L. Schwartz

Produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 1, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954.
-:-:-:-

EXPOSES N^{os} 1 et 2

18 novembre 1953

Exposé n° 1

PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Exposé de L. SCHWARTZ.

THÉORÈME. Si E et F sont deux espaces localement convexes, il existe sur $E \otimes F$ une topologie localement convexe et une seule ayant la propriété suivante : quel que soit l'espace localement convexe G, l'isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G et l'espace vectoriel des applications linéaires de $E \otimes F$ dans G fait correspondre, à l'espace vectoriel $B(E, F ; G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G, l'espace vectoriel $L(E \otimes F ; G)$ des applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G. Cet isomorphisme fait alors correspondre les ensembles équicontinus d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G aux ensembles équicontinus d'applications linéaires de $E \otimes F$ dans G. La topologie ainsi définie sur $E \otimes F$ est la topologie d'espace localement convexe la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ soit continue.

DÉMONSTRATION.

Soit T une topologie répondant aux conditions de l'énoncé. L'application identique de $(E \otimes F)_T$ dans $(E \otimes F)_T$ est continue, donc l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_T$ est continue. Si maintenant T' est une topologie localement convexe sur $E \otimes F$ telle que l'application canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_{T'}$ soit continue, alors l'application identique de $(E \otimes F)_T$ sur $(E \otimes F)_{T'}$ est continue, donc T est plus fine que T'. Nous avons bien montré que T, si elle existe, est la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ soit continue ; et ceci démontre en même temps l'unicité de T.

Montrons maintenant l'existence.

Nous montrerons pour cela

PROPOSITION 1 - Lorsque U (resp. V) parcourt un système fondamental de voisinages de 0 de E (resp. F), $\Gamma(U \otimes V)$, enveloppe convexe équilibrée de $U \otimes V$, parcourt un système fondamental de voisinages de 0 d'une topologie répondant aux conditions de l'énoncé du théorème.

Comme $\Gamma(U \otimes V)$ est convexe, équilibré, absorbant, et que ces ensembles forment une base de filtre, ils définissent bien un système fondamental de voisinages de 0 d'une topologie T localement convexe sur $E \otimes F$.

Soit H une partie équicontinue de $B(E, F; G)$. Il existe alors, pour tout voisinage convexe équilibré W de 0 dans G, des voisinages U, V, de 0 dans E, F tels que, pour toute $B \in H$, on ait $B(U \times V) \subset W$. Si on appelle $\tilde{B}$ l'application linéaire de $E \otimes F$ dans G associée à B, on voit que l'on a, pour toute $\tilde{B} \in \tilde{H}$, $\tilde{B}(U \otimes V) \subset W$, donc, W étant convexe équilibré, $\tilde{B}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$; donc $\tilde{H}$ est une partie équicontinue de $L((E \otimes F)_T ; G)$.

Réciproquement, soit $\tilde{H}$ une partie équicontinue de $L((E \otimes F)_T ; G)$. Quel que soit le voisinage de 0, W, dans G, il existe alors un voisinage de 0 de $(E \otimes F)_T$, que nous pouvons supposer de la forme $\Gamma(U \otimes V)$, tel que $\tilde{B}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$ pour toute $\tilde{B} \in \tilde{H}$. Alors a fortiori $\tilde{B}(U \otimes V) \subset W$, donc $B(U \times V) \subset W$, ce qui prouve que H est une partie équicontinue de $B(E, F; G)$.

C.Q.F.D.

DÉFINITION - La topologie de $E \otimes F$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème sera appelée produit tensoriel projectif des topologies de E et de F, ou topologie tensorielle projective sur $E \otimes F$, et notée $(E \otimes F)_\pi$.

$E \otimes F$ sera toujours, dans cet exposé, muni de cette topologie.

$E \hat{\otimes} F$ sera le complété de $E \otimes F$ pour cette topologie. Si alors G est un espace vectoriel localement convexe complet, toute application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G définit canoniquement une application linéaire continue de $E \hat{\otimes} F$ dans G.

REMARQUE - Le dual de $E \otimes F$ s'identifie par l'application $\tilde{B} \longrightarrow B$ à l'espace $B(E, F)$ des formes bilinéaires continues sur $E \times F$; il en est de même du dual de $E \hat{\otimes} F$. Comme les parties équicontinues de $(E \otimes F)'$ sont alors identifiées aux parties équicontinues de $B(E, F)$, on voit qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans $E \otimes F$ (resp. $E \hat{\otimes} F$) est constitué par les polaires des parties équicontinues de $B(E, F)$, dans la dualité séparante entre $E \otimes F$ (resp. $E \hat{\otimes} F$) et $B(E, F)$.

Ceci aurait pu également servir à montrer l'unicité de la topologie produit tensoriel, et d'ailleurs aussi son existence.

PROPOSITION 2 - Si E et F sont séparés (resp. métrisables), $E \otimes F$ est séparé (resp. métrisable).

Soit en effet $u \neq 0 \in E \otimes F$. Si E et F sont séparés, il existe une forme bilinéaire continue B sur $E \times F$ telle que la forme linéaire associée $\tilde{B}$ sur $E \otimes F$ vérifie $\tilde{B}(u) \neq 0$ [Il existe en effet des sous-espaces de dimension finie E_1, F_1, tels que $u \in E_1 \otimes F_1$; soient E_2, F_2 des supplémentaires topologiques de E_1, F_1. Si B_1 est une forme bilinéaire sur $E_1 \otimes F_1$ telle que la forme linéaire associée $\tilde{B}_1$ vérifie $\tilde{B}_1(u) \neq 0$, on pourra prendre pour B la forme bilinéaire égale à B_1 sur $E_1 \times F_1$, à 0 sur $E_1 \times F_2$, $E_2 \times F_1$, $E_2 \times F_2$]. Comme $\tilde{B}$ doit être continue, cela prouve que u n'est pas adhérent à 0, donc que $E \otimes F$ est séparé.

Si E et F sont métrisables, on peut prendre un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans $E \otimes F$, les $\Gamma(U_\alpha \otimes V_\beta)$, où U_α (resp. V_β) parcourt un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E (resp. F) ; donc $E \otimes F$ est métrisable, et $E \hat{\otimes} F$ est un espace de Fréchet.

-:-:-:-:-:-:-:-