L. Schwartz

Les distributions sommables

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 21, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A22_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Année 1953/1954

-:-:-:-

19 mai 1954

Exposé n° 21

LES DISTRIBUTIONS SOMMABLES

DISTRIBUTIONS A VALEUR VECTORIELLE.

On a interprété le noyau de la transformation identique (exposé n° 11) dans les espaces de distributions du type $\mathcal{H}'^m_c$ comme une fonction $\delta_x(\hat{y})$, la fonction qui, à y, associe la distribution $\delta_x(y)$ masse unité au point y. Alors cette fonction appartient à $\tilde{\mathcal{H}}^m_y(\mathcal{H}'^m_x)_c = \mathcal{H}^m_y \hat{\otimes}_\varepsilon (\mathcal{H}'^m_x)_c$.

Nous pouvons aussi l'interpréter comme une distribution en y par $\varphi(\hat{y}) \longrightarrow \int \delta_x(y)\varphi(y)dy = \varphi(\hat{x})$. Alors elle devient une distribution à valeur vectorielle $\delta_{x;y} = \delta_{x-y}$. Soit K'_x un espace de distributions du type considéré dans l'exposé précédent : cette distribution est la distribution définie par l'application identique de K_y dans K_x ; δ_{x-y} doit donc être considérée comme appartenant à $\tilde{K}'_y(K_x)$.

Ceci fournit une interprétation symétrique des précédentes pour le produit tensoriel de certains espaces, par exemple pour

$$\mathcal{D}^m_y \hat{\otimes}_\varepsilon (\mathcal{D}'^m_x)_c \approx \tilde{\mathcal{D}}^m_y(\mathcal{D}'^m_x)_c \approx (\tilde{\mathcal{D}}'^m_x)_c(\mathcal{D}^m_y)$$

I.- LES ESPACES $\mathcal{D}'^m_{L^1}(E)$:

1.- L'espace $\mathcal{D}'_{L^1}$

$\dot{\mathcal{B}}^m$: ses éléments sont les fonctions m fois continuement différentiables (m fini) et tendant vers zéro à l'infini ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$.

On définit sa topologie comme suit : des f_j tendent vers zéro si les $f_j^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant m$, tendent uniformément en x vers zéro. $\dot{\mathcal{B}}^m$ est un espace de Banach. Son dual est $\mathcal{D}'^m_{L^1}$ l'espace des distributions sommes finies de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de mesures sommables. Le produit scalaire entre ces deux espaces est défini par $(T = \sum_{p \leqslant m} D^p \mu_p$; $T \in \mathcal{D}'^m_{L^1}$; $\varphi \in \dot{\mathcal{B}}^m)$:

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum (-1)^{|p|} \int D^p \varphi . d\mu_p$$

Définition 1 : $\dot{\mathcal{B}}$ est l'espace formé des fonctions indéfiniment dérivables nulles à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées muni de la topoligie définie par les semi-normes $(0 \leq m < +\infty)$ $p^m(f) = \sup_{\substack{t \in R^n \\ |q| \leq m}} |D^q f(t)|$.

C'est un espace du type $(\mathcal{F})$.

Définition 2 : $\mathcal{D}'_{L^1}$ est le dual topologique fort de $\dot{\mathcal{B}}$.

On sait que c'est l'espace des distributions qui sont sommes finies de mesures sommables.

Définition 3 : $\mathcal{B}$ est l'espace formé des fonctions indéfiniment différentiables bornées, muni de la topologie définie par les semi-normes $p^m(f) = \sup_{\substack{t \in R \\ |q| \leq m}} |D^q f(t)|$.

$\dot{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}$.

On a :

PROPOSITION 1.- $\mathcal{B}$ est le dual fort de $\mathcal{D}'_{L^1}$.

Démonstration : Nous allons d'abord prouver l'égalité ensembliste entre $\mathcal{B}$ et $(\mathcal{D}'_{L^1})'$.

Nous avons $\mathcal{B} \subset (\mathcal{D}'_{L^1})'$. Sur les parties bornées de $\mathcal{B}$ nous mettons la topologie induite par $\mathcal{E}$. Dons ces conditions tout élément φ de $\mathcal{B}$ est adhérent à une partie bornée de $\dot{\mathcal{B}}$: on peut trouver une suite de fonctions φ_ν de $\dot{\mathcal{B}}$ telles que : $D^p \varphi_\nu(x) \longrightarrow D^p \varphi(x)$ uniformément en x sur tout compact et pour chaque p , et $|D^p \varphi_\nu(x)| \leq M(p)$ (en prenant $\varphi_\nu(x) = \alpha_\nu(x) \varphi(x)$, α_ν bornée dans $\dot{\mathcal{B}}$ et convergent vers 1 dans $\mathcal{E}$).

Soit $T \in \mathcal{D}'_{L^1}$ $(T = \sum_{p \leq m_0} (-1)^p D^p \mu_p)$. Etant donné ε il existe un compact I tel que $\sum \int_I |d\mu_p| \leq \frac{\varepsilon}{\sup_{|p| \leq m_0} M(p)}$ alors

$$\left| \langle T , \varphi_\nu \rangle - \sum_{p \leq m_0} (-1)^{|p|} \int_I D^p \varphi_\nu \, d\mu_p \right| \leq \varepsilon \quad .$$

Mais sur I les $D^p \varphi_\nu$ convergent uniformément vers $D^p \varphi$, et l'on a aussi

$$\left| \sum_{|p| \leq m_0} \int_{R^n} D^p \varphi \, d\mu_p - \sum_{|p| \leq m_0} \int_I D^p \varphi \, d\mu_p \right| \leq \varepsilon .$$

Donc les $\langle T , \varphi_\nu \rangle$ convergent pour $\nu \longrightarrow \infty$ vers $\sum_{|p| \leq m_0} \int_{R^n} (-1)^{|p|} D^p \varphi \, d\mu_p$. Comme les $\langle T , \varphi_\nu \rangle$ ne dépendent pas de l'expression

$\sum_{|p|\leqslant m} D^p \mu_p$ utilisée pour T, et que la limite trouvée $\sum_{|p|\leqslant m_0} \int_{R^n} (-1)^{|p|} D^p \varphi \, d\mu_p$ ne dépend pas de la suite φ_ν utilisée, nous pouvons poser

$$\langle T , \varphi \rangle = \lim_{\nu \to \infty} \langle T , \varphi_\nu \rangle = \sum_{|p|\leqslant m_0} \int_{R^n} (-1)^{|p|} D^p \varphi \, d\mu_p ,$$

la valeur de $\langle T , \varphi \rangle$ étant indépendante des procédés utilisés pour la définir.

$\langle T , \varphi \rangle$ est une fonction continue de T, pour φ fixée.

En effet lorsque les φ_ν parcourent un ensemble borné de $\mathcal{B}$ les fonctionnelles $T \to \langle T , \varphi_\nu \rangle$ sont équicontinues sur $\mathcal{D}'_{L^1}$, donc $\langle T , \varphi \rangle$ est elle aussi continue. Plus généralement nous voyons que toute partie bornée de $\mathcal{B}$, étant l'adhérence, dans $\mathcal{B}$ d'une partie bornée de $\mathcal{B}$ pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{D}'_{L^1}$, est équicontinue sur $\mathcal{D}'_{L^1}$.

Enfin si φ_ν converge vers 0 dans $\mathcal{B}$, $\langle T , \varphi_\nu \rangle$ converge vers 0 uniformément lorsque T reste bornée dans $\mathcal{D}'_{L^1}$, car pour un ensemble borné de $\mathcal{D}'_{L^1}$, la décomposition $T = \sum_{|p|\leqslant m_0} D^p \mu_p$ fait intervenir un m_0 fixe, et des μ_p telles que $\int_{R^n} |d\mu_p|$ reste borné. Donc $\mathcal{B} \subset (\mathcal{D}'_{L^1})'$, avec une topologie plus fine.

Prouvons maintenant $\mathcal{B} \supset (\mathcal{D}'_{L^1})'$

$\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'_{L^1}$ avec une topologie plus fine, on a donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' \subset \mathcal{E}$. C'est un espace de fonctions. Soit φ un de ses éléments. Nous considérons l'ensemble des masses $\delta_x(a)$, $(a \in R^n)$. C'est un ensemble borné de $\mathcal{D}'_{L^1}$, donc

$$\sup_{a \in R^n} |\langle \varphi , \delta_x(a) \rangle| = \sup_{a \in R^n} | \varphi(a) | < +\infty .$$

Et de même, en considérant l'ensemble des distributions $D^p \delta_x(a)$ $(a \in R^n)$ on voit que $\sup_{a \in R^n} |D^p \varphi(a)| < +\infty$ pour chaque p. Ceci implique $\varphi \in \mathcal{B}$, donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' \subset \mathcal{B}$.

<u>Topologie forte du dual.</u> Dire que $\varphi_\nu \to 0$ c'est dire que $\langle \varphi_\nu , T \rangle \to 0$ uniformément en T lorsque T parcourt un borné, or les bornés considérés au dessus montrent que ceci veut dire que $\sup_{a \in R^n} |D^p \varphi_\nu(a)| \to 0$ pour chaque p. Donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' \subset \mathcal{B}$, avec une topologie plus fine ; donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' = \mathcal{B}$, algébriquement et topologiquement.

INTÉGRALE D'UNE DISTRIBUTION SOMMABLE.

Définition 4 : Soit $T_x \in \mathcal{D}'_{L^1}$. Par définition $\int T_x dx = \langle T , 1 \rangle$. T_x est dite sommable.

L'intégrale, en vertu de sa défintion, est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}'_{L^1}$.

Définition 5 : On dira que $\langle T , \varphi \rangle$ a un sens (T est une distribution, et φ un élément de $\mathcal{E}$) si φT est sommable.

On pose $\langle T , \varphi \rangle = \int T_x \varphi(x) dx$.

Ceci permet d'écrire la dualité entre certains espaces fonctionnels sous forme d'intégrale.

Exemple : La dualité entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Si $T_x \in \mathcal{S}'_x$, $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ alors $\varphi T \in \mathcal{O}_c' \subset \mathcal{D}'_{L^1}$ donc $\int T_x \varphi(x) dx$ existe et c'est justement

$$\langle T, \varphi \rangle \quad \text{car} \quad \langle \varphi T , 1 \rangle = \langle T , \varphi \rangle \quad .$$

II.- LES ESPACES $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe complet.

Définition 6 : $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$ est l'espace des distributions à valeur dans E scalairement sommables (scalairement dans $\mathcal{D}'_{L^1}$) .

On a l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E) \approx \mathcal{L}(\dot{\mathcal{B}} \,; E)$. On en profite pour munir cet espace de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\dot{\mathcal{B}}$ (resp. sur les parties bornées).

Le premier de ces deux espaces peut être interprété en produit tensoriel

$$(\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1})_c(E) \approx (\mathcal{D}'_{L^1})_c \hat{\otimes}_\varepsilon E$$

INTÉGRALE D'UNE DISTRIBUTION A VALEURS VECTORIELLES.

Un élément $\vec{T}$ de $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$ définit une application continue $L_{\vec{T}} : \dot{\mathcal{B}} \longrightarrow E$. Par bitransposition on en déduit une application ${}^{tt}L_{\vec{T}} : \mathcal{B} \to E''$ (ou $\mathcal{B}_c \to E''_c$) .

Définition 7 : $\int T_x dx = {}^{tt}L_{\vec{T}}(1)$.

C'est un élément de E'' . Il est en général impossible de faire mieux : soit $E = \dot{\mathcal{B}}$ et $\vec{T}$ le noyau de l'identité δ_{x-y} : $\vec{T} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(\dot{\mathcal{B}})$. Le prolongement de T est l'application identique de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. En particulier $\int T_x dx = 1 \in \mathcal{B}$ mais $\notin \dot{\mathcal{B}}$.

Dans certains cas importants pour la pratique $\int T_x dx = 1$ appartient à E. Il en est ainsi si $E = E''$.

Définition 8 : On dira que $\vec{T}$ est strictement sommable lorsqu'elle définit une application de $\dot{\mathcal{B}}$ dans E continue sur les parties bornées de $\dot{\mathcal{B}}$ pour la topologie induite par $\mathcal{E}$. Alors T applique $\mathcal{B}$ dans E, en particulier $\int T_x dx \in E$.

Lorsque E est un Montel cette condition est remplie, puisque T est même continue de $\mathcal{B}_c$ dans E.

Conditions suffisantes de stricte sommabilité.

PROPOSITIONS 2.- Soit $\vec{T} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$.

Si 1°) $\vec{T} = \alpha \vec{S}$ avec $\vec{S} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^{p'}}(E)$, $\alpha \in \mathcal{D}_{L^p}$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - 1 = 0$, $p, p' \neq 1, \infty$

ou si 2°) $\vec{T} = \alpha \vec{S}$ avec $\vec{S} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$, $\alpha \in \dot{\mathcal{B}}$

alors $\vec{T}$ est strictement sommable.

Démonstration : Soit φ_ν un ensemble borné de fonctions de $\mathcal{B}$.

$\langle \alpha \vec{S}, \varphi_\nu \rangle = \langle \vec{S}, \alpha \varphi_\nu \rangle \in E$. Lorsque $\varphi_\nu \to 0$ pour la topologie induite par $\mathcal{E}$ en restant bornée dans $\mathcal{B}$:

1°) alors $\alpha \varphi_\nu \to 0$ dans $\mathcal{D}_{L^p}$ donc $\langle \vec{S}, \alpha \varphi_\nu \rangle \to 0$.

2°) $\alpha \varphi_\nu \in \dot{\mathcal{B}} \to 0$ dans $\dot{\mathcal{B}}$ donc $\langle \vec{S}, \alpha \varphi_\nu \rangle \to 0$.

Continuité de l'intégrale.

PROPOSITION 3.- $\vec{T} \to \int \vec{T}_x dx$ est une application continue de $\mathcal{D}'_{L^1}(E)$ dans $E''_{\mathcal{E}}$.

III.- LE THÉORÈME DE FUBINI.

Intégrale partielle d'une distribution par rapport à une variable.

Une distribution de deux variables $T_{x,y}$ peut être considérée comme un élément de $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y)$.

Définition 9 : $T_{x,y}$ est partiellement sommable par rapport à x si elle appartient à $(\mathcal{D}'_{L^1})_x(\mathcal{D}'_y)$.

PROPOSITION 4.- L'intégrale en x d'une distribution de deux variables sommable par rapport à une variable x, est une distribution en y.

C'est parce que $\mathcal{D}'_y$ est réflexif.

THÉORÈME 1 (de Fubini) : Soit $T_{x,y} \in (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ une distribution de deux variables, sommable. Alors

1°) elle est sommable en x ;

2°) la distribution $\int T_{x,y}dx$ est sommable en y ;

3°) $\int dy \int T_{x,y}dx = \int dx \int T_{x,y}dy = \iint T_{x,y}dxdy$.

Démonstration : Nous allons prouver le résultat suivant :

$$(1) \qquad (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y} \approx (\mathcal{D}'_{L^1})_x \hat{\otimes}_\pi (\mathcal{D}'_{L^1})_y$$

Ce résultat implique le théorème.

Soit en effet $T \in (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$. Elle appartient à $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \hat{\otimes}_\pi (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ donc a fortiori à $((\mathcal{D}'_{L^1})_x)_c \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}'_y$, donc est sommable en x, et $\int T_{x,y}dx \in \mathcal{D}'_y$; de plus, $T \longrightarrow \int T_{x,y}dx$ est continue de $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ dans $\mathcal{D}'_y$ et coïncide sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ avec le produit tensoriel $\int_x \otimes 1_y$ de l'intégrale, forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x$, par 1_y, identité dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_y$; donc ces 2 applications sont égales. Cela prouve que $\int T_{x,y}dx \in (\mathcal{D}'_{L^1})_y$, et que $T \longrightarrow \int dy \int T_{x,y}dx$, composée de $\int_y$ avec $\int_x \otimes 1_y$, n'est autre que $\int_x \otimes \int_y$.

On a alors par symétrie $\int dx \int T_{x,y}dy = \int dy \int T_{x,y}dx = (\int_x \otimes \int_y)(T)$. De plus, $\int_x \otimes \int_y$ et $\iint_{x\,y}$ sont continues sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ et coïncident sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ donc sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$.

Il nous reste à montrer (1).

1°) $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ est dense dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ pour la topologie de ce dernier espace. En effet $\mathcal{E}'_{x,y}$ est dense, et $\mathcal{E}'_x \otimes \mathcal{E}'_y$ dense dans $\mathcal{E}'_{x,y}$.

2°) Désignons par K la topologie de $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$, K est plus fine que π, sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$. Un élément du dual de π sera en particulier une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{E}'_x \times \mathcal{E}'_y \approx \mathcal{E}'_{x,y}$. C'est donc une fonction indéfiniment différentiable φ. De plus l'ensemble des mesures de Dirac de $(\mathcal{D}'_{L^1})_x$ et $(\mathcal{D}'_{L^1})_y$ sont bornés, donc φ est bornée ; en raisonnant ensuite sur les $D^p \delta_x(a)$ et $D^q \delta_y(b)$, on voit que toute dérivée de φ est bornée,

$\varphi \in \mathcal{B}_{x,y}$. Pour la même raison, un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \times (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ est nécessairement une partie bornée de $\mathcal{B}_{x,y}$. Donc la topologie π , topologie de la convergence uniforme sur les ensembles équicontinus de formes bilinéaires, est moins fine que K , convergence uniforme sur toutes les parties bornées de $\mathcal{B}_{x,y}$.

3°) π <u>est plus fine que K sur</u> $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$.

Le produit direct des distributions $(S_x , T_y) \to S_x \otimes T_y$ applique $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \times (\mathcal{D}'_{L^1})_y \longrightarrow (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$. Cette application étant séparément faiblement continue, et appliquant le produit de deux duals de Fréchet dans un dual de Fréchet est donc continue[1], or elle s'identifie à l'application canonique $(S_x , T_y) \to S_x \otimes T_y$, donc π est plus fine que K .

Finalement nous avons prouvé $\pi = K$, alors en vertu de 1°), le théorème est démontré.

---

(1) - Mémoire Dieudonné-Schwartz sur les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$.