$ de tout voisinage de 0 de F est un voisinage de 0 de E'_c, donc $a \to c'$. On en déduit naturellement que $a' \to c$, autrement dit les conditions équivalentes a, a', b, b', d entraînent c et c'.

Montrons alors que $c \to a$. Si $\bar{\Phi}$ est continue de F'_c dans E, l'image par $\bar{\Phi}$ de toute partie compacte de F'_c est compacte dans E. Mais d'après le théorème d'Ascoli toute partie équicontinue faiblement fermée de F' est compacte dans F'_c ; donc son image est compacte dans E et $c \to a$. Alors $a \leftrightarrow c$, de même $a' \leftrightarrow c'$, et les 7 conditions a, a', b, b', c, c', d sont équivalentes.

La condition e) exprime que d'une part si y' converge vers 0 dans F'_c, $\langle x', \bar{\Phi}(y') \rangle$ converge vers 0 uniformément lorsque x' reste équicontinu, autrement dit $\bar{\Phi}(y')$ converge vers 0 dans E, c'est-à-dire que $\bar{\Phi}$ est continue de F'_c dans E ; d'autre part que ${}^t\bar{\Phi}$ est continue de E'_c dans F. La condition e) n'est autre par conséquent que l'ensemble des conditions c et c', donc e est encore équivalente aux 7 autres conditions précédentes.

<u>REMARQUE.</u>

Si Φ est une application linéaire continue de F'_c dans E, elle est continue pour les topologies affaiblies. Mais F'_c a une topologie comprise entre F'_σ et F'_τ, donc le dual de F'_c est F, et par suite la topologie affaiblie de F'_c est F'_σ ; celle de E est E_σ, donc Φ est faiblement continue, et les 8 conditions précédentes sont vérifiées. Les applications $\bar{\Phi}$ qui vérifient ces conditions constituent donc l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c ; E)$ isomorphe à $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c ; F)$.

<u>PROPOSITION 5</u>.

<u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont complets,</u> $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c ; E)$ <u>est complet et</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>est un</u>

<u>sous-espace vectoriel topologique de</u> $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E) \subset \mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau\,;E)$.

Comme $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau\,;E)$ est alors complet, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c;E)$ est <u>fermé</u> dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau\,;E)$, propriété qui est vraie même si E et F ne sont pas complets. Si en effet $\Phi \in \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$ converge vers $\Phi_0 \in \mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau\,;E)$ les restrictions de Φ aux parties équicontinues de F' sont continues pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E (condition b) ; mais précisément les Φ convergent vers Φ_0 uniformément sur les parties équicontinues de F', et, comme une limite uniforme de fonctions continues est continue, Φ_0 vérifie aussi b) ; comme elle est dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau\,;E)$ elle est faiblement continue, donc $\Phi_0 \in \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$, qui est donc bien fermé.

Par ailleurs si $\Phi \in E \otimes F$, l'image par Φ d'une partie équicontinue de F' est bornée dans $\Phi(F')$ qui est de dimension finie, donc relativement compacte, de sorte que $E \otimes F \subset \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,,E)$. Alors si E et F sont complets $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est bien un sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$.

<u>Pour que dans ce cas</u> $E \hat{\hat{\otimes}} F$ <u>soit identique à</u> $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$, <u>il faut et il suffit que</u> $E \otimes F$ <u>soit dense dans</u> $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$, <u>condition qui ne suppose pas</u> E <u>et</u> F <u>complets, et qui est vérifiée dans tous les cas connus.</u>

<u>CAS DES ESPACES NORMÉS.</u>

Soient E et F normés. Alors $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau\,;E)$ est l'espace des applications linéaires <u>faiblement continues</u> de F' dans E , muni de la norme induite par $\mathcal{L}(F'\,;E)$. $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$ (condition a)) est le sous espace des <u>applications compactes</u> ou <u>complètement continues,</u> c'est-à-dire telles que l'image de la boule unité de F' soit relativement compacte dans E (auquel cas, comme on l'a vu, elle est compacte à cause de la condition b) , la boule unité de F' étant faiblement compacte). L'adhérence de $E \otimes_\varepsilon F$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$, qui est $E \hat{\hat{\otimes}} F$ si E et F sont des espaces de Banach, est donc le sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$ constitué des applications limites, pour la topologie ε définie par la norme de $\mathcal{L}(F'\,;E)$, des applications linéaires faiblement continues de rang fini. Bien noter que n'interviennent dans tous les cas que des applications faiblement continues. Dans tous les cas connus, $E \otimes F$ est dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$, et l'hypothèse suivant laquelle c'est toujours vrai a été émise par Banach.

<u>CAS OÙ E EST UN DUAL.</u>

Nous laissons au lecteur (s'il y en a) le soin de vérifier ce qui suit :

1°) $G' \otimes F$ = espace des applications linéaires continues de rang fini de G dans F .

2°) – a) $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_c)'_{\tau} ; F)$ = espace des applications linéaires continues de G_{τ} dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes de G, donc $= \mathcal{L}_c(G_{\tau} ; F)$; donc $= \mathcal{L}_c(G ; F)$ si G a la topologie τ.

–b) $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_c)'_c ; F)$ est le sous-espace du précédent formé des applications qui transforment toute partie compacte de G en une partie compacte de F ; si G a la topologie τ, $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_c)'_c ; F) = \mathcal{L}_c(G ; F)$.

– c) Si G est bornologique, il a la topologie τ et G'_c est complet. Si en outre F est complet, on a dans tous les cas connus $G'_c \hat{\hat{\otimes}} F = \mathcal{L}_c(G ; F)$.

3°) –a $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_b)'_{\tau} ; F)$ (en appelant G'_b le dual fort de G, c'est-à-dire muni de la topologie de la convergence bornée) = espace des applications linéaires continues de G''_{τ} dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de G. Si G ou F est réflexif, c'est donc $\mathcal{L}_b(G_{\tau} ; F)$; si en outre G a la topologie τ, c'est $\mathcal{L}_b(G ; F)$. si G et F sont des espaces normés, G ou F réflexif, $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_b)'_{\tau} ; F) =$ $= \mathcal{L}(G ; F)$ avec sa norme.

– b) $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_b)'_c ; F)$ = espace de toutes les applications linéaires continues de G_{τ} dans F qui transforment les parties bornées de G en parties relativement compactes de F.

–c) Si G est bornologique, il a la topologie τ et G'_b est complet ; si en outre F est complet, $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_b)'_{\tau} ; F) = \mathcal{L}_b(G, F)$ est complet, $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G'_b)'_c ; F)$ est le sous-espace des applications transformant les parties bornées en parties relativement compactes, et $G'_b \hat{\hat{\otimes}} F$ est le sous-espace des limites d'applications linéaires continues de rang fini.

–d) Si G et F sont des Banach, $\mathcal{L}_{\varepsilon}((G')'_c ; F)$ est dans $\mathcal{L}(G ; F)$ le sous-espace des applications compactes, ou complètement continues, transforment la boule unité de G en une partie relativement compacte de F (mais non nécessairement compacte ; ces applications se prolongent en applications faiblement continues de G'' dans F, transformant la boule unité de G'' en une partie compacte de F) ; $G' \hat{\hat{\otimes}} F$ est l'espace des applications linéaires continues quasi-dégénérées de G dans F, limites pour la norme d'applications linéaires continues de rang fini.

<u>NOUVELLE INTERPRÉTATION DU PRODUIT TENSORIEL D'APPLICATIONS LINÉAIRES.</u>

Soient E_i, F_i, $E_i \xrightarrow{v_i} F_i$, $i = 1, 2$.

Interprétons à nouveau $v_1 \otimes v_2$.

Un élément u de $E_1 \otimes E_2$ est une application linéaire faiblement continue de rang fini de E'_2 dans E_1. Alors on peut poser

$$(v_1 \otimes v_2) \cdot u = v_1 \circ u \circ {}^t v_2 ,$$

qui est une application linéaire faiblement continue de rang fini de F'_2 dans F_1 ; donc un élément de $F_1 \otimes F_2$. De plus si u converge vers 0 uniformément sur toute partie équicontinue de F'_2, $(v_1 \otimes v_2) \cdot u$ converge vers 0 uniformément sur toute partie équicontinue de F'_2, car l'image par ${}^t v_2$ de toute partie équicontinue de F'_2 est une partie équicontinue de E'_2.

Ce procédé montre que $v_1 \otimes v_2$ est continue de $E_1 \otimes_\varepsilon E_2$ dans $F_1 \otimes_\varepsilon F_2$. Mais il montre de plus que $v_1 \otimes v_2$ applique continuement $\mathcal{L}_\varepsilon((E'_2)_\tau ; E_1)$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon((F'_2)_\tau ; F_1)$ et $\mathcal{L}_\varepsilon((E'_2)_c ; E_1)$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon((F'_2)_c ; F_1)$.