L. Schwartz

Exemples d'espaces vérifiant la propriété d'approximation

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A16_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953-1954
-:-:-:-

10 mars 1954

Exposé n° 15

EXEMPLES D'ESPACES VÉRIFIANT LA PROPRIÉTÉ D'APPROXIMATION.

RAPPEL. (Cf. Exposé n° 14). Un espace E vérifie la propriété d'approximation - en abrégé (A) - si l'application identique de E dans E peut être approchée uniformément sur tout compact de E par des applications de rang fini - i.e.

$$(1)\quad \begin{cases} \text{pour tout } \mathcal{H} \text{ compact de } E \text{ , } V \text{ voisinage de } 0 \text{ dans } E \text{ , il existe} \\ u \in E' \otimes E \text{ telle que} \\ \qquad u \cdot x - x \in V \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H} \end{cases}$$

REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de $E' \otimes E \subset \mathcal{L}(E;E)$ - et supposons (ce qui sera souvent réalisé ci-après) que $\mathcal{F}$ soit équicontinu dans $\mathcal{L}(E;E)$. Alors si $1 \in \mathcal{L}(E;E)$ est adhérent à $\mathcal{F}$ pour la topologie de la convergence simple, (1) a lieu - (1) aura même lieu, si 1 est adhérent à $\mathcal{F}$ pour la topologie de la convergence simple sur un ensemble dense de E.

THÉORÈME 1.- Soit X un espace localement compact, μ une mesure $\geqslant 0$ sur X, L^p, $1 \leqslant p < \infty$ l'espace des classes de fonctions de puissance $p^{\text{ème}}$ μ-sommables sur X. L'espace L^p vérifie (A).

DÉMONSTRATION.

a) Fabrication de $\mathcal{F}$.

Soit (2) $X = K_1 \cup \dots \cup K_n \cup H$, K_i, H sans points communs 2 à 2, K_i relativement compact pour $i = 1, \dots, n$, $\mu(K_i) > 0$. Soit φ_i la fonction caractéristique de K_i. A chaque décomposition (2) de X, on associe l'opérateur

$$(3)\qquad f \longrightarrow u(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\int f \cdot \varphi_i \cdot dx}{\mu(K_i)} \cdot \varphi_i \quad ,$$

opérateur continu $L^p \longrightarrow L^p$, de rang fini, $\|u\| \leqslant 1$ (vérification facile).

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des u ; comme $\|u\| \leq 1$, cet ensemble est <u>équicontinu</u>.

b) Grâce à la remarque préliminaire, on est ramené à montrer ceci : soit C l'espace (dense) des fonctions continues à support compact ; on donne $f_1 \dots f_k \in C$ et $\varepsilon > 0$; il existe $u \in \mathfrak{F}$ avec

(4) $$\| u(f_i) - f_i \|_{L^p} \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout } i = 1 , \dots , k .$$

Or soit K un compact contenant les supports des f_i ; $H = \complement K$; on recouvre K par des $\{K_i\}_{i=1}^n$ tels que l'oscillation des f_j sur K_i soit $\leq \frac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p}}$ soit u l'application (3) correspondant à la décomposition $X = K_1 \cup \dots \cup K_n \cup H$.

Pour $x \in K_i$ on a :

$\left| u(f_j)(x) - f_j(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p}}$ - donc ceci pour tout $x \in X$, d'où (4) -

<u>C.Q.F.D.</u>

<u>THÉORÈME 2.-</u> <u>Soit</u> X <u>un espace compact,</u> $C(X)$ <u>l'espace des fonctions continues sur</u> X , <u>muni de la topologie de la convergence uniforme. L'espace</u> $C(X)$ <u>vérifie</u> (A) .

(Pour le cas, X non compact, Cf. Théorème 4 ci-après).

<u>DÉMONSTRATION.</u>

Soit $\{\alpha_i , \xi_i\}_{i=1}^n$ une partition de l'unité pointée (i.e. (α_i) = partition de l'unité, ξ_i choisi dans le support de α_i)

On prend pour $\mathfrak{F}$ la famille des applications

$$\varphi \longrightarrow u(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \alpha_i$$

lorsque $\{\alpha_i , \xi_i\}$ varie. On a : $\|u\| \leq 1$ pour tout $u \in \mathfrak{F}$.

On termine comme au b) du théorème 1.

<u>COROLLAIRE 1.-</u> <u>Soit</u> X , μ <u>comme au théorème 1. L'espace</u> L^∞ <u>vérifie</u> (A).

<u>DÉMONSTRATION.</u>

L^∞ est isomorphe à un espace $C(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ compact - (Kakutani, ou bien : L^∞ algèbre (par multiplication) d'opérateurs de $L^2 \longrightarrow L^2$, $\tilde{X}$ = spectre de cette algèbre, et Gelfand).

COROLLAIRE 2.- Soit X localement compact, $B(X)$ (ou $C^{\infty}(X)$) l'espace des fonctions continues bornées sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme L'espace $B(X)$ vérifie (A).

DÉMONSTRATION.

$B(X)$ est isomorphe à un $C(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ compact.

THÉORÈME 3.- Soit X compact ; l'espace $C'(X) = \mathfrak{M}^1(X)$, dual fort de $C(X)$, vérifie (A)

1ère DÉMONSTRATION.

$C'(X)$ est isomorphe à un espace L^1 (Kakutani), donc corollaire du th. 1.

2ème DÉMONSTRATION.

a) Construction de $\mathfrak{F}$ (voir exposé n° 13 - page 2).

Soit $\mu \geqslant 0$, $\in C'(X)$, $B(\mu)$ la bande engendrée par μ ; $C'(X)$ est somme directe de $B(\mu)$ et de la bande supplémentaire $B'(\mu)$: pour tout $\nu \in C'(X)$ on a la décomposition unique

$$\nu = \nu_\mu + \nu'_\mu \ , \quad \nu_\mu \in B(\mu) \ , \quad \nu'_\mu \in B'(\mu) \quad \text{et}$$
$$\| \nu_\mu \| \leqslant \| \nu \| .$$

Mais $B(\mu)$ est isomorphe à $L^1(\mu)$ (X compact) ; soit $\mathfrak{F}_\mu$ l'ensemble des opérateurs de rang fini, de norme $\leqslant 1$, construits dans le théorème 1 ; soit $\mathfrak{F}_\mu$ encore les opérateurs correspondants dans $\mathcal{L}(B(\mu);B(\mu))$, de rang fini, norme $\leqslant 1$. Pour $v \in \mathfrak{F}_\mu$ on désigne par $\tilde{v}$ l'application

$$\nu \longrightarrow \tilde{v}(\nu) = v(\nu_\mu) \quad ;$$

$\tilde{v}$ est de rang fini $C'(X) \longrightarrow C'(X)$, de norme $\leqslant 1$; disons que $\tilde{v}$ parcourt $\tilde{\mathfrak{F}}_\mu$ si v parcourt $\mathfrak{F}_\mu$. On désigne enfin par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des $\tilde{\mathfrak{F}}_\mu$, lorsque $\mu \geqslant 0$ varie. L'ensemble $\mathfrak{F}$ est équicontinu (norme $\leqslant 1$).

b) Par la remarque préliminaire, tout revient à ceci : soit $\mu_1, \dots, \mu_k$ données dans $C'(X)$ et $\varepsilon > 0$ donné, trouver $u \in \mathfrak{F}$ avec $\| u(\mu_i) - \mu_i \| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$.

On sait qu'il existe $\mu \geqslant 0$ avec $\mu_i \in B(\mu)$, $i = 1, \dots, k$ $(\mu = \sum_i \mu_i)$ Comme $B(\mu) \approx L^1(\mu)$ il existe $v \in \mathfrak{F}_\mu$ avec

$$\| v(\mu_i) - \mu_i \| \leqslant \varepsilon \quad , i = 1, \dots, k \qquad \text{(théorème 1)}$$

Soit $\tilde{v}$ l'application $\in \tilde{\mathfrak{F}}_\mu \subset \mathfrak{F}$ correspondant à v ; on a :

$v(\mu_i) = \tilde{v}(\mu_i)$ d'où les inégalités voulues.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.- Soit X localement compact, dénombrable à l'infini. L'espace $C(X)$ des fonctions continues à support compact, muni de la topologie limite inductive naturelle, vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

On donne $\mathcal{H}$ compact de $C(X)$ et V voisinage de 0 dans $C(X)$. On cherche u , $\in \mathcal{L}(C(X);C(X))$, de rang fini, avec

$$(5) \qquad u(\varphi) - \varphi \in V \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{H} .$$

Mais $\mathcal{H}$ est compact dans $C_K(X)$ = sous-espace de $C(X)$ formé des fonctions à support dans un compact K convenable (à ne pas confondre avec $C(K)$). Soit H un voisinage compact de K . Supposons que u opère de $\mathcal{H}$ dans $C_H(X)$. Alors (5) équivaut à :

$$(6) \qquad |u(\varphi)(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in H , \varphi \in \mathcal{H} \quad (\varepsilon > 0 \text{ convenable})$$

Or soit φ_H la restriction de $\varphi \in C(X)$ à H : $\varphi_H \in C(H)$; si φ parcourt $\mathcal{H}$, φ_H parcourt $\mathcal{H}_1$ compact de $C(H)$ et il existe donc (théorème 2) $v \in \mathcal{L}(C(H);C(H))$, de rang fini, avec

$$(7) \qquad |v.\varphi_H(x) - \varphi_H(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in H , \varphi \in \mathcal{H}_1 .$$

Mais l'application $\varphi \dashrightarrow v.\varphi_H$ est de rang fini de $C(X)$ dans $C(H)$, non de $C(X)$ dans $C(X)$. Pour arranger cela, on introduit $\alpha \in C(X)$, $\alpha = 1$ dans K , à support dans H , $\alpha \leqslant 1$ partout ; l'application

$$(8) \qquad \varphi \dashrightarrow \alpha.v\varphi_H \quad \text{est continue de rang fini de } C(X) \text{ dans } C(X) \text{ et}$$

$$|\alpha v\varphi_H(x) - \varphi(x)| \leqslant |v\varphi_H(x) - \varphi_H(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in H , \varphi \in \mathcal{H} .$$

Si l'on prend pour u l'application (8) , on a (6) d'où le théorème.

THÉORÈME 5.- L'espace $\mathcal{D}_{R^n} = \mathcal{D}$ vérifie (A) .

(plus généralement , $\mathcal{D}_V$, V = variété indéfiniment différentiable, vérifie (A))

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{H}$ un compact de $\mathcal{D}$, V un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}$. On cherche $u \in \mathcal{L}(\mathcal{D};\mathcal{D})$, de rang fini, avec

$$u(\varphi) - \varphi \in V \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Pour déterminer u on opère comme suit :

1°) On choisit $\rho \in \mathcal{D}$ avec

$$(\rho - \delta) * \mathcal{H} \subset \tfrac{1}{2}.V$$

(abus d'écriture clair)

2°) $\mathcal{H}$ est compact dans un espace $\mathcal{D}_K$, K compact de R^n. On choisit ε de sorte que si $\psi \in C(K)$, majoré par ε sur K, alors

$$\rho * \tilde{\psi} \in \tfrac{1}{2}.V$$

($\tilde{\psi}$ prolongeant ψ par 0 hors de K)

3°) $\mathcal{H}$ est compact dans $C(K)$. Donc (théorème 2) on peut choisir $v \in \mathcal{L}(C(K); C(K))$, de rang fini, avec

$$\| v.\varphi - \varphi \|_{C(K)} \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Ceci posé, considérons l'application :

$$\varphi \dashrightarrow \rho * (v \varphi_K)^{\sim}$$

de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$, de rang fini. On peut la prendre pour u ; en effet, pour $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\rho * (v\varphi_K)^{\sim} - \varphi = \rho * (v\varphi_K - \varphi_K) + \rho * \varphi - \varphi ,$$

et $\rho * \varphi - \varphi \in \frac{1}{2} V$ (1°), $|v\varphi_K - \varphi_K|$ majoré par ε sur K (3°) donc $\rho * (v\varphi - \varphi)^{\sim} \in \frac{1}{2} V$ (2°), donc $\rho * (v\varphi_K)^{\sim} - \varphi \in V$ d'où le théorème.

THÉORÈME 6.- On donne sur R^n un espace de distributions E : $\mathcal{D} \subset E \subset \mathcal{D}'$, les injections $\mathcal{D} \dashrightarrow E \dashrightarrow \mathcal{D}'$ étant continues. On fait les hypothèses :

(H_1) (existence de troncatures convenables). Si $\alpha \in \mathcal{D}$, $T \dashrightarrow \alpha.T$ est une application continue de $E \dashrightarrow E$; pour tout $\mathcal{H}$ compact de E et V voisinage de 0 dans E, il existe $\alpha \in \mathcal{D}$ avec

$$\alpha T - T \in V \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{H}.$$

(H_2) (existence de régularisations convenables). Pour $\alpha \in \mathcal{D}$ fixée et $\rho \in \mathcal{D}$ fixée, l'application $T \dashrightarrow \rho * (\alpha T)$ est continue de $E \dashrightarrow \mathcal{D}$; pour tout compact $\mathcal{H}$ de E et V voisinage de 0 dans E, et α fixée, il existe $\rho \in \mathcal{D}$ avec

$$\rho * (\alpha T) - \alpha T \in V \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{H}$$

CONCLUSION : E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{K}$ compact de E , V voisinage de 0 . On choisit $\alpha \in \mathcal{D}$ avec

$$\alpha T - T \in \frac{1}{3} . V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K} \ (\alpha \text{ existe par } (H_1)).$$

On choisit $\rho \in \mathcal{D}$ avec

$$\rho * (\alpha T) - \alpha T \in \frac{1}{3} V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K} \ (\rho \text{ existe par } (H_2)) .$$

Comme $T \dashrightarrow \rho * (\alpha T)$ est continue de $E \dashrightarrow \mathcal{D}$, $\rho * \alpha T \in \mathcal{K}_1$ compact de $\mathcal{D}$ lorsque $T \in \mathcal{K}$; donc (théorème 5, V étant un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}$) il existe $v \in \mathcal{D}' \otimes \mathcal{D}$ avec

$$v(\rho * \alpha T) - \rho * \alpha T \in \frac{1}{3} V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K} .$$

L'application $T \dashrightarrow v(\rho * \alpha T)$, est continue de rang fini de $E \dashrightarrow \mathcal{D}$, donc de $E \dashrightarrow E$ et l'on a :

$$v(\rho * \alpha T) - T \in V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K}$$ - d'où le théorème.

EXEMPLES.

Les espaces suivants vérifient les hypothèses du théorème 6 :

$\mathcal{D}^{(m)}$, $\mathcal{E}^{(m)}$, $B_c^{(m)}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}_{(M)}$

$\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'_c$, $\mathcal{D}'^m_c$, $\mathcal{E}'^m_c$, $\mathcal{D}'_{L^p}$ $(p < \infty)$.

THÉORÈME 7.- Soit E un E.V.T.L.C., $\hat{E}$ le complété de E . Si $\hat{E}$ vérifie (A) , alors E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{K}$ un compact de E , V un voisinage de 0 dans E . Soit $\hat{V}$ le complété de V , voisinage de 0 dans $\hat{E}$. Comme $\hat{E}$ vérifie (A) , il existe $v \in (\hat{E})' \otimes \hat{E} = E' \otimes \hat{E}$ avec

$$(v - 1)\mathcal{K} \subset \tfrac{1}{2} . \hat{V} .$$

Soit $v = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes \hat{e}_i$, $e'_i \in E'$, $\hat{e}_i \in \hat{E}$.

Les e'_i étant fixés, on a :

$$|\langle e, e'_i \rangle| \leq C < \infty \quad \text{pour tout} \quad e \in \mathcal{K} , \ i = 1 , \ldots , n .$$

On choisit $e_i \in E$ avec

$$\hat{e}_i - e_i \in \frac{1}{2\,Cn} V \quad \text{et on considère}$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes e_i \quad . \text{ Alors, pour } e \in \mathcal{K}$$

$$u(e) - e = u(e) - \ (e) + \ (e) - e \in V \quad \text{car}$$

$$v(e) - e \in \tfrac{1}{2} V \quad \text{et} \quad u(e) - \ (e) = \sum_{i=1}^{n} \langle e'_i , e \rangle . (e_i - \hat{e}_i) \in \tfrac{1}{2} V$$

THÉORÈME 8.- Tout espace de Hilbert E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

On considère la famille $\mathcal{F}$ (équicontinue) de tous les projecteurs orthogonaux de rang fini.

N.B. On peut aussi se ramener à L^2 - et le théorème 1 -

COROLLAIRE 1.- Tout espace pré-hilbertien séparé vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Son complété, qui est un Hilbert, vérifie (A) (théorème 8), donc lui-même vérifie (A) (théorème 7)

THÉORÈME 9.- Soit E un espace tel qu'il existe un système fondamental de voisinages U de 0 , tels que E_U vérifie (A) . Alors E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Soit V voisinage de zéro donné, $\mathcal{K}$ compact donné dans E . On peut prendre V convexe cerclé fermé, tel que E_V vérifie (A) . Soit p la jauge de V , Θ l'application canonique $E \dashrightarrow E_V$. L'image $\Theta . \mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ est un compact de E_V . Il existe donc $v \in \mathcal{L}(E_V ; E_V)$, de rang fini, avec

$$\| v . \Theta x - \Theta x \| \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{K} .$$

Posons :

$$w.x = v . \Theta x \quad ; \quad w \in \mathcal{L}(E ; E_V) \text{ , de rang fini, soit}$$

$$w = \sum^{n} e'_i \otimes f_i \quad , \quad e'_i \in E' \quad , \quad f_i \in E_V \text{ . Considérons alors}$$

$$u = \sum^{n} e'_i \otimes e_i \quad , \text{ où } e_i \text{ quelconque avec } \Theta . e_i = f_i \text{ .}$$

On a, pour tout $x \in \mathcal{H}$.

$$\theta(u.x - x) = w.x - \theta x \quad \text{donc} \quad \|\theta(ux - x)\| \leq 1 \quad \text{donc}$$

$$p(ux - x) \leq 1 \quad \text{donc} \quad ux - x \in V \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{H} .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.- Tout sous-espace d'un produit d'espaces préhilbertien séparés vérifie (A).

Soit en effet $E = \prod_{i \in I} \mathcal{H}_i$; on peut toujours supposer que $pr_i\, E = \mathcal{H}_i$. Il existe un système fondamental de voisinages de 0 , U , qui sont de la forme $U = \prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \in K} \mathcal{H}_i$, J fini $\subset I$, U_i boule de $\mathcal{H}_i$. Alors $E_U \approx \prod_{i \in J} \mathcal{H}_i$ est préhilbertien séparé, donc vérifie (A) , donc aussi E .

Remarque : Tous les sous-espaces d'un tel espace E vérifient aussi (A) .

REMARQUE 1.- On montrera que tout espace nucléaire est nécessairement limite projective d'espace de Hilbert, donc vérifie (A).

Comme application du Corollaire 1 ci-dessus, montrons le

THÉORÈME 10.- Soit V une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, $\mathcal{H}(V)$ = espace des fonctions holomorphes sur V , muni de la topologie de la convergence compacte. Alors $\mathcal{H}(V)$ vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.- $\mathcal{E}(V)$ peut être défini comme espace des fonctions f indéfiniment différentiables, muni de la topologie la moins fine telle que les applications $f \dashrightarrow D f$ (D = opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables à support compact) soient continues de $\mathcal{E}$ dans L^2, (L^2 = espace de Hilbert défini par une mesure dx associée à un ds^2 Riemannien sur V). On peut donc appliquer le corollaire 1 ci-dessus : tous les sous-espaces de $\mathcal{E}(V)$ vérifient (A) . En particulier $\mathcal{H}(V)$, sous-espace des fonctions holomorphes, dans lequel la convergence compacte est identique à la convergence dans $\mathcal{E}(V)$.

Soit toujours V comme au théorème 10 et E un espace complet . On désigne par $\mathcal{H}(V;E)$ l'espace des fonctions holomorphes sur V à valeurs dans E , avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de V . Supprimons partout V dans les notations. On va montrer le

THÉORÈME 11.- $\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}\hat{\otimes} E \quad (= \mathcal{H}\hat{\otimes}_\varepsilon E)$, algébriquement et topologiquement.

DÉMONSTRATION.

a) $\mathcal{H}$ vérifie (A) (théorème 10) , donc (exposé n° 14 , théorème 2, conditions (A_4)) :

$$\mathcal{H}\hat{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c ; \mathcal{H}) \quad \text{(algébriquement et topologiquement).}$$

b) Mais $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c ; \mathcal{H})$ équivaut à $\begin{cases} \vec{\varphi} \in \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c ; \mathcal{E}) = \mathcal{E}(E) \\ \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle \in \mathcal{H} \quad \text{pour tout } \overleftarrow{e'} \in E' \end{cases}$

donc équivaut à $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$, car toute fonction "scalairement holomorphe" est holomorphe. D'où le théorème.

Autrement dit : toute fonction holomorphe à valeurs dans E est limite, uniformément sur tout compact de V de fonctions holomorphes "dégénérées" :

$$\sum_{\text{finie}} \varphi_\nu \, \vec{e}_\nu \ , \ \varphi_\nu \in \mathcal{H}$$

VARIANTE DES THÉORÈMES 10 ET 11.

D = opérateur différentiel (on peut généraliser) sur R^n . $\mathcal{E}_D$ = sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation $D\varphi = 0$; topologie de la convergence compacte si D est elliptique, induite par $\mathcal{E}$ si D n'est pas elliptique. Alors : $\mathcal{E}_D$ vérifie (A) . Soit maintenant $\mathcal{E}_D(E)$ = sous-espace de $\mathcal{E}(E)$ des solutions de $D\vec{\varphi} = 0$. Alors :

$$\mathcal{E}_D(E) = \mathcal{E}_D \hat{\otimes}_\varepsilon E \ .$$

REMARQUE 3.

Pour montrer qu'un espace E vérifie (A) on a seulement utilisé la condition (A) du théorème 2 -Exposé n° 14 - On peut évidemment parfois se ramener à une autre condition de ce théorème.

Exemple : $E = \mathcal{H}^{(m)}$ - au sens de l'exposé n° 10 - Alors E vérifie (A) par application du théorème 2 -Exposé n° 10 - et de (A_4) .

PROBLÈMES NON RÉSOLUS.

On ne sait pas si les espaces suivants vérifient ou non (A) :

$B^{(m)}$, $m > 0$: fonctions f bornées, $D^p f$ bornée, $|p| \leqslant m$, convergence uniforme sur R^n pour $D^p f$, $|p| \leqslant m$.

$\mathcal{E}^m_{L^p}(\Omega)$ $(p \neq 2 , m > 0)$: Ω ouvert de R^n , $D^q f \in L^p(\Omega)$ pour $|q| \leq m$; topologie la moins fine telle que $f \dashrightarrow D^q f$ continue dans $L^p(\Omega)$ (vrai si $p = 2$, car espace de Hilbert).

$\mathcal{E}^m_{L^\infty}(R^n)$, $m > 0$.

$\mathcal{D}'^m$, $\mathcal{E}'^m$ forts - m fini - .
