L. Schwartz

I. Divers espaces normés associés à un espace localement convexe séparé E

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 7, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954

-:-:-:-

13 janvier 1954

Exposé n° 7

I - DIVERS ESPACES NORMÉS ASSOCIÉS A UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE SÉPARÉ E.

1°) Les espaces E_U.

Soit U un voisinage de 0, convexe équilibré ouvert, p la semi-norme jauge de U. L'espace E, muni de la seule semi-norme p, n'est pas nécessairement séparé; son quotient par le sous-espace des éléments de semi-norme nulle, muni de la norme quotient, est l'espace normé E_U. Il existe une épijection canonique $E \to E_U$.

Proposition 1 - Si $E \to N$ est une épijection continue de E sur un espace normé N, il existe un U tel que cette épijection soit composée $E \to E_U \to N$ et que $E_U \to N$ soit une isométrie de E_U sur N.

En effet, si U est l'image réciproque de la boule unité ouverte de N, E_U répond manifestement à la question. Les applications canoniques $E \to E_U$ donnent donc tous les modèles d'épijections continues de E sur des espaces normés.

Proposition 2 - Tout E est isomorphe à un sous-espace vectoriel d'un produit d'espaces normés; tout E métrisable (resp. Fréchet) est sous-espace (resp. sous-espace fermé) d'un produit dénombrable d'espaces de Banach.

L'application $E \to \prod_U E_U$ est en effet un monomorphisme : elle est biunivoque, et pour que $x \in E$ converge vers 0, il faut et il suffit que chaque image $x_U \in E_U$ converge vers 0. Naturellement $E \to \prod_U \hat{E}_U$ est encore un monomorphisme. E est limite projective des quotients normés E_U. Il n'est pas nécessaire, pour obtenir un monomorphisme, de prendre tous les U, mais seulement une base des voisinages; d'où la propriété des métrisables. Comme $\prod_U \hat{E}_U$ est complet, un sous-espace est complet si et seulement si il est fermé, d'où la propriété des Fréchet.

2°) Les espaces E_B.

Soit B une partie bornée de E, convexe équilibrée et coupant toute droite issue de 0 suivant un segment fermé (éventuellement réduit à 0) (B est fermée pour la topologie localement convexe la plus fine sur E).

E_B est le sous-espace engendré par B, muni de la norme jauge de B ; B est sa boule unité fermée. $E_B \to E$ est une injection continue de E_B dans E.

Proposition 3 - Si $N \to E$ est une injection continue d'un espace normé N dans E, il existe une partie bornée B telle que l'injection soit composée $N \to E_B \to E$, et que $N \to E_B$ soit une isométrie de N sur E_B.

Il suffit en effet de prendre pour B l'image de la boule unité fermée de N. Les applications $E_B \to E$ donnent donc tous les modèles d'injections continues d'espaces normés dans E.

Il n'y a pas d'analogue de la proposition 2. E est limite inductive des sous-espaces normés E_B si et seulement si il est bornologique (ou encore : pour qu'un espace soit bornologique, il faut et il suffit qu'il soit limite inductive d'espaces normés) (évident).

On dira qu'une partie bornée B est complétante si elle est convexe équilibrée, coupe toute droite issue de 0 suivant un segment fermé et si E_B est complet (donc Banach). Propriété connue :

Proposition 4 - Toute partie bornée B convexe équilibrée complète est complétante.

En particulier toute partie B convexe équilibrée faiblement compacte est faiblement complète, donc complète, donc complétante.

Le fait pour une partie B d'être complétante ne dépend pas de la topologie de E (pourvu seulement que B soit bornée pour cette topologie).

Applications aux produits tensoriels topologiques π.

D'après l'expression explicite des voisinages de 0 de $E \otimes_\pi F$, cette topologie est limite projective des quotients normés définis par les applications $E \otimes F \to E_U \otimes_\pi F_V$.

Plus généralement :

Proposition 5 - Si E (resp. F) est limite projective (filtrante) d'applications $E \to E_i$ (resp. $F \to F_j$) dans des espaces localement convexes E_i (resp. F_j), $E \otimes_\pi F$ est limite projective des applications $E \otimes F \to E_i \otimes_\pi F_j$.

Evident, par l'expression explicite des voisinages de 0. D'où le nom de topologie projective pour la topologie π. Il n'y a pas d'analogue pour la limite inductive. Toutefois :

Proposition 6 - Si E est limite inductive d'une famille de sous-espace topologiques E_i, et si F est normé $E \otimes_\pi F$ est limite inductive des sous-espaces

<u>topologiques</u> $E_i \otimes_\pi F$, <u>et le sous-espace de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>engendré par les</u> $E_i \hat{\otimes} F$ <u>est limite inductive des</u> $E_i \hat{\otimes} F$.

<u>Principe</u> de la démonstration : pour que 2 topologies soient identiques sur un EVT, il faut et il suffit qu'elles aient même dual et mêmes parties équicontinues du dual.

Reste à voir que toute forme bilinéaire sur $E \otimes F$ dont les restrictions aux $E_i \otimes F$ sont continues est continue, et de même pour les parties équicontinues. Or si B est une telle forme bilinéaire, l'ensemble des points x de E tels que $|B(x,y)| \leq 1$ pour tout y de norme ≤ 1 de F est convexe équilibré et coupe tout E_i suivant un voisinage de 0 , c'est donc un voisinage de 0 de E , C.Q.F.D.

II - <u>LA DEUXIÈME TOPOLOGIE TENSORIELLE</u> $E \otimes_\varepsilon F$.

Soient G , H , 2 EVT . Appelons $\mathcal{B}(G,H)$ l'espace des formes bilinéaires <u>séparément continues</u> sur G , H . On pourra le munir de la $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$-topologie $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) étant une famille de parties bornées de G (resp. H).

Pour que ce soit une topologie d'espace vectoriel, il faut et il suffit que toute forme bilinéaire séparément continue sur $G \times H$ soit bornée sur tout produit $A \times B$, $A \in \mathfrak{S}_1$, $B \in \mathfrak{S}_2$.

<u>Proposition 7</u> - <u>Si</u> A <u>est une partie bornée quelconque de</u> G , B <u>une partie bornée complétante de</u> H , <u>toute forme bilinéaire séparément continue sur</u> $G \times H$ <u>est bornée sur</u> $A \times B$.

En effet, on peut toujours supposer A convexe équilibrée fermée. Alors la forme bilinéaire est séparément continue sur $G_A \times H_B$; mais d'après le théorème de Baire toute forme bilinéaire séparément continue sur le produit d'un espace normé par un espace de Banach est continue, donc bornée sur le produit des boules unités, C.Q.F.D.

Considérons alors l'espace $\mathcal{B}(E'_\sigma , F'_\sigma)$ des formes bilinéaires séparément faiblement continues sur $E' \times F'$, c'est-à-dire séparément continues sur $E'_\sigma \times F'_\sigma$. Comme toute partie équicontinue convexe équilibrée faiblement fermée d'un dual est faiblement compacte, donc faiblement complète, donc complétante, et que ces parties forment un système fondamental de parties équicontinues, on peut munir $\mathcal{B}(E'_\sigma , F'_\sigma)$ de la topologie ε de la convergence uniforme sur les produits $A' \times B'$, A' (resp. B') partie équicontinue de E' (resp. F') . On notera $\mathcal{B}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$ l'espace ainsi topologisé.

$E \otimes F$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E'_\sigma , F'_\sigma)$; en effet, $\sum_\nu x_\nu \otimes y_\nu$ définit la forme bilinéaire $(x',y') \to \sum_\nu < x' , x_\nu > < y' , y_\nu >$ séparément faiblement continue sur $E' \times F'$, donc il existe une application $E \otimes F \to \mathcal{L}(E'_\sigma , F'_\sigma)$, qui est binunvoque car la dualité entre $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ est séparante. <u>Par définition,</u> $E \otimes_\varepsilon F$ <u>est l'espace</u> $E \otimes F$ <u>muni de la topologie induite par</u> $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$.

Le complété $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ sera aussi noté $E \hat{\hat{\otimes}} F$, par opposition avec $E \hat{\otimes} F$, complété de $E \otimes_\pi F$.

<u>Comparaison des topologies</u> ε et π .

La forme bilinéaire $(B , \sum_\nu x_\nu \otimes y_\nu) \to \sum_\nu B(x_\nu , y_\nu)$ établit une dualité séparante entre $E \otimes F$ et $B(E , F)$.

Le dual de $E \otimes_\pi F$ est exactement $B(E , F)$, et les parties équicontinues de $B(E , F)$ sont exactement les ensembles équicontinus de formes linéaires sur $E \otimes_\pi F$; donc un système fondamental de voisinages de 0 sur $E \otimes_\pi F$ est constitué des polaires des parties équicontinues de $B(E , F)$.. Un système fondamental de voisinages de 0 de $E \otimes_\varepsilon F$ est constitué des polaires des parties $A' \otimes B'$ de $B(E , F)$, A' (resp. B') équicontinue dans E' (resp. F') . Comme $A' \otimes B'$ est une partie équicontinue de $B(E , F)$, ε <u>est moins fine que</u> π . On peut le voir autrement : si x (resp. y) converge vers 0 dans E (resp. F) x converge vers 0 uniformément sur A' , y converge vers 0 uniformément sur B' , donc $x \otimes y$ converge vers 0 dans $E \otimes_\varepsilon F$; l'application bilinéaire canonique $(x , y) \to x \otimes y$ de $E \times F$ dans $E \otimes_\varepsilon F$ est donc continue, donc ε est moins fine que π .

<u>Proposition 8</u> - <u>Pour que les 2 topologies</u> ε <u>et</u> π <u>soient identiques sur</u> $E \otimes F$, <u>il faut et il suffit que toute partie équicontinue de</u> $B(E , F)$ <u>soit contenue dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée</u> (<u>pour la topologie</u> $\sigma(B(E , F) , E \otimes F)$) <u>d'un produit</u> $A' \otimes B'$, A' (<u>resp.</u> B') <u>partie équicontinue</u> de E' (<u>resp.</u> F').

<u>Proposition 9</u> - <u>La topologie</u> ε <u>est la moins fine sur</u> $E \otimes F$ <u>pour laquelle tout produit</u> $A' \otimes B'$ (A' (<u>resp.</u> B') <u>partie équicontinue de</u> E' (<u>resp.</u> F')) <u>soit un ensemble équicontinu de formes linéaires sur</u> $E \otimes F$.

Ces 2 propositions sont triviales.

Un espace E localement convexe séparé est dit <u>nucléaire</u> si, quelque soit F localement convexe séparé, $E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$. Tout espace de dimension finie est nucléaire (Si $E = C^n$, $E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F = F^n$) .

<u>L'espace</u> $J(E , F)$ <u>des formes bilinéaires intégrales sur</u> $E \times F$.

Une forme bilinéaire sur $E \times F$ est dite <u>intégrale</u> si la forme linéaire sur $E \otimes F$ qui lui est associée est continue sur $E \otimes_\varepsilon F$. L'espace $J(E , F)$ des formes bilinéaires intégrales est donc le dual de $E \otimes_\varepsilon F$. Comme ε est moins fine que π , $J(E , F) \subset B(E , F)$ (autrement dit toute forme bilinéaire intégrale est continue). D'autre part $E' \otimes F' \subset J(E , F)$. Plus précisément :

<u>Proposition 10</u> - <u>L'espace</u> $J(E , F)$ <u>est le sous-espace de</u> $B(E , F)$ <u>constitué par la réunion des enveloppes convexes équilibrées fermées</u> (<u>pour</u> $\sigma(B(E,F) , E \otimes F)$) <u>des produits</u> $A' \otimes B'$, A' (<u>resp.</u> B') <u>partie équicontinue de</u> E' (<u>resp.</u> F') .

En effet, pour que $B \in B(E , F)$ soit dans $J(E , F)$, il faut et il suffit qu'elle soit dans le polaire d'un voisinage de 0 de $E \otimes_\varepsilon F$, donc dans un bipolaire $(A' \otimes B')^{00}$. Les parties telles que $(A' \otimes B')^{00}$ forment un système fondamental de parties équicontinues de $J(E , F)$ considéré comme dual de $E \otimes_\varepsilon F$.

<u>Proposition 11</u> - <u>Pour qu'une forme bilinéaire sur</u> $E \times F$ <u>soit intégrale, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme</u>

$$\int_{A' \times B'} (x' \otimes y') d\mu(x' , y') ,$$

A' (<u>resp.</u> B') <u>partie équicontinue faiblement fermée de</u> E' (<u>resp.</u> F') , μ <u>mesure de Radon sur le compact</u> (<u>faible</u>) $A' \times B'$, <u>l'intégrale étant prise au sens de la topologie de la convergence simple sur</u> $E \times F$.

Autrement dit, cette forme bilinéaire s'écrit :

$$(x , y) \longrightarrow \int_{A' \times B'} \langle x' , x \rangle \langle y' , y \rangle \, d\mu(x' , y') .$$

En effet pour qu'un point d'un EVT appartienne à l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'un compact, il faut et il suffit qu'il soit centre de gravité de ce compact pour une mesure de Radon de masse absolue $\leqslant 1$ portée par ce compact.

Remarquons de plus que tout système (A', B', μ) définit bien un élément de $J(E , F)$. On obtiendra une partie de $J(E , F)$ équicontinue (sur $E \otimes_\varepsilon F$) en prenant A' , B' fixes, et en faisant varier μ , avec $\int_{A' \times B'} |d \mu|$ borné.

<u>Cas des espaces normés</u>..

Si E et F sont normés, on définit une norme ε sur $E \otimes F$ par

$$\|u\|_\varepsilon = \sup_{\substack{\|x'\|\leqslant 1\\ \|y'\|\leqslant 1}} |\langle x'\otimes y' \ , \ u\rangle| \ .$$

On voit alors que la norme ε est celle qui est induite par $B(E',F') \approx (E'\otimes_\pi F')'$. Cette norme est au plus égale à la norme π, car

$$\|u\|_\pi = \sup_{\substack{B\in B(E,F)\\ \|B\|\leqslant 1}} |B(u)|$$

Mais naturellement les éléments décomposables $x\otimes y$ de $E\otimes F$ ont même norme $\|x\|\,\|y\|$ pour ε et π. Sur $J(E\ ,\ F)$ existe alors la norme de dual de $E\otimes_\varepsilon F$, que nous appe-llerons norme-J ou norme intégrale; elle est plus grande que la norme induite par $B(E,F)$ ou norme-B. Sur $E'\otimes F'$, la norme B est identique à la norme ε (car $\|u'\|_B = \sup_{\|x\|\leqslant 1\ ,\ \|y\|\leqslant 1} |\langle u'\ ,\ x\otimes y\rangle|$, et $\|u'\|_\varepsilon = \sup_{\substack{x''\in E''\ ,\ \|x''\|\leqslant 1\\ y''\in F''\ ,\ \|y''\|\leqslant 1}} |\langle u'\ ,\ x''\otimes y''\rangle|$, or la boule unité de E (resp. F) est faiblement dense dans la boule unité de E'' (resp. F''). D'autre part sur $E'\otimes F'$ la norme-J est $\leqslant$ à la norme-π, car

$$\|u'\|_J = \sup_{\|u\|_\varepsilon\leqslant 1} |\langle u'\ ,\ u\rangle| \quad \text{et} \quad \|u'\|_\pi = \sup_{\substack{B\in B(E',F')\\ \|B\|\leqslant 1}} |B(u')| \ .$$

Dans tous les cas connus, la norme-J est égale à la norme π.

<u>Récapitulons</u> : <u>Sur</u> $E'\otimes F'$, <u>norme B = norme ε $\leqslant$ norme J $\leqslant$ norme π</u>, <u>le dernier $\leqslant$ étant en réalité = dans tous les cas connus</u>. Naturellement pour les éléments décomposables $x'\otimes y'$, toutes ces normes sont égales à $\|x'\|\,\|y'\|$.

Si on appelle norme B (resp. J) sur $E\otimes F$ la norme induite par $B(E'\ ,\ F')$ (resp. $J(E',F')$) on a de même sur $E\otimes F$: <u>norme B = norme ε $\leqslant$ norme J $\leqslant$ norme π</u> , <u>le dernier $\leqslant$ étant = dans tous les cas connus</u>.

· <u>Produit tensoriel d'applications linéaires continues</u>.

Soient v_i $(i = 1\ ,\ 2)$ des applications linéaires continues de E_i dans F_i. Alors $v_1\otimes v_2$ est une application linéaire de $E_1\otimes E_2$ dans $F_1\otimes F_2$.

<u>Proposition 12</u> - $v_1\otimes v_2$ <u>est continue pour les topologies</u> ε. <u>Elle se prolonge donc canoniquement en une application linéaire continue de</u> $E_1\hat{\hat{\otimes}} E_2$ <u>dans</u> $F_1\hat{\hat{\otimes}} F_2$. <u>Si les espaces sont normés</u>, $\|v_1\otimes v_2\|_\varepsilon = \|v_1\|\,\|v_2\|$.

Plus généralement $v_1\otimes v_2$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{L}_\varepsilon((E_1')_\sigma\ ,\ (E_2')_\sigma)$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon((F_1')_\sigma\ ,\ (F_2')_\sigma)$.

Cette application est définie par "l'image réciproque" relative à l'application $({}^t v_1 , {}^t v_2)$ de $F_1' \times F_2'$ dans $E_1' \times E_2'$. Soit $B \in \mathcal{L}_\varepsilon((E_1')_\sigma , (E_2')_\sigma)$ on définira $(v_1 \otimes v_2)(B) \in \mathcal{L}_\varepsilon((F_1')_\sigma , (F_2')_\sigma)$ par

$$(v_1 \otimes v_2)(B)\ (y_1' , y_2') = B\ ({}^t v_1(y_1') , {}^t v_2(y_2')) .$$

Tout résulte alors de ce que ${}^t v_i$ est faiblement continue, et de ce que l'image par ${}^t v_i$ d'une partie équicontinue de F_i' est une partie équicontinue de E_i' .

Considérons le cas des espaces normés, et comparons $\|v_1\|$, $\|v_2\|$, et $\|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\|v_1 \otimes v_2\| &= \sup_{\|u\|_\varepsilon \leq 1} \|(v_1 \otimes v_2)(u)\|_\varepsilon \qquad (u \in E_1 \otimes E_2) \\
&= \sup_{\substack{\|u\|_\varepsilon \leq 1 \\ \|y_1'\| \leq 1 \\ \|y_2'\| \leq 1}} |<(v_1 \otimes v_2)(u) , y_1' \otimes y_2'>| \qquad (y_i' \in F_i') \\
&= \sup_{\substack{\|u\|_\varepsilon \leq 1 \\ \|y_1'\| \leq 1 \\ \|y_2'\| \leq 1}} |<u , {}^t v_1(y_1') \otimes {}^t v_2(y_2')>| \\
&\leq \|v_1\| \|v_2\| \sup_{\substack{\|u\|_\varepsilon \leq 1 \\ \|x_1'\| \leq 1 \\ \|x_2'\| \leq 1}} |<u , x_1' \otimes x_2'>| \qquad (x_i' \in E_i') \\
&= \|v_1\| \|v_2\| .
\end{aligned}$$

Donc $\|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon \leq \|v_1\| \|v_2\|$. Mais par ailleurs

$$\begin{aligned}
\|v_1 \otimes v_2\| &\geq \sup_{\substack{\|x_1\| \leq 1 \\ \|x_2\| \leq 1}} \|(v_1 \otimes v_2)(x_1 \otimes x_2)\| \qquad (x_i \in E_i) \\
&= \sup_{\substack{\|x_1\| \leq 1 \\ \|x_2\| \leq 1}} \|v_1(x_1) \otimes v_2(x_2)\|_\varepsilon = \sup_{\substack{\|x_1\| \leq 1 \\ \|x_2\| \leq 1}} \|v_1(x_1)\| \|v_2(x_2)\| \\
&= \|v_1\| \|v_2\| \quad \text{donc} \quad \|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon \geq \|v_1\| \|v_2\| .
\end{aligned}$$

Nous trouvons finalement $\|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon = \|v_1\| \|v_2\|$, comme nous avions déjà trouvé $\|v_1 \otimes v_2\|_\pi = \|v_1\| \|v_2\|$.

<u>Proposition 13</u> - <u>Si les</u> v_i <u>sont des monomorphismes,</u> $v_1 \otimes v_2$ <u>est un monomorphisme pour les topologies</u> ε . <u>Autrement dit, si</u> E_i <u>est un sous-espace topologique de</u> F_i , <u>la topologie</u> ε <u>sur</u> $E_1 \otimes E_2$ <u>est induite par la topologie</u> ε <u>de</u> $F_1 \otimes F_2$, <u>et la norme</u> ε <u>est la même si tous les espaces sont normés</u>.

En effet E_i' est un quotient de F_i' ; l'image canonique par $F_i' \to E_i'$ d'une partie équicontinue de F_i' est une partie équicontinue de E_i' , et réciproquement d'après Hahn-Banach toute partie équicontinue de E_i' est l'image d'une partie équicontinue de F_i' . Dans le cas d'espaces normés la boule unité de E_i' est l'image de la boule unité de F_i' , C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> - Si les v_i sont des épimorphismes, $v_1 \otimes v_2$ n'est pas en général un épimorphisme pour les topologies ε . Ainsi les topologies π conviennent pour les épimorphismes, les topologies ε pour les monomorphismes. On conçoit l'intérêt des cas où ces topologies seront identiques.

<u>Topologie</u> ε <u>sur le produit de plusieurs EVT.</u>

<u>Proposition 14</u> - <u>Soient</u> E , F , G , 3 EVT . <u>On appelle topologie</u> ε <u>sur</u> $E \otimes F \otimes G$ <u>la topologie de la convergence uniforme sur les produits</u> $A' \otimes B' \otimes C'$ A' (<u>resp</u>. B' , C') <u>partie équicontinue de</u> E' (resp. F' , G') .

<u>Alors</u> $(E \otimes F \otimes G)_\varepsilon \approx (E \otimes_\varepsilon F) \otimes_\varepsilon G \approx E \otimes_\varepsilon (F \otimes_\varepsilon G) \approx F \otimes_\varepsilon (E \otimes_\varepsilon G)$, <u>et les normes sont les mêmes si tous les espaces sont normés</u>.

Il suffit naturellement de montrer le premier isomorphisme. Considérons la dualité séparante entre $E \otimes F \otimes G$ et l'espace des formes trilinéaires continues sur $E \otimes F \otimes G$. Les voisinages de 0 de $(E \otimes F \otimes G)_\varepsilon$ sont les polaires des $A' \otimes B' \otimes C'$; les voisinages de 0 dans $(E \otimes_\varepsilon F) \otimes_\varepsilon G$ sont les polaires des $H' \otimes C'$ où H' est une partie équicontinue de $(E \otimes_\varepsilon F)' = J(E,F)$ donc H' est de la forme $(A' \times B')^{00}$, or le polaire de $A' \otimes B' \otimes C'$ est le même que celui de $(A' \otimes B')^{00} \otimes C' \subset (A' \otimes B' \otimes C')^{00}$.

<u>Remarque</u> - On a aussi $(E \otimes F \otimes G)^\wedge_\varepsilon = (E \hat{\hat{\otimes}} F) \hat{\hat{\otimes}} G$, ...