Séminaire Schwartz

L. Schwartz

L'espace $L^1 \widehat{\otimes} E$ (suite et fin)

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
année 1953-1954.
-:-:-:-

9 décembre 1953.

Exposé n° 4

L'ESPACE $L^1 \hat{\otimes} E$ (suite et fin)

1 - Le théorème de Dunford-Pettis.

Soit $\mathcal{B}^\infty$ l'espace de Banach des fonctions scalaires bornées sur un ensemble quelconque X, muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{B}^\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Soit d'autre part $\mathcal{H}$ une famille de parties de X, appelées "négligeables", telle que toute partie contenue dans une partie négligeable soit négligeable et que toute réunion dénombrable de parties négligeables soit négligeable. Une propriété de points x de X sera dite vérifiée $\mathcal{H}$ - presque partout si elle est vérifiée pour tous les points x du complémentaire d'un ensemble négligeable. Les fonctions de $\mathcal{B}^\infty$ qui sont nulles $\mathcal{H}$ - presque partout forment un sous-espace vectoriel ; appelons B^∞ le quotient de $\mathcal{B}^\infty$ par ce sous-espace.

Un élément de B^∞ est une classe de fonctions équivalentes de $\mathcal{B}^\infty$, 2 fonctions étant équivalentes si elles sont égales $\mathcal{H}$-presque partout.

Il existe sur B^∞ une norme quotient ; pour $f^\cdot \in B^\infty$, $\|f^\cdot\|_{B^\infty}$ est le plus petit nombre $M \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ $\mathcal{H}$ - presque partout.

Lemme de Dunford-Pettis.

Si V est un sous-espace vectoriel séparable de B^∞, il existe au dessus de V un relèvement linéaire isométrique dans $\mathcal{B}^\infty$.

Cela signifie qu'il existe une application linéaire σ de V dans $\mathcal{B}^\infty$ telle que, pour toute classe $f^\cdot \in V$, on ait

$$[\sigma(f^\cdot)]^\cdot = f^\cdot , \quad \text{et} \quad \|\sigma(f^\cdot)\|_{\mathcal{B}^\infty} = \|f^\cdot\|_{B^\infty} .$$

V étant séparable, il existe dans V un ensemble dénombrable dense ; les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des éléments de cet ensemble forment alors un Q -sous-espace vectoriel V_1 de V dénombrable et dense (Q = corps des rationnels complexes). Soit σ_1 un relèvement Q - linéaire quelconque de V_1 dans $\mathcal{B}^\infty$ (on en trouve un en relevant n'importe comment une Q - base algébrique de V_1, et les autres points de V_1 par Q - linéarité). Pour tout $f^\cdot \in V_1$, on a $|\sigma_1(f^\cdot)(x)| \leqslant \|f^\cdot\|_{B^\infty}$ $\mathcal{H}$ -presque partout ; cette inégalité est donc vérifiée pour les points x qui n'appartiennent pas à un ensemble négligeable $N_{f^\bullet} \in \mathcal{H}$. La réunion (dénombrable) de ces ensembles $N_{f^\bullet}$ est un ensemble négligeable $N \in \mathcal{H}$. Soit alors σ_2 le relèvement défini au dessus de V_1 par $\sigma_2(f^\bullet)(x) = \sigma_1(f^\bullet)(x)$ pour $x \notin N$, $\sigma_2(f^\bullet)(x) = 0$ pour $x \in N$. Alors σ_2 est un relèvement Q - linéaire isométrique de V_1 dans $\mathcal{B}^\infty$. Alors, $\mathcal{B}^\infty$ étant complet, σ_2 se prolonge par continuité en une application σ de V dans $\mathcal{B}^\infty$, qui est un relèvement C - linéaire isométrique répondant à la question.

Nous appliquerons ce lemme au cas où V est un sous-espace vectoriel de $L^\infty \subset B^\infty$ défini par une mesure dx sur l'espace localement compact X, $\mathcal{H}$ étant la famille des ensembles localement de mesure nulle. Alors le relèvement de V est dans $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{B}^\infty$.

DÉFINITION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE CONTINUE DE E DANS L^∞ PAR DES FONCTIONS BORNÉES SCALAIREMENT MESURABLES À VALEURS DANS E'.

Soit $\overleftarrow{G}$ une fonction $x \to \overleftarrow{G}(x)$ définie sur X à valeurs dans le dual E' d'un espace de Banach E. Pour tout $\overrightarrow{e} \in E$, on définit une fonction scalaire notée $\langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{e} \rangle : x \to \langle \overleftarrow{G}(x), \overrightarrow{e} \rangle$. Si Λ est un espace vectoriel de fonctions scalaires sur X (espace des fonctions continues, des fonctions différentiables si X est une variété différentiable, des fonctions mesurables, espaces $\mathcal{L}^p$, etc ...), on dit que $\overleftarrow{G}$ appartient scalairement à Λ si, pour tout $\overrightarrow{e} \in E$, la fonction scalaire $\langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{e} \rangle$ appartient à Λ ; alors $e \to \langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{e} \rangle$ définit une application linéaire de E dans Λ.

Toute fonction $\overleftarrow{G}$, scalairement mesurable et bornée en norme par un nombre $M \geq 0$ ($\|\overleftarrow{G}(x)\|_{E'} \leq M$ pour tout $x \in X$) définit alors une application linéaire u continue de E dans L^∞, à savoir $\overrightarrow{e} \to (\langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{e} \rangle)^\bullet$. On a $|\langle \overleftarrow{G}(x), \overrightarrow{e} \rangle| \leq M \|\overrightarrow{e}\|$, donc $\|u\| \leq M$. Pour que 2 fonctions G_1, G_2, définissent la même application u de E dans L^∞, il faut et il suffit qu'elles soient scalairement localement presque partout égales, c'est-à-dire que leur différence soit scalairement localement presque partout nulle (ce qui ne signifie pas que $G_1 = G_2$ localement presque partout).

La réciproque est le théorème de Dunford-Pettis :

THÉORÈME 1 - (Dunford-Pettis).

Toute application linéaire continue u d'un espace de Banach séparable E dans L^∞ peut être définie par $\overrightarrow{e} \to (\langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{e} \rangle)^\bullet$, où $\overleftarrow{G}$ est une fonction définie sur X à valeurs dans E' scalairement mesurable, et vérifiant $\sup_{x \in X} \|\overleftarrow{G}(x)\|_{E'} = \|u\|$.

Comme E est séparable, $u(E)$ est en effet un sous-espace vectoriel

séparable de L^{∞} ; il existe donc un relèvement linéaire isométrique σ de u (E) dans $\mathcal{B}^{\infty}$. Soit $\tilde{u} = \sigma \circ u$, $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. Pour chaque $\vec{e} \in E$, et $x \in X$, posons $\tilde{u}(\vec{e})(x) = g_e(x)$. Pour e fixé, g_e doit appartenir à $\mathcal{L}^{\infty}$; pour x fixé, $\vec{e} \to g_e(x)$ est une forme linéaire sur E, continue et même vérifiant $|g_e(x)| \leq \|\tilde{u}\| \, \|\vec{e}\|$; donc il existe un élément $\overleftarrow{G}(x)$ de E' tel que $g_e(x) = \langle \overleftarrow{G}(x), \vec{e} \rangle$.
La fonction $\overleftarrow{G}$, définie sur X, à valeurs dans E', est scalairement mesurable (puisque $\langle \overleftarrow{G}, \vec{e} \rangle = g_e \in \mathcal{L}^{\infty}$), vérifie $\|\overleftarrow{G}(x)\|_{E'} \leqslant \|u\|$, et définit précisément u puisque $\tilde{u}(\vec{e}) = \langle \overleftarrow{G}, \vec{e} \rangle$ donc $u(\vec{e}) = (\langle \overleftarrow{G}, \vec{e} \rangle)^{\bullet}$. On a vu qu'alors $\|u\| \leqslant \sup_{x \in X} \|\overleftarrow{G}(x)\|_{E'}$; donc on a $\sup_{x \in X} \|\overleftarrow{G}(x)\|_{E'} = \|u\|$.

<u>REMARQUE</u>. Si $X = R^n$, dx = mesure de Lebesgue, on montre que l'hypothèse de séparabilité sur E n'est pas nécessaire.

2 - <u>Formes bilinéaires continues sur $L^1 \times E$ et formes linéaires continues sur $L^1(E)$</u>.

Le théorème de Dunford-Pettis a 2 autres énoncés équivalents :

1°) <u>Toute application linéaire continue v de L^1 dans E' est définie à partir d'une fonction $\overleftarrow{G}$, par la formule</u> :

$$v(f) = \int_X \overleftarrow{G}(x) \, f(x) \, dx, \quad \underline{\text{avec}} \quad \sup_{x \in X} \|\overleftarrow{G}(x)\|_{E'} = \|v\| .$$

(l'intégrale étant ici une intégrale faible :

$$\langle v(f), \vec{e} \rangle = \int_X \langle \overleftarrow{G}(x), \vec{e} \rangle \, f(x) \, dx \;)$$

2°) <u>Toute forme bilinéaire continue B sur $L^1 \times E$ est définie à partir d'une fonction $\overleftarrow{G}$, par la formule</u> :

$$B(f^{\bullet}, \vec{e}) = \int_X \langle \overleftarrow{G}(x), \vec{e} \rangle \, f(x) \, dx, \quad f \in f^{\bullet}$$

Considérons maintenant une forme linéaire continue L sur $L^1(E)$.
Elle définit évidemment une forme bilinéaire continue B sur $L^1 \times E$ par la formule

$$B(f^{\bullet}, \vec{e}) = L(f^{\bullet} \vec{e}), \text{ car } f^{\bullet} \vec{e} \in L^1(E) .$$

De plus $\|B\| \leqslant \|L\|$. B suffit à déterminer L, car L est connue à partir de B sur le sous-espace dense $L^1 \otimes E$ de $L^1(E)$.
Réciproquement :

<u>THÉORÈME 2</u> - <u>Toute forme bilinéaire continue B sur $L^1 \times E$, E espace de Banach séparable, est définie à partir d'une forme linéaire continue L sur $L^1(E)$, et</u> $\|L\| = \|B\|$.

L'application $L \rightarrow B$ définit donc une isométrie de l'espace des formes linéaires continues sur $L^1(E)$, sur l'espace des formes bilinéaires continues sur $L^1 \times E$.

Soit en effet B une forme bilinéaire continue sur $L^1 \times E$. Elle peut-être définie à partir d'une fonction $\overleftarrow{G}$, scalairement mesurable sur X à valeurs dans E', telle que $\| \overleftarrow{G}(x) \|_{E'} \leqslant \| B \|$. Posons pour $\overrightarrow{f^\bullet} \in L^1(E)$:

$$L(\overrightarrow{f^\bullet}) = \int_X \langle \overleftarrow{G}(x), \overrightarrow{f}(x) \rangle \, dx, \; \overrightarrow{f} \in \overrightarrow{f^\bullet} .$$

Montrons d'abord que cette intégrale a un sens, c'est-à-dire que la fonction scalaire $\langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{f} \rangle$ est intégrable.

Puisque $\overrightarrow{f^\bullet} \in L^1(E)$, il existe, $\mathcal{E} > 0$ étant donné, une fonction de la forme $\sum_\nu f_\nu \overrightarrow{e}_\nu$, $f_\nu \in \mathcal{L}^1$, $\overrightarrow{e}_\nu \in E$, telle que

$$\int_X \| \overrightarrow{f}(x) - \sum_\nu f_\nu(x) \overrightarrow{e}_\nu \|_E \, dx \leqslant \mathcal{E} .$$

Alors $\displaystyle\int_X^* \| \langle \overleftarrow{G}(x), \overrightarrow{f}(x) \rangle - \langle \overleftarrow{G}(x), \sum_\nu f_\nu(x) \overrightarrow{e}_\nu \rangle \|_E \, dx \leqslant \mathcal{E} \, \| B \|$.

Mais la fonction $\langle \overleftarrow{G}, \sum_\nu f_\nu \overrightarrow{e}_\nu \rangle = \sum_\nu \langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{e}_\nu \rangle f_\nu$ est dans $\mathcal{L}^1$, puisque $\langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{e}_\nu \rangle \in \mathcal{L}^\infty$ et $f_\nu \in \mathcal{L}^1$; alors, d'après la définition de $\mathcal{L}^1$, cela prouve que

$$\langle \overleftarrow{G}, \overrightarrow{f} \rangle \in \mathcal{L}^1 , \text{ et } \int_X \langle \overleftarrow{G}(x), \overrightarrow{f}(x) \rangle \, dx \text{ a un sens.}$$

Cette intégrale est indépendante du choix du représentant $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{f^\bullet}$, car si $\overrightarrow{f^\bullet} = 0$, et si donc $\overrightarrow{f}$ est presque partout nulle, on a

$$\left| \int_X \langle \overleftarrow{G}(x), \overrightarrow{f}(x) \rangle \, dx \right| \leqslant \| B \| \; \| f \|_{\mathcal{L}^1} = 0 ;$$

ceci prouve en même temps, pour $\overrightarrow{f^\bullet}$ quelconque, que $\overrightarrow{f^\bullet} \rightarrow L(\overrightarrow{f^\bullet})$ est une forme linéaire continue de norme $\leqslant B$ sur $L^1(E)$. Enfin, pour $\overrightarrow{f^\bullet} = f^\bullet \overrightarrow{e}$, $f^\bullet \in L^1$, $\overrightarrow{e} \in E$, on a bien

$$L(f^\bullet \overrightarrow{e}) = \int_X \langle \overleftarrow{G}(x), \overrightarrow{e} \rangle f(x) \, dx$$

$(f \in f^\bullet)$, ou $L(f^\bullet \overrightarrow{e}) = B(f^\bullet, \overrightarrow{e})$, ce qui prouve que L définit B. Comme on a alors à la fois $\| B \| \leqslant \| L \|$ et $\| L \| \leqslant \| B \|$, on a $\| L \| = \| B \|$, cqfd.

3- <u>Le produit tensoriel $L^1 \widehat{\otimes} E$, E espace de Banach.</u>

<u>THÉORÈME 3 - Si E est un espace de Banach, $L^1 \widehat{\otimes} E$ et $L^1(E)$ sont isométriques.</u>

Il suffit de montrer que sur $L^1 \otimes E$, la norme tensorielle π et la norme induite par $L^1(E)$ sont les mêmes ; car on sait que $L^1(E)$ est complet et que $L^1 \otimes E$ est dense dans $L^1(E)$.

Soit d'abord E séparable. Les formes bilinéaires continues sur $L^1 \times E$ sont en correspondance biunivoque, avec conservation des normes, avec les formes linéaires continues sur $L^1(E)$, donc aussi avec les formes linéaires continues sur $L^1 \otimes E$ muni de la norme induite par $L^1(E)$, puisque $L^1 \otimes E$ est dense dans $L^1(E)$; or la norme π sur $L^1 \otimes E$ est la seule à possèder cette propriété, donc la norme induite par $L^1(E)$ est bien la norme π.

Soit maintenant E quelconque. Si $\vec{f^\cdot} \in L^1 \otimes E$, il existe un sous-espace F de dimension finie de E tel que $\vec{f^\cdot} \in L^1 \otimes F$. Appelons π_E la norme tensorielle projective sur $L^1 \otimes E$, π_F sur $L^1 \otimes F$; on sait que $\pi_F \geqslant \pi_E$. On a :

$$\|\vec{f^\cdot}\|_{\pi_E} \geqslant \|\vec{f^\cdot}\|_{L^1(E)} = \|\vec{f^\cdot}\|_{L^1(F)} = \|\vec{f^\cdot}\|_{\pi_F} \geqslant \|f^\cdot\|_{\pi_E}$$

donc toutes ces quantités sont égales, en particulier

$$\|f^\cdot\|_{\pi_E} = \|\vec{f^\cdot}\|_{L^1(E)} \qquad , \qquad \text{cqfd.}$$

Les corollaires qui suivent sont au moins aussi importants que les théorèmes qui précèdent ; ils sont valables sans hypothèse de séparabilité.

<u>COROLLAIRE 1</u> - (généralisant le théorème 2)

Si E et G sont des espaces de Banach quelconques, à toute application linéaire continue L de $L^1(E)$ dans G correspond une application bilinéaire continue B de $L^1 \times E$ dans G définie par

$$B(f^\cdot, \vec{e}) = L(f^\cdot \vec{e}) .$$

L'application $L \to B$ est une isométrie de l'espace des applications linéaires continues de $L^1(E)$ dans G sur l'espace des applications bilinéaires continues de $L^1 \times E$ dans G.

<u>COROLLAIRE 2</u> - Si F est un sous-espace de E, la norme induite par $(L^1 \otimes E)_\pi$ sur $L^1 \otimes F$ est $(L^1 \otimes F)_\pi$.

<u>COROLLAIRE 3</u> - Si F est un sous-espace de E, toute forme bilinéaire continue sur $L^1 \times F$ est la restriction d'une forme bilinéaire continue sur $L^1 \times E$, de même norme.

En effet, cette forme bilinéaire provient d'une forme linéaire continue de même norme sur $L^1(F)$, donc d'après Hahn-Banach se prolonge en une forme linéaire continue de même norme sur $L^1(E)$ et par conséquent provient d'une forme bilinéaire continue de même norme sur $L^1 \times E$.

COROLLAIRE 4 - Si F est un sous-espace de E, toute application linéaire continue de F dans L^{∞} est la restriction d'une application linéaire continue de E dans L^{∞}, de même norme.

En effet, les applications linéaires continues de E (resp. F) dans L^{∞} sont en correspondance biunivoque et isométrique avec les formes bilinéaires continues sur $L^1 \times E$ (resp. $L^1 \times F$).

COROLLAIRE 5 - Soient X, Y, 2 espaces localement compacts, munis de mesures ≥ 0, dx, dy. Si λ est une application linéaire continue de L^1_x dans L^1_y, et si E est un espace de Banach, il existe une application linéaire $\tilde{\lambda}$ et une seule, continue, de $L^1_x(E)$ dans $L^1_y(E)$, telle que, pour $f^\bullet \in L^1_x$, $\vec{e} \in E$, on ait $\tilde{\lambda}(f^\bullet \vec{e}) = \lambda(f^\bullet)\vec{e}$; de plus $\|\tilde{\lambda}\| = \|\lambda\|$, si $E \neq \{0\}$.

En effet, l'unicité étant évidente a priori puisque $\tilde{\lambda}$, si elle existe, est connue sur $L^1 \otimes E$ dense dans $L^1(E)$, l'existence résulte de ce que l'application $\lambda \otimes I$ de $L^1_x \hat{\otimes} E$ dans $L^1_y \hat{\otimes} E$ répond à la question.

4 - LES ESPACES $L^p_x(L^p_y)$.

Avec les notations ci-dessus, $L^p_x(L^p_y)$ est l'espace $L^p_x(E)$, correspondant à $E = L^p_y$. Nous supposons ici p fini.

THÉORÈME 4 - Les espaces $L^p_x(L^p_y)$, $L^p_y(L^p_x)$, $L^p_{(x,y)}$ sont canoniquement isométriques. Pour $p = 1$, $L^1_{(x,y)} = L^1_x \hat{\otimes} L^1_y$, et l'espace des formes bilinéaires continues sur $L^1_x \times L^1_y$ est canoniquement isométrique à $L^{\infty}_{(x,y)}$. Nous appelons $L^p_{(x,y)}$ l'espace L^p correspondant à la mesure produit $dx\,dy$ sur $X \times Y$.

Soit f une fonction continue à support compact sur $X \times Y$. Il lui correspond une fonction continue sur X à valeurs dans $\mathcal{L}^p_y$, à support compact, donc par passage au quotient à valeurs dans L^p_y. Cette fonction appartient à $\mathcal{L}^p_x(L^p_y)$, donc sa classe à $L^p_x(L^p_y)$. Soit $f^\bullet$ cette classe. On a :

$$\|f^\bullet\|_{L^p_x(L^p_y)} = \left[\int_X dx \left(\left(\int |f(x,y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p_{(x,y)}}$$

d'après le théorème de Fubini pour les fonctions continues.

Donc $f \rightsquigarrow f^\bullet$ est une isométrie d'un sous-espace dense de $\mathcal{L}^p_{(x,y)}$ sur un sous-espace de l'espace complet $L^p_x(L^p_y)$. Elle définit, par passage au quotient et prolongement par continuité, une isométrie de $L^p_{(x,y)}$ sur un sous-espace fermé de $L^p_x(L^p_y)$.

Pour voir que c'est une isométrie sur $L_x^p\ (L_y^p)$; il suffit de remarquer que dans l'image de $L^p_{(x,y)}$ figurent tous les éléments d'un ensemble dense dans $L_x^p\ (L_y^p)$, à savoir ceux de $L_x^p \otimes L_y^p$. Alors l'espace des formes bilinéaires continues sur $L_x^1 \times L_y^1$, qui est isométrique à l'espace des formes linéaires continues sur $L_x^1 \hat{\otimes} L_y^1 = L_x^1\ (L_y^1) = L^1_{(x,y)}$, est isométrique à $L^\infty_{(x,y)}$.

<u>COROLLAIRE. Le théorème de Dunford-Pettis est vrai sans condition de séparabilité si E est un espace L^1 ou un sous-espace d'un espace L^1.</u>

<u>REMARQUE</u> - 1°) L'analyse donne des contre-exemples classiques à la dernière partie du théorème 4 pour $p \neq 1$. Considérons par exemple l'intégrale de Fourier

$$(g,h) \longrightarrow \int_{X\times Y} \exp\,(-2i\,\pi\,xy)\ g(x)\ h(y)\ dx\ dy$$

Elle définit une forme bilinéaire continue sur $L_x^2 \times L_y^2$; cependant $\exp\,(-2i\,\pi\,xy) \notin L^2_{x,y}$, si $X = Y = R$. Cela prouve que $L_x^2 \otimes L_y^2 \neq L_x^2\ (L_y^2)$, donc que si E est de dimension finie, la norme projective sur $L^2 \otimes E = L^2(E)$, équivalente à la norme de $L^2(E)$, est strictement plus grande.

2°) <u>Pour p et q finis différents, on démontre aisément que</u> $L_x^p\ (L_y^q)$ et $L_y^q\ (L_x^p)$ <u>sont isométriques</u>.

5 - <u>CAS OU E N'EST PLUS NORMÉ, MAIS LOCALEMENT CONVEXE SÉPARÉ</u>.

Soit (q_i) une famille de semi-normes définissant la topologie de E . $\mathcal{L}^p(E)$ sera l'espace des fonctions $\vec{f}$ définies sur X , à valeurs dans E , pour lesquelles chaque intégrale

$$\left[\int_X \left(q_i\ (\vec{f}(x))\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = N_{p;q_i}\ (\vec{f}) \text{ est finie, et qui}$$

sont adhérentes, pour la topologie définie par la famille des semi-normes $N_{p;q_i}$, à l'espace des fonctions continues à support compact . L^p (E) est le quotient de $\mathcal{L}^p(E)$ par le sous-espace des $\vec{f}$ pour lesquelles chaque $N_{p;q_i}\ (\vec{f})$ est nulle (ce qui ne prouve pas que $\vec{f}$ soit presque partout nulle, si le système des q_i n'est pas dénombrable). Si E est un Fréchet, L^pE est un Fréchet. Mais si E est non métrisable, L^p (E) peut n'être pas complet même si E est complet; son complété $(L^p(E))^\wedge$ comprendra des éléments non représentables comme classes de fonctions.

<u>THÉORÈME 5</u> - $L^1 \hat{\otimes} E \simeq (L^1\ (E))^\wedge$.

Il suffit pour cela de voir que la topologie $(L^1 \otimes E)_\pi$ est la topologie induite sur $L^1 \otimes E$ par $L^1(E)$. Or, avec les notations ci-dessus, si E_{q_i} est l'espace normé (séparé) associé à E muni de la topologie définie par la seule semi-norme q_i , la topologie induite par $L^1(E)$ est la moins fine pour laquelle toutes les applications de $L^1 \otimes E$ dans les $L^1(E_{q_i})$ soient continues, la topologie $(L^1 \otimes E)_\pi$ est la moins fine pour laquelle chacune des applications de $L^1 \otimes E$ dans les $(L^1 \otimes E_{q_i})_\pi$ soient continues; or nous avons vu, E_{q_i} étant normé, que $(L^1 \otimes E_{q_i})_\pi$ est la topologie induite par $L^1(E_{q_i})$.

<u>COROLLAIRE</u> - <u>Les corollaires du théorème 3 sont valables pour E quelconque, à condition de supprimer les considérations relatives aux normes</u>.

<u>EXEMPLE</u> - Soit I un ensemble, prenons $X = I$, et dx = mesure discrète formée de la masse $+1$ en chaque point i de I .

L'espace $L^1(E)$ est alors l'espace des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E , telles que, pour chaque semi-norme q sur E , $\sum_{i \in I} q(x_i) < +\infty$. C'est ce qu'on pourra appeler l'espace des familles <u>absolument</u> sommables, si E est complet. Dans ce cas, $L^1(E)$ est complet et identique à $L^1 \hat{\otimes} E$. Si $I = N$, L^1 est noté l^1 , $L^1(E) = L^1 \hat{\otimes} E$ sera noté $l^1(E) = l^1 \hat{\otimes} E$.