L. SCHWARTZ

Accouplement des distributions à valeurs vectorielles

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 23, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A24_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953-1954
-:-:-:-

9 juin 1954

Exposé n° 23

ACCOUPLEMENT DES DISTRIBUTIONS À VALEURS VECTORIELLES

1.- POSITION DU PROBLEME.

Soient E, F, G trois espaces de Banach, v une application bilinéaire continue $E \times F \longrightarrow G$.

Problème : Peut-on définir un accouplement $(\vec{T}, \vec{\varphi}) \rightarrow \int_{R^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx$

application bilinéaire hypocontinue (relativement à des familles de parties convenables) de $\mathcal{D}'^m(E) \times \mathcal{D}^{m_1}(F)$ dans G, ayant les propriétés suivantes :

1°) Si $\vec{T}$ est une fonction continue $\vec{f}(x)$,

$$\int_{R^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx = \int_{R^n} v(\vec{f}(x), \vec{\varphi}(x))\, dx$$

2°) Si $\vec{T} = T\vec{e}$, $T \in \mathcal{D}'^m$, $\vec{e} \in E$,

$$\int_{R^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx = v(\vec{e}, T(\vec{\varphi}))$$

3°) Si $\vec{\varphi} = \varphi \vec{f}$, $\varphi \in \mathcal{D}^{m_1}$, $\vec{f} \in F$,

$$\int_{R^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx = v(\vec{T}(\varphi), \vec{f})$$

1°/ Cas où $m_1 = m = \infty$. On peut considérer $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}; E)$, et $\vec{\varphi}$ comme élément de $\mathcal{D} \hat{\otimes}_\pi F$; alors le couple $(\vec{T}, \vec{\varphi})$ définit un élément de $E \hat{\otimes}_\pi F$, soit $\langle \vec{T} \underset{,}{\otimes} \vec{\varphi} \rangle = (T \otimes 1_F)(\vec{\varphi})$; v se prolonge en une application $\bar{v} \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F ; G)$; et $\bar{v}(\langle T \underset{,}{\otimes} \varphi \rangle)$ répond à la question.

$$\begin{array}{ccc} \vec{\varphi} \in \mathcal{D} & \hat{\otimes}_{\pi} & F \\ \vec{T}\big\downarrow & & \big\downarrow 1_F \\ E & & F \end{array}$$

2°/Cas où m_1 est fini et $m = m_1$.

On considère $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}^m ; E)$, et $\vec{\varphi}$ comme élément de $\mathcal{D}^m \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$; le couple $(\vec{T}, \vec{\varphi})$ définit alors un élément de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$; mais en général v ne se prolonge pas en une application $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} T \longrightarrow G$. Pour pouvoir définir l'accouplement , nous sommes amenés :

a) ou bien à supposer v intégrale

b) ou bien à faire des hypothèses de régularité supplémentaires sur T ou $\vec{\varphi}$, de manière que le couple $(\vec{T}, \vec{\varphi})$ définisse un élément de $E \hat{\otimes}_{\pi} F$.

C'est ce dont nous nous occuperons dans la suite de l'exposé.

2.- ACCOUPLEMENT DANS LE CAS OÙ E et F SONT DES ESPACES DE BANACH.

Comme $\vec{\varphi}$ est à support compact, on peut se placer sur le tore (le problème est local). On utilise la proposition suivante :

Proposition 1 . L'injection $i : \mathcal{D}^{m+n+1}_{T^n} \longrightarrow \mathcal{D}^{m}_{T^n}$ est nucléaire.

Soit e_{ℓ} la base de $\mathcal{D}^m_{T^n}$ formée des vecteurs trigonométriques ;

$\| e_{\ell} \|_{\mathcal{D}^m} = (1 + 2\pi |\ell|)^m$ (à un facteur fixe près, dépendant de la norme choisie sur $\mathcal{D}^m$).

Soit e'_{ℓ} la base duale de $\mathcal{D}'^m_{T^n}$ ($\langle e'_{\ell}, \varphi \rangle$ est le ℓ-ième coefficient de Fourier.)

$$\| e'_{\ell} \|_{\mathcal{D}'^m} = \frac{1}{(1+2\pi |\ell|)^m}$$

La série

$$\sum \frac{1}{(1+2\pi\,|\ell|)^{n+1}} \quad (1+2\pi|\ell|)^{m+n+1} \quad e'_{\ell} \otimes \frac{e_{\ell}}{(1+2\pi\,|\ell|)^{m}}$$

définit un élément de $\mathcal{D}'^{\,m+n+1}_{T^n} \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{D}^{m}_{T^n}$, donc un opérateur nucléaire i :

$\mathcal{D}^{m+n+1}_{T^n} \longrightarrow \mathcal{D}^{m}_{T^n}$, qui est précisément l'injection cherchée.

Comme $\mathcal{D}^{m}_{T^n}$ vérifie la propriété d'approximation, l'injection i provient d'un élément unique i de $\mathcal{D}'^{\,m+n+1}_{T^n} \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{D}^{m}_{T^n}$

__THEOREME 1__ - __Si__ $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ et $\vec{T} \in \tilde{\mathcal{D}}'^{m}(E)$, __il existe un accouplement__ $(\vec{T}, \vec{\varphi})$ $v(\langle T \otimes \varphi \rangle)$ __qui possède les propriétés voulues.__

$\vec{\varphi}$ étant à support compact, on peut passer sur le tore : il suffit donc de démontrer le théorème pour $\mathcal{D}^{m+n+1}_{T^n}(F)$ et $\mathcal{D}'^{m}_{T^n}(E)$.

$$\begin{array}{ccccc} \alpha = i & \in \mathcal{D}'^{\,m+n+1}_{T^n} & \hat{\otimes}_{\pi} & \mathcal{D}^{m}_{T^n} \\ & \vec{\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow\vec{T} \\ & F & \hat{\otimes}_{\pi} & E \end{array}$$

On considère $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}^{m}_{T^n} ; E)$ et $\vec{\varphi}$ comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}'^{\,m+n+1}_{T^n} ; F)$; alors $(\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i) \in E \hat{\otimes}_{\pi} F$ et $\vec{v}\left[(\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i)\right]$ est l'accouplement cherché.

On a immédiatement : $\boxed{\|v[(\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i)]\| \leq \|v\| \; \|\vec{T}\|_{\mathcal{D}'^{m}_{T^n}} \; \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{m+n+1}_{T^n}} \|i\|_{\pi}}$

3. - __CAS OÙ__ E,F,G __SONT DES E.V.T. COMPLETS QUELCONQUES.__

Les raisonnements précédents sont encore valables, si v est une application bilinéaire __continue__ de $E \times F$ dans G . Mais dans la pratique, les applications bilinéaires sont seulement __hypocontinues.__

Posons $\|i\|_{\pi} = k$. Supposons toujours $\vec{T} \in \check{\mathcal{D}}'^{m}(E)$, $\varphi \in \mathcal{D}^{m+n+1}(F)$, donc à support compact (l'hypothèse $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ est insuffisante, $\vec{\varphi}$ serait seulement scalairement à support compact), ce qui permet ici encore de raisonner le tore.

Soient A_1 (resp. B_1) la boule unité de $\mathcal{D}^m_{T^n}$ (resp. $\mathcal{D}'^{m+n+1}_{T^n}$). L'image par T de A_1 est contenue dans une partie bornée complète A de E, donc T est continue de $\mathcal{D}^m_{T^n}$ dans E_A : de même l'image par $\vec{\varphi}$ de B_1 est contenue dans une partie bornée complète B de F, $\vec{\varphi}$ est continue de $\mathcal{D}'^{m+n+1}_{T^n}$ dans F_B. L'image par $\vec{T} \otimes \vec{\varphi}$ de $i \in \mathcal{D}'^{m+n+1} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^m$ est un élément de $E_A \hat{\otimes}_\pi F_B$; mais si v est supposée <u>séparément continue</u> sur $E \times F$, elle l'est a fortiori sur $E_A \times F_B$, mais comme ce sont des Banach, elle est continue, donc se prolonge en $\bar{v}$ sur $E_A \hat{\otimes}_\pi F_B$, et on peut définir l'accouplement par $\bar{v}((\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i))$ qui est aussi la valeur sur i de l'image réciproque de v par T et φ ; cette image réciproque est séparément continue sur les Banach $\mathcal{D}'^{m+n+1}$ et $\mathcal{D}^m$ donc continue.

L'accouplement ainsi défini ne possède de bonnes propriétés (ne serait-ce que la continuité séparée) que si v est <u>hypocontinue</u> par rapport à des ensembles assez vastes de parties de E et F. Nous supposerons v <u>hypo-continue à la fois par rapport aux parties bornées de</u> E et F. Alors :

<u>Proposition 2</u>. <u>Si</u> $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ et $\vec{T} \in \mathcal{D}'^m(E)$, <u>et si</u> v <u>est une application bilinéaire</u> $E \times F \longrightarrow G$ <u>séparément continue</u>, <u>on peut définir un accouplement</u> $(\vec{T}, \vec{\varphi}) \longrightarrow \int v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx$. <u>Si</u> v <u>est hypocontinue relativement aux parties bornées de</u> E et F, <u>l'accouplement</u> $(\vec{T}, \vec{\varphi}) \longrightarrow \int v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx$ <u>est hypocontinu relativement aux parties bornées de</u> $\mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ <u>et aux parties bornées de</u> $\tilde{\mathcal{D}}'^m(E)$

Raisonnons d'abord sur le tore. Si $\vec{T}$ reste bornée, $\vec{T}(A_1)$ reste dans une partie bornée fixe A de E. Soit W voisinage de 0 dans G. Comme v est hypocontinue relativement aux parties bornées de E, il existe un voisinage de 0, U, de F, tel que $v(A \times U) \subset W$.

Alors v définit une application bilinéaire continue de $E_A \times \hat{F}_U$ dans $\hat{G}_W$, de norme $\leqslant 1$, donc une application linéaire continue de norme $\leqslant 1$ de $E_A \hat{\otimes}_\pi F_U$ dans $\hat{G}_W$.

Comme $\vec{\varphi}_i$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ à partir d'un certain moment on a $\vec{\varphi}_i(B_1) \subset U$, donc $\vec{\varphi}_i$ est de norme $\leqslant 1$ de $\mathcal{D}'^{m+n+1}$ dans $\hat{F}_U$; alors $(T \otimes \varphi)(i)$ est dans $E_A \hat{\otimes}_\pi F_U$, de norme $\leqslant k = \|i\|_\pi$; alors l'image de $\int v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx$ dans $\hat{G}_W$ est de norme $\leqslant k$, donc cet élément de G est dans kW.

C.Q.F.D.

Supposons maintenant qu'on remplace T^n par R^n. On veut démontrer que, si T parcourt une partie bornée de $\mathcal{D}'^m_{R^n}(E)$, les applications $\vec{\varphi} \longrightarrow \int v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx$ de $\mathcal{D}^{m+n+1}_{R^n}(F)$ dans G sont équicontinues. Comme

$\mathcal{D}^{m+n+1}_{R^n}(F)$ (contrairement à $\tilde{\mathcal{D}}^{m+n+1}_{R^n}(F)$) a la topologie limite inductive des $\mathcal{D}^{m+n+1}_K(F)$, K compact $\subset R^n$, il suffit de montrer que les applications précédentes sont équicontinues lorsque $\vec{\varphi}$ garde son support dans un compact fixe. On est alors ramené au tore.

On démontrera de même que si $\vec{\varphi}$ reste bornée dans $\mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ et que $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\tilde{\mathcal{D}}'^m(E)$, $\int v(T, \varphi)\, dx$ converge vers 0 dans G, à cause de l'hypocontinuité de v relativement aux parties bornées de F. Donc l'application étudiée est bien hypocontinue.

REMARQUE

L'hypocontinuité de v par rapport aux parties bornées de E seulement ne suffit pas à entraîner l'hypocontinuité de

$$(\vec{T}, \vec{\varphi}) \longrightarrow \int_{R^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi})\, dx$$ par rapport aux parties bornées de $\tilde{\mathcal{D}}'^m(E)$,

car "hypocontinu" implique, dans sa définition, la continuité séparée par rapport à chaque variable.
