

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Cas des espaces normés. Produit tensoriel d'applications linéaires

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 2, p. 3-7

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A3_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

25 novembre 1953

Exposé n° 2PROPOSITION 1 -

Si U (resp. V) est un voisinage convexe équilibré fermé de 0 de
 E (resp. F) , de jauge p (resp. q) , la jauge de $\Gamma(U \otimes V)$ est donnée par

$$(1) \quad p \otimes q (u) = \begin{cases} \inf. \sum_{\nu} p(\xi_{\nu}) q(\eta_{\nu}) , & \text{pour} \\ u = \sum_{\nu} \xi_{\nu} \otimes \eta_{\nu} \end{cases}$$

Lorsque p (resp. q) parcourt un système fondamental de semi-normes continues
de E (resp. F) , les $p \otimes q$ forment un système fondamental de semi-normes
continues sur $E \otimes F$. On a

$$(2) \quad p \otimes q (\xi \otimes \eta) = p(\xi) q(\eta) .$$

DÉMONSTRATION.

Montrons que $\Gamma(U \otimes V)$ a précisément pour jauge $r = p \otimes q$.
Cette jauge est en effet définie par

$$(3) \quad r(u) = \inf_{\lambda > 0} \lambda \Gamma(U \otimes V) (\lambda)$$

Mais $u \in \lambda \Gamma(U \otimes V)$ équivaut à $u = \sum_{\nu=1}^N t_{\nu} x_{\nu} \otimes y_{\nu}$, $p(x_{\nu}) \leq 1$,
 $q(y_{\nu}) \leq 1$, $\sum |t_{\nu}| \leq \lambda$. Ceci entraîne $u = \sum_{\nu=1}^N \xi_{\nu} \otimes \eta_{\nu}$,
 $\sum_{\nu=1}^N p(\xi_{\nu}) q(\eta_{\nu}) \leq \lambda$, en prenant $\xi_{\nu} = t_{\nu} x_{\nu}$, $\eta_{\nu} = y_{\nu}$.

Réciproquement soit $u = \sum_{\nu=1}^N \xi_{\nu} \otimes \eta_{\nu}$, avec $\sum p(\xi_{\nu}) q(\eta_{\nu}) \leq \lambda$

En posant $x_{\nu} = \frac{\xi_{\nu}}{p(\xi_{\nu})}$, $y_{\nu} = \frac{\eta_{\nu}}{q(\eta_{\nu})}$, $t_{\nu} = p(\xi_{\nu}) q(\eta_{\nu})$ pour les

valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_{\nu}) q(\eta_{\nu}) \neq 0$; $x_{\nu} = N \frac{\xi_{\nu} q(\eta_{\nu})}{\varepsilon}$

$y_{\nu} = \frac{\eta_{\nu}}{q(\eta_{\nu})}$, $t_{\nu} = \frac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles

$p(\xi_{\nu}) = 0$, $q(\eta_{\nu}) \neq 0$; $x_{\nu} = \frac{\xi_{\nu}}{p(\xi_{\nu})}$, $y_{\nu} = N \frac{\eta_{\nu} p(\xi_{\nu})}{\varepsilon}$,

$t_{\nu} = \frac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_{\nu}) \neq 0$, $q(\eta_{\nu}) = 0$

$x_{\nu} = N \frac{\xi_{\nu}}{\varepsilon}$, $y_{\nu} = \eta_{\nu}$, $t_{\nu} = \frac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles

$p(\xi_{\nu}) = q(\eta_{\nu}) = 0$; on obtient toujours une décomposition

$$u = \sum_{\nu=1}^N t_{\nu} x_{\nu} \otimes y_{\nu}, \quad p(x_{\nu}) \leq 1, \quad q(y_{\nu}) \leq 1, \quad \sum_{\nu=1}^N |t_{\nu}| \leq \lambda + \varepsilon.$$

Comme ε est aussi petit qu'on veut, $r(u)$ défini par (3) est bien égal à $p \otimes q(u)$ défini par (1).

Montrons maintenant (2).

$$(1) \text{ donne } (p \otimes q)(\xi \otimes \eta) \leq p(\xi) q(\eta).$$

Il suffit donc de montrer l'inégalité inverse; comme elle est évidente si $p(\xi) q(\eta) = 0$, nous pouvons supposer $p(\xi) q(\eta) \neq 0$.

D'après Hahn-Banach, il existe $X' \in E'$ tel que

$$(4) \quad \begin{aligned} |\langle X', X \rangle| &\leq p(X) \\ \langle X', \xi \rangle &= p(\xi) \end{aligned}$$

De même il existe $Y' \in F'$ tel que

$$(5) \quad \begin{aligned} |\langle Y', Y \rangle| &\leq q(Y) \\ \langle Y', \eta \rangle &= q(\eta) \end{aligned}$$

Alors si $u = \xi \otimes \eta = \sum_j \xi_j \otimes \eta_j$, on a

$$(6) \quad |\langle X' \otimes Y', u \rangle| \leq \sum_j p(\xi_j) q(\eta_j)$$

donc

$$\leq (p \otimes q)(u)$$

mais aussi

$$(7) \quad \langle X' \otimes Y', u \rangle = \langle X', \xi \rangle \langle Y', \eta \rangle = p(\xi) q(\eta) \text{ d'où } p(\xi) q(\eta) \leq (p \otimes q)(u),$$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 2 .

Si E et F sont normés, de normes resp. p et q, il existe sur $E \otimes F$ topologique, une norme et une seule, à savoir $p \otimes q$, ayant la propriété suivante : quel que soit l'espace normé G, l'isomorphisme canonique entre applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G et applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G conserve les normes de ces applications. L'application bilinéaire canonique de $(E)_p \times (F)_q$ dans $(E \otimes F)_{p \otimes q}$ est de norme 1. La norme $p \otimes q$ est appelée norme projective.

Montrons d'abord l'unicité d'une telle norme. Si s et s' sont deux telles normes, comme l'application identique de $(E \otimes F)_s$ dans $(E \otimes F)_s$ est de norme 1, l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_s$ sera de norme 1, (ce qui démontrera la dernière assertion du théorème quand on saura que $s = p \otimes q$) ; alors l'application identique de $(E \otimes F)_{s'}$ dans $(E \otimes F)_s$ sera de norme 1, donc $s \leq s'$; de même $s' \leq s$, donc $s = s'$.

Il suffit donc de voir que $s = p \otimes q$ répond à la question. D'abord c'est une norme, puisque, d'après la prop. 3 elle définit la topologie, et celle-ci est séparée d'après la prop. 2. Soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. Pour simplifier, notons toujours par $\|v\|$ la norme de v dans E, F, $E \otimes F$, relativement aux normes p, q, $p \otimes q$. Pour toute décomposition $u = \sum_j \xi_j \otimes \eta_j$ de $u \in E \otimes F$, on a

$$(8) \quad \|\tilde{B}(u)\| = \left\| \sum_j B(\xi_j, \eta_j) \right\| \leq \|B\| \sum_j \|\xi_j\| \|\eta_j\|$$

donc $\| \tilde{B}(u) \| \leq \| B \| \| u \|$

et par suite $\| \tilde{B} \| \leq \| B \|$.

Par ailleurs

$$(9) \quad \begin{aligned} \| B(\xi, \eta) \| &= \| \tilde{B}(\xi \otimes \eta) \| \\ &\leq \| \tilde{B} \| \| \xi \otimes \eta \| \leq \| \tilde{B} \| \| \xi \| \| \eta \| \end{aligned}$$

(et même =)

Donc $\| B \| \leq \| \tilde{B} \|$

et par suite $\| B \| = \| \tilde{B} \|$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3 .

Si E_i, F_i ($i = 1, 2$) sont des espaces localement convexes, u_i ($i = 1, 2$) des applications linéaires continues de E_i dans F_i , l'application $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ est \mathcal{K} -continue, et si E_i, F_i ($i = 1, 2$) sont normés,

$$(10) \quad \| u_1 \otimes u_2 \| = \| u_1 \| \| u_2 \| .$$

Considérons en effet l'application bilinéaire B de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ définie par

$$(11) \quad B(x_1, x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2) .$$

Il lui correspond une application linéaire \tilde{B} de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$, qu'on appelle $u_1 \otimes u_2$, la seule à vérifier

$$(12) \quad u_1 \otimes u_2 (x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)$$

Comme B est continue (et de norme $= \| u_1 \| \| u_2 \|$ si les E_i, F_i sont normés)*, il en est de même de $u_1 \otimes u_2$ d'après l'exposé n° 1, quand on munit $E_i \otimes F_i$ ($i = 1, 2$) de la topologie \mathcal{K} .

COROLLAIRE - $u_1 \otimes u_2$ se prolonge canoniquement en une application linéaire continue $\widehat{u_1 \otimes u_2}$ de $\widehat{E_1 \otimes E_2}$ dans $\widehat{F_1 \otimes F_2}$.

PROPOSITION 4 - Si u_i est un épimorphisme de E_i sur F_i , $u_1 \otimes u_2$ est un épimorphisme de $E_1 \otimes E_2$ sur $F_1 \otimes F_2$.

D'abord on sait que $u_1 \otimes u_2$ est épijective. Soit alors $\Gamma(U_1 \otimes U_2)$ un voisinage de 0 dans $E_1 \otimes E_2$. Son image par $u_1 \otimes u_2$ est $\Gamma(V_1 \otimes V_2)$, où $V_i = u_i(U_i)$ est un voisinage de 0 dans F_i , puisque u_i est un épimorphisme ; donc $u_1 \otimes u_2$ est bien un épimorphisme.

* A cause de (2)

Mais $u_1 \hat{\otimes} u_2$ est seulement un homomorphisme de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur un sous-espace dense de $F_1 \hat{\otimes} F_2$, et non nécessairement sur $F_1 \hat{\otimes} F_2$. Si les E_i sont métrisables (auquel cas les F_i le sont comme quotients de E_i), $u_1 \hat{\otimes} u_2$ est un épimorphisme, car, dans le cas d'un espace métrisable $G = E_1 \otimes E_2$, le complété d'un quotient de G par un sous-espace fermé V est le quotient du complété \hat{G} par le sous-espace \hat{V} : $(G/V)^\wedge \approx \hat{G}/\hat{V}$.

D'autre part il faudrait se garder de croire que, si u_i est un monomorphisme de E_i dans F_i , $u_1 \otimes u_2$ soit un monomorphisme. Si E_i est un sous-espace topologique de F_i , $E_1 \otimes E_2$ a en général une topologie strictement plus fine que la topologie induite par $F_1 \otimes F_2$.

Produit tensoriel de plusieurs espaces localement convexes.

Définition directe par les applications multilinéaires.

PROPOSITION 7 - L'isomorphisme (algébrique) canonique de $(E \otimes F) \otimes G$ sur $E \otimes F \otimes G$ est un isomorphisme topologique (resp. un isomorphisme d'espaces normés si E, F, G sont normés).

Il suffit de remarquer que si U (resp. V, W) parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans E (resp. F, G), un système fondamental de voisinages de 0 dans les 2 espaces en litige est formé par les

$\bigcap (\bigcap (U \otimes V), W)$ et $\bigcap (U \otimes V \otimes W)$, ce qui est la même chose. Si U (resp. V, W) est l'indicateur de la semi-norme p (resp. q, r) alors on voit que $p \otimes q \otimes r = (p \otimes q) \otimes r$, d'où la propriété relative aux espaces normés.
