Séminaire Schwartz

L. Schwartz

Espaces nucléaires

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 17, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A18_0>

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

24 mars 1954

Exposé n° 17

ESPACES NUCLEAIRES.

-:-:-:-

I.- COMPLEMENTS SUR LES OPERATEURS INTEGRAUX ET LES OPERATEURS NUCLEAIRES.

Soient E et F deux espaces localement convexes.

1°) De l'expression intégrale d'une forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$ résulte immédiatement que u provient d'une forme bilinéaire intégrale sur $E_U \times F_V$ (U (resp. V) voisinage convexe ouvert équilibré de zéro dans E (resp. dans F)). Ceci permet de se ramener aux espaces normés.

Pour qu'une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ soit intégrale, il faut et il suffit que son prolongement à $\hat{E} \times \hat{F}$ soit intégral (car $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F \approx \hat{E} \hat{\otimes}_{\varepsilon} \hat{F}$) . Ceci permet de se ramener aux espaces de Banach.

2°) Un opérateur $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est dit intégral si la forme bilinéaire qu'il définit sur $E \times F'$ est intégrale (F' est muni de la topologie forte i.e. de la topologie de la convergence bornée). On peut démontrer qu'une application intégrale se factorise :

$$E \longrightarrow E_U \longrightarrow F_B \longrightarrow F$$ (U voisinage convexe équilibré ouvert de zéro dans E , B partie bornée de F) , l'application $E_U \longrightarrow F_B$ étant intégrale.

Si une application u de E dans F est intégrale, son prolongement $\hat{u}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$ est intégrale (immédiat) ; réciproquement, si u est une application continue de E dans F telle que $\hat{u}$ soit intégrale, et si en outre toute partie bornée de $\hat{F}$ est contenue dans l'adhérence d'une partie bornée de F (par exemple, si F est un espace normé) alors u est une application intégrale : en effet, les topologies fortes sur F' dual de F et F' dual de $\hat{F}$ sont identiques, donc les biduals F'' et $(\hat{F})''$ sont identiques.

Pour qu'une application continue $E \longrightarrow F$ soit intégrale, il faut et il suffit que sa transposée le soit.

3°) Si u est une application nucléaire $E \longrightarrow F$, sa bitransposée est une application nucléaire $E'' \longrightarrow F''$ (et même $E'' \longrightarrow F$ car u est compacte).

Si une application continue u de E dans F est telle que ${}^{tt}u$ soit nucléaire, u n'est pas nécessairement nucléaire (mais si l'on sait en outre que ${}^{tt}u$ est une application $E'' \longrightarrow F$, u sera évidemment nucléaire).

Une application nucléaire $E \longrightarrow F$ se prolonge en une application nucléaire $\hat{E} \longrightarrow \hat{F}$. La réciproque est fausse.

4°) Si $u : E \longrightarrow F$, F complet, est composé de 3 opérateurs intégraux, u est nucléaire.

DÉFINITIONS.

Soient E et F deux espaces localement convexes, et soit $\mathfrak{S}$ une famille de parties bornées de F. Une application u de E dans F est dite $\mathfrak{S}$-bornée s'il existe V voisinage de zéro dans E et $X \in \mathfrak{S}$, tels que $u(V) \subset X$. Un ensemble u_i d'applications de E dans F est dit $\mathfrak{S}$-équiborné s'il existe V voisinage de zéro dans E et $X \in \mathfrak{S}$ tels que $u_i(V) \subset X$ pour tout i.

Exemples. Les applications compactes (si $\mathfrak{S}$ est la famille des parties compactes de F) ; les applications faiblement compactes (si $\mathfrak{S}$ est la famille des parties faiblement compactes de F) ; les applications bornées (si $\mathfrak{S}$ est la famille de toutes les parties bornées de F).

Lorsque $F = G'$ est le dual d'un espace localement convexe G, on peut prendre pour $\mathfrak{S}$ la famille des parties équicontinues de G'. Dans ce cas, nous dirons, pour abréger, qu'une application u de E dans G', $\mathfrak{S}$-bornée, est une application $\mathcal{E}$-bornée ; et qu'une famille d'applications $\mathfrak{S}$-équibornée est une famille $\mathcal{E}$-équibornée. On vérifie immédiatement la propriété suivante:

Une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ définit une application $\mathcal{E}$-bornée de F dans E' et réciproquement. Une famille équicontinue de formes bilinéaires continues sur $E \times F$ définit une famille d'applications $\mathcal{E}$-équibornées de F dans E' et réciproquement.

II.- ESPACES NUCLÉAIRES.

DÉFINITION. Un espace localement convexe E est dit nucléaire si, quel que soit F localement convexe, les topologies π et ε coïncident sur $E \otimes F$ (ou, ce qui revient au même, si quel que soit F localement convexe l'application canonique $E \hat{\otimes}_{\pi} F \longrightarrow E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ est un isomorphisme sur).

Pour que E soit nucléaire, il faut et il suffit que $\hat{E}$ soit nucléaire (en effet $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F \approx \hat{E} \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ et $E \hat{\otimes}_{\pi} F \approx \hat{E} \hat{\otimes}_{\pi} F$ quel que soient E et F).

PROPOSITION 1.- Pour qu'un espace localement convexe E soit nucléaire il faut et il suffit que, pour tout espace de Banach G, les topologies π et ε coïncident sur $E \otimes G$.

Nécessité évidente.

Pour démontrer la suffisance, considérons un espace localement convexe F et montrons que $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F = E \hat{\otimes}_{\pi} F$. Par dualité, il revient au même de démontrer que toute partie équicontinue de $B(E,F)$ est une partie équicontinue de $J(E,F)$. Or, une partie équicontinue de $B(E,F)$ est engendrée par une famille Φ de formes bilinéaires équicontinues sur $E \times F_V$ (V voisinage convexe ouvert équilibré de zéro dans F) ; Φ définit une partie équicontinue de $B(E,F_V) = B(E,\hat{F}_V)$; par hypothèse les parties équicontinues de $B(E,\hat{F}_V)$ sont celles de $J(E,\hat{F}_V)$ qui sont aussi celles de $J(E,F_V)$; donc Φ définit une partie équicontinue de $J(E,F_V)$, donc une partie équicontinue de $J(E,F)$.

HYPOTHÈSE.- Si deux espaces localement convexes E et F sont tels que les topologies ε et π coïncident sur $E \otimes F$, a-t-on nécessairement : E ou F nucléaire ?

THÉORÈME 1.- Soit E un espace localement convexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°/ E est nucléaire

2°A/ Toute application ε-bornée d'un Banach dans E' est intégrale.

2°B/ Toute application ε-bornée d'un Banach dans E' est nucléaire.

3°/ Quelle que soit A' partie convexe équilibrée faiblement fermée équicontinue de E' , il existe B' partie convexe équilibrée faiblement fermée équicontinue de E' , $B' \supset A'$, telle que l'application canonique $E'_{A'} \to E'_{B'}$ soit nucléaire.

4°/ Quel que soit U voisinage convexe équilibré ouvert de zéro dans E il existe V voisinage convexe équilibré ouvert de zéro dans E , $V \subset U$, tel que l'application $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$ soit nucléaire.

5°A/ Toute application continue de E dans un espace de Banach est intégrale

5°B/ Toute application continue de E dans un espace de Banach est nucléaire

DÉMONSTRATION.

1° entraîne 2°A/ En effet une application u ε-bornée $F \to E'$ définit une forme bilinéaire continue sur $E \times F$; par hypothèse cette forme bilinéaire est intégrale ; donc u est une application intégrale.

2°A entraîne 3°/ Soit A' une partie convexe équilibrée faiblement fermée équicontinue de E' ; l'application $E'_{A'} \longrightarrow E'$ est ε-bornée, donc intégrale ; elle définit donc une forme bilinéaire intégrale sur $E'_{A'} \times E$; celle-ci provient d'une forme bilinéaire intégrale sur $E'_{A'} \times E_U$, U voisinage convenable de zéro dans E. On peut prendre $U \subset A'^{\circ}$; on définit ainsi une application intégrale $E'_{A'} \longrightarrow E'_{U^\circ}$, U° équilibrée convexe faiblement fermée équicontinue. En itérant cette construction, et tenant compte de ce que le composé de trois opérateurs intégraux est nucléaire si le dernier espace est complet, on obtient le résultat cherché.

3° entraîne 1°/ Soit F un espace de Banach ; montrons que $F \hat{\otimes}_\varepsilon E \approx F \hat{\otimes}_\pi E$, ce qui, joint à la proposition 1, prouvera que E est nucléaire. Par dualité, il revient au même de montrer que toute partie équicontinue de $B(E,F)$ est une partie équicontinue de $J(E,F)$.

Or une partie équicontinue H de $B(E,F)$ provient d'une famille équicontinue de formes bilinéaires sur $F \times E_U$, donc définit une famille ε-équibornée u_i d'applications $F \to E'$ qui se factorisent : $F \xrightarrow{v_i} E'_{U^\circ} \xrightarrow{\alpha} E'$ les v_i étant équicontinues.

D'après 3° α se factorise en $E'_{U^\circ} \xrightarrow{\beta} E'_{B'} \xrightarrow{\gamma} E'$, la première application étant nucléaire.

Finalement les u_i se factorisent :

$$F \xrightarrow{\beta \circ v_i} E'_{B'} \xrightarrow{\gamma} E'$$

les $\beta \circ v_i$ étant "équinucléaires", donc équiintégrales. Si V est, dans E, le polaire de B', on voit que H provient d'une partie équicontinue de $J(E_V,F)$ donc H est équicontinue dans $J(E,F)$ et E est nucléaire. Par ailleurs trivialement 3° entraîne 2°B et 2°B entraîne 2°A, d'où les équivalences de 1°, 2°A, 2°B, 3°.

3° et 4° sont équivalentes.

Une forme 3°' équivalente à 3° est obtenue en remplaçant "$E'_{A'} \longrightarrow E'_{B'}$ nucléaire" par "$E'_{A'} \longrightarrow E'_{B'}$ intégrale" (en itérant)

Une forme 4°' équivalente à 4° est obtenue en remplaçant $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ nucléaire par $E_V \longrightarrow E_U$ intégral (car "$E_V \longrightarrow E_U$ intégral" équivaut à "$\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ intégral", il suffit alors d'itérer pour déduire 4° de 4°').

Ceci étant, 3°' et 4°' sont équivalents par dualité, donc aussi 3° et 4°.

Ensuite 5°B entraîne trivialement 5°A ; 5°A entraîne 4°, car si l'on considère $F = \hat{E}_U$ et l'application canonique $E \longrightarrow \hat{E}_U$, elle doit être intégrale, donc il existe $V \subset U$ tel que $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$ soit intégrale ; en itérant on voit qu'on peut remplacer intégrale par nucléaire. Enfin 4° entraîne 5°B, car toute application continue de E dans un Banach F se factorise en $E \to \hat{E}_U \to F$, d'où $E \longrightarrow \hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U \longrightarrow F$, $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$ étant nucléaire, C.Q.F.D.

APPLICATION.- Prolongement d'une application continue. Soit E un espace localement convexe, E_1 un sous-espace nucléaire de E, F un espace de Banach, u_1 une application continue de E_1 dans F. Il en résulte que u_1 est nucléaire, donc u_1 se prolonge en une application nucléaire de E dans F (exposé 13, prop. 7). En particulier, comme nous verrons que tout sous-espace d'un espace nucléaire est nucléaire :

PROPOSITION 2.- Soit E un espace nucléaire, E_1 un sous-espace de E, F un espace de Banach, u_1 une application continue de E_1 dans F. L'application u_1 se prolonge en une application continue de E dans F.

DÉFINITION.- Un espace localement convexe est dit espace de Schwartz s'il possède la propriété suivante : pour tout voisinage de zéro U, il existe un voisinage de zéro V dont l'image dans E_U est précompacte.

En particulier un ensemble borné d'un espace de Schwartz a des images précompactes dans tous les E_U, donc il est précompact. Par suite, dans un espace de Schwartz quasi-complet, toutes les parties fermées bornées sont compactes et l'espace est semi-réflexif. Du théorème 1 résulte directement :

PROPOSITION 3.- Tout espace nucléaire est un espace de Schwartz. Tout espace nucléaire quasi-complet est semi-réflexif.

En particulier, un espace de Banach nucléaire a une boule unité compacte, donc est de dimension finie.

PROPOSITION 4.- Tout espace nucléaire est sous-espace d'un produit d'espaces de Hilbert (et, en particulier, possède la propriété d'approximation).

Soit E nucléaire, U un voisinage de zéro dans E, convexe, équilibré, ouvert. Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage de zéro W, $W \subset U$, tel que E_W soit préhilbertien.

Or l'application $E \longrightarrow E_U$ se factorise $E \longrightarrow E_V \longrightarrow E_U$, l'application $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ étant intégrale ; $E \longrightarrow E_U$ se factorise $E \longrightarrow E_V \longrightarrow H \longrightarrow E_U$, H étant préhilbertien. Il suffit alors de prendre pour W l'image réciproque dans E de la boule unité de H .

PREMIER EXEMPLE D'ESPACE NUCLÉAIRE.- Soit $\aleph$ une puissance quelconque.

L'espace $R^{\aleph}$ est nucléaire ; en effet, dans son dual $\sum_{\aleph} R$ (somme directe), les parties équicontinues sont de dimension finie.

Par contre $\sum_{\aleph} R$ (somme directe topologique) n'est pas nucléaire en général. En effet, dans le dual d'un espace nucléaire, les parties équicontinues fermées sont des compacts, métrisables (en vertu du théorème 1, 3°); or le dual de $\sum_{\aleph} R$ est $R^{\aleph}$; les parties équicontinues fermées de $R^{\aleph}$ sont toutes les parties bornées fermées ; ces dernières, par exemple les produits $[0,1]^{\aleph}$ ne sont pas métrisables si $\aleph$ est $> \aleph_0$.

Par contre, nous verrons que : si un espace $(\mathcal{F})$ est nucléaire, son dual est nucléaire, et réciproquement.