L. Schwartz

Propriétés de $E\widehat{\otimes}F$ pour E nucléaire

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 19, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A20_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

5 mai 1954

Exposé n° 19

PROPRIÉTÉS DE $E \hat{\otimes} F$ POUR E NUCLÉAIRE.

THÉORÈME 1.- *Si E est nucléaire, F localement convexe séparé arbitraire, toute forme bilinéaire continue B sur $E \times F$ admet une décomposition*

$$B = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} \, x'_{\nu} \otimes y'_{\nu} \tag{1}$$

où $\sum_{\nu} |\lambda_{\nu}| < \infty$, x'_{ν} (resp. y'_{ν}) équicontinues dans E' (resp. F'), et convergeant vers 0. De plus si B parcourt une partie équicontinue H' convexe équilibrée de $\mathcal{B}(E,F)$, on peut prendre les λ_{ν} et x'_{ν} fixes, et trouver des applications linéaires θ_{ν} de normes $\leqslant 1$ de $(\mathcal{B}(E,F))_{H'}$ dans $F'_{A'}$, A' équicontinue de F', telles que (1) soit valable pour toute $B \in H'$ avec $y'_{\nu} = \theta_{\nu}(B)$.

DÉMONSTRATION.

L'application $\tilde{B}$, associée à B, de E dans F', est continue de norme $\leqslant 1$ d'un E_U dans un $F'_{A'}$. Comme E est nucléaire, il existe $V \subset U$ tel que $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ soit nucléaire, donc l'injection de E_V dans E_U peut s'écrire

$$1 = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} x'_{\nu} \otimes Z_{\nu} \quad , \quad x'_{\nu} \in (E_V)' = E'_{V^\circ} \quad , \quad Z_{\nu} \in \hat{E}_U \; . \tag{2}$$

Alors l'application $E_V \longrightarrow F'$, factorisée en $E_V \longrightarrow E_U \longrightarrow F'_{A'} \longrightarrow F'$ s'écrit

$$\tilde{B} = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} x'_{\nu} \otimes \tilde{B}(Z_{\nu}) \tag{3}$$

En considérant $\tilde{B}(Z_{\nu}) = y'_{\nu}$ comme élément de $F'_{A'} \subset F'$ ($F'_{A'}$ étant complet) et en revenant à B, (3) donne (1). De plus si B parcourt H' équicontinue de $\mathcal{B}(E,F)$, on peut choisir U, V, A' fixes, donc les λ_{ν}, x'_{ν}, Z_{ν} fixes. On définira, pour tout ν, $\theta_{\nu} \in \mathcal{L}((\mathcal{B}(E,F))_{H'} \, ; F'_{A'})$ par

$$\theta_{\nu}(B) = \tilde{B}(Z_{\nu}) \tag{4}$$

et le théorème est démontré.

Il existe des variantes évidentes de ce théorème, obtenues en considérant des applications linéaires à la place de formes bilinéaires :

THÉORÈME 1 bis.- Si E est nucléaire, F localement convexe séparé arbitraire, toute application $\mathcal{E}$-bornée de F dans E' admet une décomposition

$$u = \sum_{\nu} \lambda_\nu f'_\nu \otimes e'_\nu \tag{5}$$

où $\sum_\nu |\lambda_\nu| < \infty$, f'_ν (resp. e'_ν) équicontinues dans F' (resp. E') et convergeant vers 0. De plus si u parcourt une partie $\mathcal{E}$-équibornée M de $\mathcal{L}(F;E')$, on peut prendre les λ_ν et e'_ν fixes, et trouver des applications linéaires θ_ν de normes ≤ 1 de $(\mathcal{L}(F;E'))_M$ dans $F'_{A'}$, A' équicontinue dans F', telles que (5) soit valable pour toute $u \in M$ avec $f'_\nu = \theta_\nu(u)$.

Il y a en effet correspondance biunivoque entre formes bilinéaires continues sur $E \times F$ et applications $\mathcal{E}$-bornées de F dans E'.

THÉORÈME 1 ter.- Si E est nucléaire, F localement convexe quasi-complet, toute application bornée de E dans F admet une décomposition

$$u = \sum \lambda_\nu e'_\nu \otimes f_\nu \quad , \tag{6}$$

où $\sum_\nu |\lambda_\nu| < \infty$, e'_ν équicontinues et convergeant vers 0 dans E', f_ν bornées et convergeant vers 0 dans F. De plus si u parcourt une partie équibornée M de $\mathcal{L}(E;F)$, on peut prendre les λ_ν et e'_ν fixes, et trouver des applications linéaires θ_ν de norme ≤ 1 de $(\mathcal{L}(E;F))_M$ dans F_A, A bornée équilibrée convexe de F telles que (6) soit valable pour toute $u \in M$, avec $f_\nu = \theta_\nu(u)$.

Il suffira de refaire la démonstration du théorème 1, avec une factorisation

$$E \longrightarrow E_V \longrightarrow E_U \longrightarrow F_A \longrightarrow F \quad , \quad \hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U \text{ nucléaire.} \tag{7}$$

(En réalité, si les applications de M sont $\mathfrak{S}$-équibornées, $\mathfrak{S}$ étant une famille de parties bornées de F, on peut supposer que A est une partie appartenant à $\mathfrak{S}$ et sous cette forme c'est le théorème 1 ter qui contient tous les autres).

THÉORÈME 2.- Si E et F sont des espaces de Fréchet, E nucléaire, tout élément de $E \hat{\otimes} F$ admet une décomposition,

$$X = \sum_\nu \lambda_\nu e_\nu \otimes f_\nu \quad , \tag{8}$$

où $\sum_\nu |\lambda_\nu| < \infty$, e_ν et f_ν convergeant vers 0. De plus si X parcourt une partie bornée M de $E \hat{\otimes} F$, on peut prendre les λ_ν et e_ν fixes, et trouver des applications linéaires continues de norme ≤ 1 θ_ν de $(E \hat{\otimes} F)_M$

<u>dans F_A, A partie bornée convexe équilibrée de F, telles que (8) soit valable pour toute $X \in M$ avec $f_\nu = \theta_\nu(X)$.</u>

En effet $\tilde{X}$ est une application linéaire continue de E' dans F ; d'après un théorème connu sur les espaces $\mathcal{F}$ (Mémoire Dieudonné-Schwartz sur les $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$) une telle application est bornée ; si $X \in M$, $\tilde{X}$ parcourt une partie équicontinue donc équibornée de $\mathcal{L}(E';F)$. Comme E' est nucléaire, il suffit d'appliquer 1 ter.

<u>EXEMPLE.</u>- $E = \mathcal{D}_{T^n}$, espace $\mathcal{D}$ du tore T^n ; F Fréchet. Toute $\varphi \in \mathcal{D} \hat{\otimes} F = \mathcal{D}(F)$ admet un développement de Fourier.

(9)
$$\vec{\varphi} = \sum_\nu \vec{a_\nu}(\vec{\varphi})\ e^{2i\pi\nu.x}$$

La suite des $\vec{a_\nu}$ est à décroissance rapide dans F (son produit par $|\nu|^k$ est borné). Si alors $\vec{\varphi}$ parcourt une partie bornée M de $\mathcal{D}(F)$ l'ensemble des valeurs de $\vec{\varphi}$ est contenu dans une partie bornée B_0 de F ; de même l'ensemble des valeurs de la dérivée $D^p\vec{\varphi}$ dans une partie bornée B_p ; il existe une partie bornée B convexe équilibrée fermée, qui les absorbe toutes (axiome de dénombrabilité de Mackey pour les Fréchets). On peut donc dire que $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(F_B)$ et raisonner en remplaçant le Fréchet F par le Banach F_B ; nous poserons donc $F = F_B$. D'autre part, pour $\vec{\varphi} \in M$, la suite des $\vec{a_\nu}(\vec{\varphi})$ est à décroissance uniformément rapide, en ce sens que pour tout k fixé, l'ensemble des $|\nu|^k \|\vec{a_\nu}(\vec{\varphi})\|$ est borné pour $\vec{\varphi} \in M$ et $\nu \in Z^n$. La suite

(10)
$$c_\nu = \sup_{\vec{\varphi} \in M} \|\vec{a_\nu}(\vec{\varphi})\|$$

est donc une suite $\geqslant 0$ à décroissance rapide.

Alors, pour $\vec{\varphi} \in M$:

(11)
$$\vec{\varphi} = \sum_\nu \sqrt{c_\nu}\ (\sqrt{c_\nu}\ e^{2i\pi\nu.x})\ \frac{\vec{a_\nu}(\vec{\varphi})}{c_\nu},$$

de sorte que si l'on pose $\lambda_\nu = \sqrt{c_\nu}$, $e_\nu = \sqrt{c_\nu}\ e^{2i\pi\nu.x}$, $\theta_\nu(\vec{\varphi}) = \dfrac{\vec{a_\nu}(\vec{\varphi})}{c_\nu}$, on a une décomposition (8).

<u>COROLLAIRE.</u>- <u>Si E et F sont des Fréchets, E nucléaire, toute partie bornée de $E \hat{\otimes} F$ est contenue dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée du produit tensoriel d'une partie bornée de E et d'une partie bornée de F.</u>

<u>REMARQUE.</u>- On démontre qu'on peut améliorer les théorèmes précédents par des propriétés de "décroissance rapide". Par exemple, dans le théorème 2 on peut faire en sorte que la suite $|\lambda_\nu|$ soit à décroissance rapide, que la suite des

e_ν soit à décroissance rapide dans E , et que la suite des normes des θ_ν soit à décroissance rapide. C'est ce qu'on obtiendra dans l'exemple donné de $\mathcal{D}_{T^n}(F)$, en prenant la formule

$$(12) \qquad \vec{\varphi} = \sum_\nu c_\nu^{1/4} (c_\nu^{1/4} e^{2i\pi\nu.x}) \frac{\vec{a}_\nu(\vec{\varphi})}{c_\nu^{\frac{1}{2}}}$$

THÉORÈME 3.- Si E et F sont des Fréchets, E nucléaire, $\mathcal{B}(E,F) \approx (E \hat{\otimes} F)'$ muni de la topologie de la convergence bornée sur $E \hat{\otimes} F$, est isomorphe à $E' \hat{\otimes} F'$

En effet, algébriquement, $\mathcal{B}(E,F) = \mathcal{L}(E;F')$ (parce que, E et F étant des Fréchets, toute application continue de E dans F' est bornée donc ε-bornée)

On sait alors que $E' \hat{\otimes} F'$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E;F')$ muni de la topologie de la convergence bornée, du fait que E' est nucléaire ; mais la topologie de la confergence bornée dans $\mathcal{L}(E;F')$ équivaut dans $\mathcal{B}(E,F)$ à la topologie de la convergence uniforme sur les produits tensoriels de partiesbornées de E et F , elle-même équivalente à la convergence bornée sur $E \hat{\otimes} F$ en vertu du corollaire du théorème 2 .

On a donc, si E et F sont des Fréchets, E nucléaire, les isomorphismes suivants (la topologie d'un dual étant la topologie forte, la topologie de $\mathcal{L}(E;F)$ celle de la convergence bornée, la topologie de $\mathcal{B}(E,F)$ celle de la convergence bornée sur $E \hat{\otimes} F$ ou sur les produits tensoriels de partiesbornées):

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(E;F) \approx E' \hat{\otimes} F \\ \mathcal{L}(F;E) \approx F' \hat{\otimes} E \\ \mathcal{B}(E,F) \approx E' \hat{\otimes} F' \approx (E \hat{\otimes} F)' \end{cases}$$

Si E , F , G sont 3 Fréchets, E et F nucléaires, on a

$$(14) \qquad \mathcal{B}(E,F;G) \approx \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G)) \approx \mathcal{L}(F;\mathcal{L}(E;G)) \approx E' \hat{\otimes} F' \hat{\otimes} G$$