L. Schwartz

Espaces nucléaires. Propriétés de permanence et exemples

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 18, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A19_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

31 mars 1954

Exposé n° 18

ESPACES NUCLÉAIRES. PROPRIÉTÉS DE PERMANENCE ET EXEMPLES.

PROPOSITION 1 .- Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit nucléaire est que $\hat{E}$ le soit.

PROPOSITION 2.- Si une application de E dans F est polynucléaire (composée de deux opérateurs nucléaires au moins), et si l'image de E est contenue dans un sous-espace complet F_1 de F, alors l'application de E dans F_1 est nucléaire.

Par hypothèse, on a $E \to G \to F$, les deux applications étant nucléaires. Comme un opérateur nucléaire est intégral, on peut factoriser en $E \to G \to H \to \hat{F}$ où H est un Hilbert, donc $E \to H \to \hat{F}$, avec $E \to H$ nucléaire. L'image de E est alors un sous-espace H_1 de H. Et comme $\overline{H}_1$ s'applique dans F_1, on a $E \to \overline{H}_1 \to F_1 \to F$. Comme $\overline{H}_1$ est un facteur direct de H, $E \to \overline{H}_1$ est nucléaire, d'où le résultat.

PROPOSITION 3.- Si une application de E dans F complet est polynucléaire, et si elle applique un sous-espace fermé E_1 de E sur zéro, alors l'application quotient de E/E_1 dans F est nucléaire.

On peut factoriser en $E \to H \to G \to F$, G complet, H hilbertien, $G \to F$ nucléaire donc $E \to H \to F$, avec $H \to F$ nucléaire. E_1 s'applique dans H_1, donc dans $\overline{H}_1$ (qui donne zéro). Il en résulte que E/E_1 s'applique dans $H/\overline{H}_1$ et que l'on a $E \to E/E_1 \to H/\overline{H}_1 \to F$.

Comme $\overline{H}_1$ est facteur direct, $H/\overline{H}_1 \to F$ est nucléaire, d'où le résultat.

PROPOSITION 4.- Si E est nucléaire, tout sous-espace vectoriel E_1 de E est nucléaire.

Tout voisinage U_1 de E_1 peut être défini comme $U \cap E_1$, où U est un voisinage de E. Comme E est nucléaire, il existe un voisinage V de E plus petit que U et tel que $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$ soit polynucléaire.

Posons $V_1 = V \cap E_1$:

- d'une part on a $(E_1)^{\wedge}_{V_1} \longrightarrow \hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ (polynucléaire)

- d'autre part $(E_1)^{\wedge}_{V_1}$ a son image dans $(E_1)^{\wedge}_{U_1}$. Donc $(E_1)^{\wedge}_{V_1} \longrightarrow (E_1)^{\wedge}_{U_1}$ est nucléaire. Donc E_1 est nucléaire.

PROPOSITION 5.- Si E est nucléaire, tout quotient E/F, où F est fermé, est nucléaire.

Soit U un voisinage saturé (par rapport à F) de E, $V \subset U$ tel que $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ soit polynucléaire, $\tilde{V}$ le saturé de V. Mais $\hat{E}_{\tilde{V}}$ est un quotient de $\hat{E}_V$, et $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ se factorise $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_{\tilde{V}} \longrightarrow \hat{E}_U$. D'après la proposition 3, $\hat{E}_{\tilde{V}} \longrightarrow \hat{E}_U$ est nucléaire, donc E/F est nucléaire.

PROPOSITION 6.- Tout produit d'espaces nucléaires est nucléaire.

Le dual du produit est la somme directe des E'_i ; les parties équicontinues y sont somme directe d'un nombre fini de parties équicontinues et si A'_i est équicontinue dans E'_i, il existe B'_i équicontinue telle que $(E'_i)_{A'_i} \longrightarrow (E'_i)_{B'_i}$ soit nucléaire, d'où le résultat.

PROPOSITION 7.- Toute somme directe topologique dénombrable d'espaces nucléaires est nucléaire.

On peut supposer les E_i complets. Le dual de $E = \sum E_i$ est $E' = \prod E'_i$. On peut y prendre pour parties équicontinues les produits de parties équicontinues. Posons $A' = \prod_i A'_i$ et soit $B'_i \subset E'_i$, telle que $(E'_i)_{A'_i} \longrightarrow (E'_i)_{B'_i}$ soit nucléaire. Il suffit de montrer que $E'_{A'} \longrightarrow \prod_i (E'_i)_{B'_i}$ est nucléaire.

($\prod_i (E'_i)_{B'_i}$ est un vrai produit dénombrable d'espaces de Banach, $E'_{A'}$ le sous-espace engendré par $\prod_i A'_i$ n'est pas le produit des $(E'_i)_{A'_i}$, c'est d'ailleurs un Banach).

$(E'_i)_{A'_i} \longrightarrow (E'_i)_{B'_i}$ est nucléaire, donc peut être représenté

par $u_i = \sum_n \lambda_{n,i} \; e'_{n,i} \otimes f_{n,i}$

En prenant $e'_{n,i}$ dans la boule unité du dual de $(E'_i)_{A'_i}$ et $f_{n,i}$ dans une boule convenable de $(E'_i)_{B'_i}$, de façon que

$$\sum_n |\lambda_{n,i}| \leqslant \frac{1}{2^i} ,$$

les $e'_{n,i}$ sont tous dans la boule unité de $(E'_{A'})'$ et les $f_{n,i}$ sont bornés (puisque bornés dans chaque composante), C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.- Toute limite projective d'espaces nucléaires est nucléaire (car c'est un sous-espace du produit).

COROLLAIRE 2.- Toute limite inductive dénombrable d'espaces nucléaire est nucléaire (car c'est un quotient de la somme directe).

PROPOSITION 8.- Si E et F sont nucléaires, $E \hat{\otimes} F$ est nucléaire. Car

$$(E \otimes F) \otimes_{\varepsilon} G = E \otimes_{\varepsilon} (F \otimes_{\varepsilon} G) = E \otimes_{\varepsilon} (F \otimes_{\pi} G) = E \otimes_{\pi} (F \otimes_{\pi} G) = (E \otimes F) \otimes_{\pi} G$$

THÉORÈME .- Soit E un espace du type $(\mathcal{F})$; E est nucléaire, si et seulement si son dual fort est nucléaire.

a) Si E est nucléaire et de type $(\mathcal{F})$, E' est nucléaire.

Soit G' le dual d'un Banach, si $G' \longrightarrow E$ est faiblement continue, elle est dans $\mathcal{L}_{\varepsilon}(G'_{\tau}, E) \approx E \hat{\otimes} G$ puisque E est nucléaire. En outre, comme E est de type $(\mathcal{F})$, elle provient d'un élément de $E_A \hat{\otimes} G_B$. Donc $G' \longrightarrow E$ est nucléaire. Soit maintenant $F \longrightarrow E$ une application continue d'un Banach dans E . Posons $F' = G$. La bitransposéee $F'' = G' \longrightarrow E'' = E$ est faiblement continue, donc nucléaire d'après ce que nous venons de voir. Sa restriction à F , soit $F \longrightarrow E$ est nucléaire. Comme E est le dual de E' cela prouve que E' est nucléaire.

b) Si E est de type $(\mathcal{F})$ et si E' est nucléaire, E est nucléaire.

E' est nucléaire donc réflexif; alors E , sous-espace fermé de E'', a le même dual E' , donc $E = E''$, E est réflexif.

Montrons que pour F , Banach quelconque, $E \hat{\otimes}_{\pi} F \longrightarrow E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ est un isomorphisme topologique.

(1) Soit $u \in E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$. L'application $E' \longrightarrow F$ qu'elle définit est continue, donc nucléaire, elle provient donc de $E'' \hat{\otimes}_{\pi} F$ c'est-à-dire de $E \hat{\otimes}_{\pi} F$: tout élément de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ est image d'un élément de $E \hat{\otimes}_{\pi} F$.

Donc $E \hat{\otimes}_{\pi} F \longrightarrow E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ est épijective.

(2) Montrons que $E \hat{\otimes}_{\pi} F \longrightarrow E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ est injective. En passant aux duals, il faut montrer que $J(E,F)$ est dense dans $B(E,F)$, pour la topologie de la convergence simple sur $E \hat{\otimes}_{\pi} F$. Comme tout élément de $E \hat{\otimes}_{\pi} F$ est dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'un produit tensoriel de 2 compacts (car E et F Fréchets), il suffira de montrer que $E' \otimes F' \subset J(E,F)$ est dense dans $B(E,F)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les produits de 2 compacts.

Or un élément de $B(E,F)$ est une application $F \longrightarrow E'$ et un élément de

$E'\otimes F'$ est une application de rang fini $F \longrightarrow E'$. E' est tonnelé puisque réflexif et Schwartz (puisque nucléaire) donc Montel, donc E est Montel, et $E' = E'_c$.

Puisque E'_c est nucléaire, il a la propriété d'approximation, et l'application $F \longrightarrow E'_c$ peut être approchée par des applications de rang fini, donc $E'\otimes F'$ est bien dense dans $B(E,F)$, et $E \hat{\otimes}_\pi F \longrightarrow E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est injective.

Etant à la fois épijective et injective (biunivoque sur), il résulte du théorème des homomorphismes de Banach, que l'application $E \hat{\otimes}_\pi F \longrightarrow E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un isomorphisme topologique.

PROPOSITION 9.- Si E est nucléaire et de type $(\mathcal{F})$ et si F est nucléaire complet, $\mathcal{L}(E;F)$ est nucléaire, et $\mathcal{L}(E;F) \approx E'\hat{\otimes} F$. En effet, E' est nucléaire donc $E'\hat{\otimes} F = \mathcal{L}_\varepsilon(E''_c;F)$ est nucléaire. Mais $\mathcal{L}_\varepsilon(E''_c;F) = \mathcal{L}(E;F)$.

REMARQUE.- Si E est complet, E' semi-réflexif entraîne E semi-réflexif (car E est fermé dans E''_b et a le même dual). Alors $E'\hat{\otimes} F \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E''_\tau;F)$ si E' est nucléaire complet et F complet. Puis $\mathcal{L}_\varepsilon(E''_\tau;F) \approx \mathcal{L}(E;F)$ si E a la topologie τ. Donc la conclusion subsiste : $E'\hat{\otimes} F = \mathcal{L}(E;F)$ et est nucléaire et complet si E' et F sont nucléaires et complets, et si E a la topologie τ et est complet.

EXEMPLES D'ESPACES NUCLÉAIRES.

1.- $\mathcal{O}_{Tm}$ est nucléaire.

Montrons pour cela que l'espace des suites $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ à décroissance rapide à un indice $(m=1)$ est nucléaire.

Prenons pour $A' \subset E'$ l'ensemble des suites majorées par n^p, pour B' par n^{p+2}, pour $E'_{A'}$: $\|s\| = \sup_n \frac{|s_n|}{n^p}$, pour $E'_{B'}$: $\|s\| = \sup_n \frac{|s_n|}{n^{p+2}}$

Appelons e_n la suite dont l'unique terme $\neq 0$ est $s_n = 1$; les e_n forment une base topologique de E, soit e'_n la base duale dans E'.

Dans $(E'_{A'})'$, $\|e'_n\| = n^p$, et dans $E'_{B'}$ $\|e_n\| = n^{-p-2}$.

L'application identique de $E'_{A'}$ dans $E'_{B'}$ s'écrit alors :

$$1 = \sum_n e'_n \otimes e_n = \sum_n \frac{1}{n^2} \left(\frac{e'_n}{n^p}\right) \otimes (e_n\, n^{p+2}) \quad ,$$

les deux derniers termes sont bornés, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente donc $E'_{A'} \longrightarrow E'_{B'}$ est nucléaire. Comme les A' considérées forment une famille fondamentale de parties équicontinues du dual, on en déduit bien que l'espace E des suites à décroissance rapide est nucléaire. Il est isomorphe par Fourier à $\mathcal{D}_{T^1}$, et $\mathcal{D}_{T^m}$ est la m-ième puissance tensorielle ε-topologique complétée de $\mathcal{D}_{T^1}$, donc nucléaire.

2.- Du résultat précédent on déduit que sont nucléaires :

a) $\mathcal{E}$. Car $\varphi \in \mathcal{E}$ converge vers zéro si et seulement si $\alpha\varphi \to 0$ pour toute α à support compact. Mais pour α donnée $\alpha\varphi$ est une fonction sur un tore $T^{n'}$ défini à partir d'un cube contenant le support de α. Donc on a des applications $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}_{T^m}$ qui font apparaître $\mathcal{E}$ comme limite projective d'espaces $\mathcal{D}_{T^m}$, donc $\mathcal{E}$ est nucléaire.

b) $\mathcal{D}$. Car c'est une limite inductive d'espaces $\mathcal{D}_K$ dénombrables et $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{E}$ est nucléaire.

c) $\mathcal{S}$. Car c'est le sous-espace de l'espace $\mathcal{D}$ d'un compact (sphère ou tore).

d) $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{S}'$ qui sont duals d'espaces de type $(\mathcal{F})$ nucléaires.

e) $\mathcal{D}'$ comme limite projective de $(\mathcal{D}_K)'$ dénombrables. $(\mathcal{D}_K$ est un sous-espace de $\mathcal{D}$, d'où une épijection $\mathcal{D}' \longrightarrow (\mathcal{D}_K)'$; la convergence des distributions est purement locale, donc la topologie de $\mathcal{D}'$ est limite projective de celles des $(\mathcal{D}_K)'$. Plus généralement si E est limite inductive stricte d'une suite d'espaces E_n complets, un borné de E est nécessairement dans un E_n, donc la topologie de E' est limite projective des E'_n par les épijections $E' \longrightarrow E'_n$; si les E'_n sont nucléaires, E' est nucléaire).

f) $\mathcal{O}_M$ et $\mathcal{O}_C$ sont munis de la topologie induite par $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ qui est nucléaire, car $\mathcal{S}$ est nucléaire de type $(\mathcal{F})$, donc sont nucléaires.
