L. Schwartz

Formes bilinéaires intégrales et opérateurs intégraux

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 16, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A17_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

17 mars 1954

Exposé n° 16

FORMES BILINÉAIRES INTÉGRALES ET OPÉRATEURS INTÉGRAUX

Les espaces vectoriels topologiques E et F considérés dans cet exposé sont des espaces de Banach.

1.- FORMES BILINÉAIRES INTÉGRALES.

Rappelons (Cf exposé n° 7) qu'une forme bilinéaire sur $E \times F$ est dite intégrale si la forme linéaire sur $E \otimes F$ qui lui est associée est continue sur $E \otimes_{\varepsilon} F$. On désigne par $J(E,F)$ l'espace des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$; on munit $J(E,F)$ de la norme $\| \ \|_J$ de dual de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$.

Soit u_1 une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times F_1$; soit v une application continue de E dans E_1, et w une application continue de F dans F_1 ; la forme bilinéaire (image réciproque) sur $E \times F$: $u(x,y) = u_1(v(x),w(y))$ est intégrale et de plus $\|u\|_J \leq \|v\| \cdot \|w\| \, \|u_1\|_J$ (ceci résulte par transposition de ce que $v \otimes w$ est une application continue de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ dans $E_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon} F_1$, de norme $\|v\| \cdot \|w\|$).

- Proposition 1 - Soient E_1 un sous-espace de E, et F_1 un sous-espace de F. Une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times F_1$ se prolonge en une forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$ de même norme intégrale.

La norme ε sur $E_1 \otimes F_1$ est induite par la norme ε sur $E \otimes F$, d'où par Hahn-Banach la proposition 1.

- Modèle-type de forme bilinéaire intégrale.

Soit X un compact, dx une mesure de Radon positive de masse $+1$ sur X. La forme bilinéaire $(f,g) \dashrightarrow \int_X f\, g\, dx$ est une forme bilinéaire intégrale de norme intégrale 1 sur $C(X) \times C(X)$ car elle peut s'écrire :

$$\int \delta_{(a)} \otimes \delta_{(a)} \, da \quad (\delta_{(a)} = \text{masse } +1 \text{ au point } a)$$

(da étant ici considéré comme une mesure sur la diagonale de $X \times X \subset C'(X \times X)$). Une telle forme bilinéaire sera dite forme bilinéaire intégrale type associée à X et dx.

Si maintenant u est une forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$, on sait qu'on peut écrire

$$u(x,y) = \int_{A'\times B'} \langle x,x'\rangle \langle y,y'\rangle \, d\mu(x',y')$$

(A' boule unité de E' ; B' boule unité de F' ; $d\mu$ mesure de Radon positive sur $A' \times B'$).

Prenons $X = A' \times B'$ et $d\xi = d\mu(x',y')$; soit α la forme intégrale type associée à X et $d\xi$.

L'application $v : x \dashrightarrow [(x',y') \dashrightarrow \langle x,x'\rangle]$ applique E dans $C(X)$

L'application $w : y \dashrightarrow [(x',y') \dashrightarrow \langle y,y'\rangle]$ applique F dans $C(X)$

et ces applications sont continues.

u est image réciproque de α par les applications v et w . Par conséquent :

- <u>Proposition 2</u> - <u>Pour qu'un forme bilinéaire soit intégrale de norme intégrale ≤ 1 , il faut et il suffit qu'elle soit image réciproque par des applications continues de norme ≤ 1 d'une forme bilinéaire intégrale type</u>.

On obtient le même résultat en remplaçant $C(X)$ par $L^{\infty}_{(dx)}(X)$ (en effet L^{∞} est isomorphe à un espace $C(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ compact stonien, l'intégrale par rapport à dx étant identique à l'intégrale par rapport à une mesure $\tilde{dx}$ sur $\tilde{X}$).

- <u>Corollaire. Prolongement à $E'' \times F''$</u> .

<u>Soit</u> u <u>une forme bilinéaire intégrale sur</u> $E \times F$. u <u>se prolonge de manière unique en une forme bilinéaire intégrale sur</u> $E'' \times F''$, <u>séparément faiblement continue et de même norme intégrale</u>.

u est image réciproque d'une forme bilinéaire intégrale type α sur $L^{\infty} \times L^{\infty}$.

Les applications continues $\begin{cases} E \dashrightarrow L^{\infty} \\ F \dashrightarrow L^{\infty} \end{cases}$ ont pour bitransposées les applications continues $\begin{cases} E'' \dashrightarrow L^{\infty''} \\ F'' \dashrightarrow L^{\infty''} \end{cases}$

Il existe d'autre part une projection canonique de norme égale à 1 , $L^{\infty''} \dashrightarrow L^{\infty}$, faiblement continue (pour les dualités $(L^{\infty''}, L^{\infty'})$ et (L^{∞}, L^{1})) (c'est la transposée de $L^{1} \dashrightarrow L^{1''}$) ; d'où les applications continues $\begin{cases} E'' \dashrightarrow L^{\infty} \\ F'' \dashrightarrow L^{\infty} \end{cases}$

L'image réciproque de α par ces applications est une forme bilinéaire intégrale sur $E'' \times F''$, il est immédiat qu'elle prolonge u ; elle est faiblement séparément continue (pour la dualité (E'',E') et (F'', F')). C'est donc la seule forme bilinéaire séparément faiblement continue sur $E'' \times F''$ qui prolonge u .

- <u>Remarque</u> - Une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ admet toujours un prolongement à $E'' \times F''$, mais ce prolongement n'est pas nécessairement unique, et n'est pas en général séparément faiblement continu.

2.- OPÉRATEURS INTÉGRAUX.

Un élément u de $\mathcal{L}(E;F)$ est dit <u>intégral</u> si la forme bilinéaire sur $E \times F'$: $v(x',y') = \langle u(x),y' \rangle$ est intégrale. On pose $\|u\|_{int} = \|v\|_J$.

- <u>Proposition 3</u> - <u>Pour que</u> u <u>soit intégral et que</u> $\|u\|_{int} \leqslant 1$, <u>il faut et suffit que</u> u <u>appartienne à</u> $(A' \otimes B)^{\circ\circ}$ <u>dans</u> $\mathcal{L}(E;F)$ <u>simple faible</u> (A' <u>désigne la boule unité de</u> E' <u>et</u> B <u>la boule unité de</u> F)

En effet pour que u soit intégral de norme $\leqslant 1$, il faut et il suffit que v appartienne à $(A' \otimes B'')^{\circ\circ}$ dans $B(E,F')$ pour la topologie définie par la dualité $(B(E,F'),E \otimes F')$, (B" boule unité de F") ; c'est-à-dire que, dans $\mathcal{L}(E,F'')$, u appartienne à $(A' \otimes B'')^{\circ\circ}$ pour la topologie de la convergence simple faible (c'est-à-dire la topologie définie par la dualité : $(\mathcal{L}(E,F''),E \otimes F')$.
Comme B est faiblement dense dans B" , $(A' \otimes B'')^{\circ\circ} = (A' \otimes B)^{\circ\circ}$.

<u>C.Q.F.D.</u>

La boule unité de $L^1(E;F)$ étant dense dans $(A' \otimes B)^{\circ\circ}$, on voit que <u>tout opérateur nucléaire est intégral et que la norme nucléaire est supérieure à la norme intégrale.</u>
(Dans tous les cas connus, la norme nucléaire est égale à la norme intégrale)
De l'expression des formes bilinéaires intégrales résulte aussitôt que : u <u>est intégral de norme intégrale</u> $\leqslant 1$ <u>si et seulement si</u> :

$$\begin{cases} 1^\circ) & u \in \mathcal{L}(E;F) \\ 2^\circ) & \text{dans } \mathcal{L}(E;F''), \text{ on peut écrire } u = \displaystyle\int_{A' \times B''} x' \otimes y'' \, d\mu(x',y'') \end{cases}$$

(μ : mesure de Radon complexe, $\int |d\mu| \leqslant 1$)

- <u>Proposition 4</u> - <u>Tout composé d'un opérateur intégral par des opérateurs continus est intégral.</u>

Supposons qu'il existe quatre espaces E , F , G , H ; une application intégrale $u : F \dashrightarrow G$; deux applications continues $\alpha : E \dashrightarrow F$ et $\beta : G \dashrightarrow H$
$E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{\beta} H$ $\quad E \xrightarrow{\alpha} F \quad G' \xleftarrow{{}^t\beta} H'$. u définit une forme bilinéaire v intégrale sur $F \times G'$; d'autre part $\beta \circ u \circ \alpha$ définit une forme bilinéaire sur $E \times H'$ qui est $v \circ (\alpha \otimes {}^t\beta)$, donc qui est intégrale ; par suite $\beta \circ u \circ \alpha$ est intégrale.

- <u>Proposition 5</u> - <u>On suppose que</u> E_1 <u>est un sous-espace de</u> E , F/F_1 <u>un quotient de</u> F <u>par un sous-espace fermé</u> F_1 , <u>et que</u> u <u>est une application intégrale</u> $E_1 \dashrightarrow F/F_1$. <u>On peut remonter</u> u <u>en une application intégrale de même norme</u> $E \dashrightarrow F''$ (<u>mais pas, en général, en une application intégrale</u> $E \dashrightarrow F$).

En effet u définit une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times F_1^{\perp}$; celle-ci

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, bend left, dashed] & F \arrow[d, dashed] & F'' \arrow[d, dashed] \\ E_1 \arrow[u] \arrow[r] & F/F_1 \arrow[r, dashed] & F''/\overline{F}_1 \end{tikzcd}$$

se prolonge à $E \times F'$ avec une norme égale (proposition 1) .

- <u>Factorisation des opérateurs intégraux.</u>

Soit X un compact, dx une mesure positive sur X , de masse + 1 . L'immersion $L^{\infty} \dashrightarrow L^{1}$ est une application intégrale, qui sera dite <u>application intégrale-type.</u> Soit u une application intégrale $E \dashrightarrow F$, v la forme bilinéaire définie par u sur $E \times F'$. Il existe X et dx tels que v soit image réciproque de la forme intégrale type sur $C(X) \times C(X)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] E \arrow[d] & & F' \arrow[d] \\ C(X) & \times & C(X) \end{tikzcd}$$

En revenant aux opérateurs on a une factorisation de u :

$$E \dashrightarrow C(X) \dashrightarrow C'(X) \dashrightarrow F''$$

La première application est $E \dashrightarrow L^{\infty}$ (car $C(X) \subset L^{\infty}$) . La deuxième se prolonge en l'application identique $L^{\infty} \dashrightarrow L^{1}$ c'est-à-dire :

- <u>Proposition 6</u> - <u>Toute application intégrale de norme intégrale</u> ≤ 1 <u>se factorise.</u> : $E \dashrightarrow L^{\infty} \dashrightarrow L^{1} \dashrightarrow F''$ <u>où</u> $L^{\infty} \dashrightarrow L^{1}$ <u>est une application intégrale type (injection canonique) et où les applications continues</u> $E \dashrightarrow L^{\infty}$ <u>et</u> $L^{1} \dashrightarrow F''$ <u>ont une norme</u> ≤ 1 <u>et réciproquement.</u>

On peut remplacer $L^{\infty} \dashrightarrow L^{1}$ par $L^{\infty} \dashrightarrow L^{2} \dashrightarrow L^{1}$, donc toute application intégrale se factorise : $E \dashrightarrow H_1 \dashrightarrow F''$ où H_1 est un espace de Hilbert ; appelons H l'espace préhilbertien image de E dans H_1 ; alors u se factorise en $E \dashrightarrow H \dashrightarrow F$; comme F est supposé complet, on peut (en prolongeant par continuité à $\hat{H}$) supposer H hilbertien. Mais la réciproque est fausse : une application ainsi factorisée n'est pas nécessairement intégrale (contre exemple : l'application identique d'un espace de Hilbert dans lui-même).

- <u>Remarque</u> - Si une application u de E dans F'' est intégrale et si $u(E) \subset F$, u est intégrale de E dans F avec la même norme intégrale. En effet la forme bilinéaire qu'elle définit sur $E \times F''$ est intégrale, donc a fortiori sa restriction à $E \times F'$ (le même résultat n'est pas valable si on remplace intégral par nucléaire). D'ailleurs :

- <u>Proposition 7</u> - <u>Toute application intégrale</u> $E \dashrightarrow G'$, <u>de norme intégrale</u> ≤ 1 , <u>admet une factorisation</u> $E \dashrightarrow L^{\infty} \dashrightarrow L^{1} \dashrightarrow G'$ <u>où</u> $L^{\infty} \dashrightarrow L^{1}$ <u>est une application intégrale-type, et où</u> $E \dashrightarrow L^{\infty}$ <u>et</u> $L^{1} \dashrightarrow G'$ <u>sont de norme</u> ≤ 1 . <u>Pour que</u> u <u>soit intégrale de</u> E <u>dans</u> G' <u>il faut et il suffit que la forme bilinéaire qu'elle définit sur</u> $E \times G$ <u>soit intégrale.</u>

En effet, elle se factorise en $E \dashrightarrow L^{\infty} \dashrightarrow L^{1} \dashrightarrow G'''$ et il existe une projection de norme ≤ 1 , $G''' \dashrightarrow G'$, transposée de l'injection $G \dashrightarrow G''$. La fin résulte du corollaire de la proposition 2 .

- Proposition 8 - Pour qu'une application soit intégrale, il faut et il suffit que sa transposée le soit, et $\|u\|_{int} = \|{}^t u\|_{int}$.

En effet, le fait que $u : E \dashrightarrow F$ (resp. ${}^t u : F' \dashrightarrow E'$) soit intégrale, est équivalent, d'après la définition (resp. la proposition 7) au fait que la forme bilinéaire associée sur $E \times F'$ est intégrale, et la norme intégrale de u (resp. ${}^t u$) est celle de la forme bilinéaire.

- Applications intégrales et applications nucléaires.

Si E et F sont des espaces de Hilbert, toute application intégrale est nucléaire et la norme intégrale est égale à la norme nucléaire : en effet $E' \hat{\otimes}_\pi F = J(E,F')$ (exposé n° 13) [C'est faux pour des préhilbertiens non complets] .

Dans le cas général, nous démontrerons seulement la :

- Proposition 9 - Le produit de trois opérateurs intégraux est un opérateur nucléaire.

En effet les applications $A \dashrightarrow B \dashrightarrow C \dashrightarrow D$ peuvent se factoriser en : $A \dashrightarrow H_1 \dashrightarrow B \dashrightarrow C \dashrightarrow H_2 \dashrightarrow D$ (H_1 , H_2 espaces de Hilbert) . $H_1 \dashrightarrow H_2$ est intégral car $B \dashrightarrow C$ est intégral ; donc $H_1 \dashrightarrow H_2$ est nucléaire ; donc $A \dashrightarrow D$ est nucléaire .

C.Q.F.D.

Un opérateur intégral n'est pas nucléaire en général (Exemple : l'injection canonique $L^\infty \dashrightarrow L^1$ n'est même pas compacte, donc n'est pas nucléaire). Mais on peut démontrer que le composé d'une application intégrale $E \dashrightarrow F$ et d'une application faiblement compacte $F \dashrightarrow G$ est nucléaire.

En particulier, le produit de deux opérateurs intégraux est nucléaire. Si F est réflexif, l'identité est faiblement compacte ; dans tout opérateur intégral $E \dashrightarrow F$ est nucléaire si F est réflexif.