L. Schwartz

N° 1. Rappels sur les espaces L^p

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 3, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

2 décembre 1953

Exposé n° 3

N° 1 - RAPPELS SUR LES ESPACES L^p.

(Cfr. BOURBAKI, Livre VI, Chap.IV.)

§ 1 - CAS DES FONCTIONS NUMÉRIQUES.

Pour toute mesure positive dx sur un espace localement compact X, on peut définir le prolongement de dx à l'ensemble des fonctions numériques positives définies dans X : la valeur du prolongement de dx pour une telle fonction est appelée intégrale supérieure de f et notée $\int^* f(x)\, dx$. Pour une fonction numérique quelconque f définie dans X, on pose

$$N_p(f) = \left(\int^* |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty) \;;$$

$N_p(f)$ définit une semi-norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}^p$ des f telles que $N_p(f)$ soit finie. Désignons par C l'ensemble des fonctions numériques continues dans X et à support compact ; C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}^p$ pour tout p fini et supérieur ou égal à 1. On note $\mathcal{L}^p$ l'adhérence de C dans l'espace $\mathcal{F}^p$ muni de la topologie définie par la semi-norme N_p et on appelle fonction de puissance p-ème intégrale tout élément de $\mathcal{L}^p$. Cela signifie que $f \in \mathcal{L}^p$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver g dans C telle que $N_p(f - g) \leq \varepsilon$. On désigne par L^p l'espace normé associé à $\mathcal{L}^p$: c'est le quotient de $\mathcal{L}^p$ par le sous-espace des fonctions presque partout nulles. Soulignons que L^p n'est pas un espace de fonctions, mais de classes de fonctions équivalentes modulo la relation $N_p(f - g) = 0$; nous noterons f la classe dont f est un élément.

Pour $p = 1$, rappelons que $\mathcal{L}^1$ est l'espace des fonctions intégrables ; on peut prolonger la mesure dx de C à $\mathcal{L}^1$. Sa valeur pour $f \in \mathcal{L}^1$ est l'intégrale de f proprement dite.

Soit maintenant f une fonction numérique définie dans X. Localement presque partout signifie presque partout sur tout compact et équivaut à presque partout lorsque X est dénombrable à l'infini. On appelle $N_\infty(f)$ la borne inférieure des nombres M tels que $|f(x)| \leq M$ localement presque partout ; et on appelle $\mathcal{L}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions telles que

$N_\infty(f) < +\infty$. $N_\infty(f)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$ et ici encore on passe au quotient L^∞ de $\mathcal{L}^\infty$ par le sous-espace des fonctions localement presque partout nulles. L^∞ est un espace normé, dans lequel $\dot{C}$ n'est pas dense.

Pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on démontre que $\mathcal{L}^p$ est complet ; les L^p sont donc des espaces de Banach. L'inégalité de Hölder

$$N_1(fg) \leqslant N_p(f)\; N_q(g) \qquad \text{pour} \quad q = p/(p-1)$$

permet d'établir que L^q est le dual de L^p ; lorsque $p < \infty$, L^p est alors le dual de L^q . L^∞ est le dual de L^1 , mais la réciproque n'est pas vraie.

§ 2 - CAS DES FONCTIONS VECTORIELLES.

On étend tous les résultats qui précèdent au cas où les fonctions définies dans X sont à valeurs, non plus dans R , mais dans un espace de Banach E . Au lieu de raisonner sur les valeurs absolues des fonctions envisagées, on raisonne sur leurs normes en tant que vecteurs de E .

Ainsi pose-t-on :

$$N_p(\vec{f}) = \left(\int^* \| f(x) \|^p \; dx \right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < +\infty)$$

On appelle $C(E)$, $\mathcal{L}^p(E)$ et $L^p(E)$ les espaces correspondants. $\mathcal{L}^\infty(E)$ est l'espace des fonctions mesurables dont la norme dans E est localement presque partout bornée. L'inégalité de Hölder est encore valable et on démontre que les $L^p(E)$ sont complets. Ce sont donc aussi des espaces de Banach.

On peut munir canoniquement le dual E' de E d'une structure d'espace de Banach et définir ensuite les espaces $L^p(E')$. Il est alors possible de définir un produit scalaire entre $L^p(E)$ et $L^q(E')$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Convenons de noter $\overleftarrow{e'}$ un élément générique de E' . Si $\dot{\vec{f}} \in L^p(E)$ et si $\dot{\overleftarrow{g}} \in L^q(E')$, on peut poser

$$\left\langle \dot{\vec{f}} , \dot{\overleftarrow{g}} \right\rangle = \int \left\langle \vec{f}(x) , \overleftarrow{g}(x) \right\rangle dx ,$$

où $\vec{f}$ et $\overleftarrow{g}$ sont deux éléments des classes $\dot{\vec{f}}$ et $\dot{\overleftarrow{g}}$ respectivement.

On voit que ceci définit une application de $L^q(E')$ dans $(L^p(E))'$. C'est même une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les normes. Cependant, dans le cas général, ce n'est pas un épimorphisme et $L^q(E')$ n'est pas le dual de $L^p(E)$. Ces considérations restent valables pour $p = 1$ et $q = \infty$.

N°2 - RELATIONS ENTRE $L^p(E)$ et $L^p \otimes E$

Soit E un espace de Banach.

LEMME - Quelle que soit la fonction $\vec{f}$, à valeurs dans E, continue et à support compact dans X, on peut approcher uniformément f par des fonctions de la forme $\sum_\nu f_\nu \vec{e}_\nu$, où $\vec{e}_\nu \in E$ et où les f_ν ont leur support contenu dans un voisinage arbitraire du support de $\vec{f}$ et sont continues dans X.

Nous nous bornerons à esquisser la démonstration (Pour la démonstration rigoureuse, voir Bourbaki, Livre VI, Chap. III, § 2, Lemme 2) . On construit une partition de l'unité $\{g_\nu(x)\}$ subordonnée à un recouvrement fini $\{\Omega_\nu\}$ du support K de f, recouvrement par des ouverts relativement compacts choisis de telle sorte que l'oscillation de $\vec{f}$ dans chacun de ces ouverts n'excède pas $\varepsilon > 0$. Ceci est possible, car $\vec{f}$ est uniformément continue dans K. Soit alors x_ν un point quelconque de Ω_ν pour chaque ν. On a $\vec{f}(x) = \sum_\nu \vec{f}(x)\, g_\nu(x)$ et donc en posant $\vec{e}_\nu = \vec{f}(x_\nu)$, $f_\nu = g_\nu$:

$$\left\| \vec{f}(x) - \sum_\nu \vec{f}(x_\nu)\, g_\nu(x) \right\| \leqslant \sum_\nu \left\| \vec{f}(x) - \vec{f}(x_\nu) \right\| g_\nu(x) \leqslant \varepsilon$$

PROPOSITION 1 - $L^p \otimes E$ est un sous-espace partout dense dans $L^p(E)$, pour $p \geqslant 1$ fini.

Il existe une application canonique (bilinéaire) de $L^p \times E$ dans $L^p(E)$; c'est l'application $(\dot{f}, \vec{e}) \longrightarrow \dot{f}\vec{e}$. Elle est évidemment continue puisque $N_p(\dot{f}\vec{e}) = N_p(\dot{f}) \cdot \|\vec{e}\|$. Il lui correspond donc une application linéaire continue de $(L^p \otimes E)_\pi$ dans $L^p(E)$.

D'autre part, il est aisé de voir que cette application, qui n'est autre que :

$$\sum_\nu \dot{f} \otimes \vec{e}_\nu \longrightarrow \sum_\nu \dot{f}_\nu \vec{e}_\nu \quad , \text{ est biunivoque.}$$

Nous pouvons en effet prendre les $\vec{e}_\nu \in E$ linéairement indépendants. Supposons alors $\sum_\nu \dot{f}_\nu \vec{e}_\nu = 0$ dans $L^p(E)$. Cela signifie que $\sum f_\nu(x) \vec{e}_\nu$, où $f_\nu \in \dot{f}_\nu$, est presque partout nulle. Or, si cette fonction est nulle en $x \in X$, c'est que $f_\nu(x) = 0$ pour tout ν, puisque les $\vec{e}_\nu$ sont indépendants. Autrement dit, chacune des f_ν est presque partout nulle ; donc les classes $\dot{f}_\nu$ sont nulles, et $\sum_\nu \dot{f}_\nu \otimes \vec{e}_\nu = \vec{0}$. On peut donc identifier (algébriquement, mais non topologiquement), $L^p \otimes E$ au sous-espace M de $L^p(E)$, formé des combinaisons linéaires finies $\sum_\nu f_\nu \vec{e}_\nu$.

Pour prouver la proposition 1, il suffira donc d'établir que le sous-espace M est partout dense dans $L^p(E)$. Mais d'après le lemme, M

est partout dense dans $C(E)$ pour une topologie strictement plus fine que celle de la convergence en moyenne d'ordre p ; et enfin $C(E)$ est partout dense dans $L^p(E)$ pour $p \geqslant 1$ fini.

Interprétation géométrique du sous-espace $L^p \otimes E$ de $L^p(E)$. Les fonctions de toute classe $\dot{f} \in L^p \otimes E$, étant de la forme $\sum_\nu f_\nu(x) \vec{e}_\nu$, prennent leurs valeurs dans un sous-espace F de E de dimension finie, et la réciproque est évidente. $L^p \otimes E$ est donc la réunion des $L^p(F)$ lorsque F parcourt la famille des sous-espaces de E de dimension finie.

Comparaison des normes dans $L^p \otimes E$ et $L^p(E)$. Toute classe $\dot{\vec{f}} \in L^p \otimes E$ possède deux normes. Sa norme $N_p(\dot{\vec{f}})$ dans $L^p(E)$ et sa norme $\|\dot{\vec{f}}\|_\pi$ pour la topologie tensorielle projective sur $L^p \otimes E$. Puisque la norme π est la plus grande des normes donnant la norme 1 à l'application canonique de $L^p \times E$ dans $L^p \otimes E$, nous savons déjà que $\|\dot{\vec{f}}\|_\pi \geqslant N_p(\dot{\vec{f}})$. En général pour $p \neq 1$ (à l'exception des cas triviaux) , $\|\dot{\vec{f}}\|_\pi > N_p(\dot{\vec{f}})$.
