L. Schwartz

Généralités sur les problèmes d'approximation et de biunivocité

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 14, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A15_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954

-:-:-:-

3 mars 1954

Exposé n° 14

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBLÈMES D'APPROXIMATION ET DE BIUNIVOCITÉ.

1.- Un théorème préliminaire.

Soient E, F deux espaces de Banach. Les espaces $E \hat{\otimes} F'$ $(= E \hat{\otimes}_{\pi} F')$ et $\mathcal{L}(E;F)$ sont en dualité (ceci est général) ; en effet

$$(E \hat{\otimes} F')' = B(E,F') = \mathcal{L}(E;F'') \supset \mathcal{L}(E;F) \quad .$$

Soit $\mathfrak{J}_1$ l'ensemble des $u \in E \hat{\otimes} F'$ tels que

(1) $$\langle u , A \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{L}(E;F)$$

[Il est possible que $\mathfrak{J}_1 = \{0\}$ dans tous les cas ; noter que $E \hat{\otimes} F'/\mathfrak{J}_1$ n'est pas nécessairement $L^1(F;E)$]. On a le :

Théorème 1. - Le dual de $\mathcal{L}_c(E;F)$ (convergence uniforme sur les compacts convexes de E) est identique à $E \hat{\otimes} F'/\mathfrak{J}_1$.

Démonstration.

a) Soit $u \in E \hat{\otimes} F'$. Il faut montrer que u définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_c(E;F)$. On va montrer plus, à savoir :

(2) $\begin{cases} u \in E \hat{\otimes} F' \text{ définit une forme linéaire continue sur } \mathcal{L}_c(E;F_c) \text{ où} \\ F_c = \text{espace } F \text{ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les} \\ \text{compacts convexes de } F' \text{ fort.} \end{cases}$

[La topologie de F_c est moins fine que la topologie initiale de F].

Or (Cf. exposé n° 5, théorème p. 3) u provient d'un élément de $E_A \hat{\otimes} F'_B$, A (resp. B) disque compact de E (resp. F').

Soit alors $\mathcal{V}(A,B)$ le voisinage de zéro suivant dans $\mathcal{L}_c(E;F_c)$: ensemble des $v \in \mathcal{L}(E;F_c)$ tels que

(3) $$v(A) \subset B^{\circ} \quad .$$

On aura donc montré (2) si l'on montre :

(4) $$|\langle v , u \rangle| \leq \text{constante, pour } v \in \mathcal{V}(A,B) \quad .$$

Or on a :

(5) $$\left|\langle v , u \rangle\right| \leqslant \|u\|_{E_A \hat{\otimes} F'_B} .$$

En effet $v \in \mathcal{L}(E;F_c)$ définit $\tilde{v} \in B(E_A , F'_B)$ (par $\tilde{v}(e,f') = \langle v(e),f'\rangle$) – et la norme de $\tilde{v}$ dans $B(E_A,F'_B)$ est $\leqslant 1$, d'après (3) – d'où (5) et donc (2).

b) Reste à montrer ceci :

(6) Tout élément de $(\mathcal{L}_c(E;F))'$ provient d'un élément de $E \hat{\otimes} F'/\mathfrak{J}_1$.

On va montrer plus, à savoir : (6) est vrai pour E = Fréchet, F quelconque.

On utilisera le :

<u>Lemme</u>. – <u>Soit</u> P <u>un espace vectoriel localement convexe complet</u>, M <u>un espace topologique compact</u>, f <u>une application continue</u> $M \to P$, $\overline{\Gamma}(f(M))$ = <u>enveloppe convexe équilibrée fermée de</u> $f(M)$ <u>dans</u> P . <u>Alors</u> $\overline{\Gamma}(f(M))$ = ensemble des centres de gravité $\int_M f(m)\, d\mu(m)$, μ mesure de Radon sur M , $\|\mu\| \leqslant 1$.

Ceci posé, soit donc $X \in (\mathcal{L}_c(E;F))'$; il existe donc W = voisinage de 0 dans $\mathcal{L}_c(E;F)$ tel que

(7) $$\left|\langle u , X \rangle\right| \leqslant 1 , \quad \text{pour} \quad u \in W .$$

Or W est du type suivant : il existe K compact de E , V voisinage convexe cerclé fermé de 0 dans F tels que :

$$u \in W \iff u(K) \subset V .$$

On pose $V^\circ = B \subset F'$. Alors :

$$u \in W \iff \left|\langle u , x \otimes y' \rangle\right| = \left|\langle u(x),y'\rangle\right| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in K , y \in B .$$

Comparant avec (7) on en déduit ceci :

(8) $X \in (K \otimes B)^{\circ\circ} = \overline{\Gamma}(K \otimes B)$ = enveloppe convexe équilibrée fermée de $K \otimes B$ dans le dual algébrique de $\mathcal{L}_c(E;F)$ muni de sa topologie faible.

Appliquons le lemme avec :

$$P = (\mathcal{L}(E,F))^* \text{ faible.}$$

$M = K \times B$, topologie produit de la topologie de K et de la topologie faible de B , M est compact.

La fonction f est l'application :

$$(x,y') \longrightarrow x \otimes y' \quad \text{de}$$
$$K \times B \longrightarrow (\mathcal{L}(E;F))^* \quad .$$

Conséquence : tout élément $Y \in \overline{\Gamma}(K \otimes B)$ est :

(9) $Y = \int_{K \times B} x \otimes y' \cdot d\mu(x,y')$, μ mesure sur $K \times B$, $\|\mu\| \leq 1$.

Mais comme E = Fréchet (l'hypothèse " E Fréchet" intervient ici) il existe une suite $x_i \longrightarrow 0$ telle que

(10) $K \subset \overline{\Gamma}(x_i)$ = enveloppe convexe équilibrée fermée de la suite x_i (Cf. exposé n° 6, Cor. B, p. 4) .

Soit donc : K_0 = compact $\{x_i\}_0^{\infty}$, $(x_0 = 0)$. On a :

$$\overline{\Gamma}(K \otimes B) \subset \overline{\Gamma}(K_0 \otimes B)$$

et donc tout $Y \in \overline{\Gamma}(K \otimes B)$ peut être représenté par une formule du type (9) avec : μ = mesure sur $K_0 \times B = \bigcup_i (\{x_i\} \times B)$, de norme ≤ 1 , donc :

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \quad , \quad \mu_i \text{ mesure sur } \{x_i\} \times B$$

donc $\mu_i = \delta_{(x_i)} \otimes \nu_i$, ν_i mesure sur B .

Donc :

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} \int x \otimes y' \,.\, d\mu_i(x,y') = \sum_i \int x_i \otimes y' \,.\, d\nu_i(y') \quad \text{soit :}$$

(11) $$Y = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \otimes y'_i \quad , \quad y'_i = \int_B y' \,.\, d\nu_i(y') \in F' \quad .$$

D'après (8) , X est du type (11) - et (6) sera démontré si l'on montre que la série (11) converge dans $E \hat{\otimes} F'$ - Or il y a plus :

(12) la série (11) converge dans $E_A \hat{\otimes} F'_B$, $A = \overline{\Gamma}(K_0)$.

En effet $\|x_i\|_{E_A} \leq 1$ et $\|y'_i\|_{F'_B} \leq \|\nu_i\| = \|\mu_i\|$,

$$\sum_i \|y'_i\|_{F'_B} \leq \sum_i \|\mu_i\| = \|\mu\| \leq 1$$ - ce qui montre (12) - et le théorème.

2.- Les propriétés d'approximation.

Théorème 2.-

(I) E est un espace localement convexe séparé. Les propriétés suivantes, portant sur E, sont équivalentes :

(A) 1 est adhérent à $E' \otimes E$ dans $\mathcal{L}_c(E;E) = \mathcal{L}_c(E)$.

(A_1) $\overline{E' \otimes E} = \mathcal{L}_c(E)$ (adhérence de $E' \otimes E$ dans $\mathcal{L}_c(E)$)

(A_2) Pour tout espace F localement convexe, $\overline{E' \otimes F} = \mathcal{L}_c(E;F)$

(A_3) Pour tout espace F, $\overline{F' \otimes E} = \mathcal{L}_c(F;E)$

(A_4) Pour tout F localement convexe, $\overline{F \otimes E} = \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c;E) = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c;F)$

(A_5) Quels que soient F localement convexe, $\mathfrak{S}$ recouvrement filtrant croissant de F par des disques bornés, $u \in \mathcal{L}(F;E)$ transforment toute partie de F appartenant à $\mathfrak{S}$ en une partie relativement compacte de E, alors

$$u \in (\overline{F' \otimes E})_{\mathfrak{S}}, \text{ adhérence dans } \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F;E)$$

(II) Si E est un espace de Fréchet, les propriétés précédentes sont équivalentes à :

(A_4 bis) comme A_4, avec F Banach

(A_5 bis) comme A_5, avec F Banach et $\mathfrak{S}$ = boules de F

Remarque. Nous avons vu (exposé n° 8, prop. 5) que $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c;E)$ si E et F sont complets ; A_4 exprime que c'est cet espace lui-même.

Démonstration de (I).

$$\text{Trivialement}\quad \begin{matrix} (A_2) \searrow & & \\ & A_1 \Longrightarrow A \\ (A_3) \nearrow & & \end{matrix}$$

A_4 entraîne A_3. Appliquons en effet A_4 à l'espace F'_c. Alors $(F'_c)'_c = F_\gamma$ F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts convexes de F'_c. Comme les parties équicontinues de F' sont relativement compactes dans F'_c, F_γ est plus fine que F ; donc $\mathcal{L}(F_\gamma;E) \supset \mathcal{L}(F;E)$. La topologie ε est la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes de F, polaires des voisinages de 0 de F'_c. A_4 implique que $F' \otimes E$ soit dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F_\gamma;E)$ donc a fortiori dans son sous-espace $\mathcal{L}_c(F;E)$, ce qui est A_3. Il est évident que A_5 implique A_4, en l'appliquant à F'_c, $\mathfrak{S}$ étant l'ensemble des parties équicontinues de F'_c ; on sait en effet que $u \in \mathcal{L}(F'_c;E)$ applique toute partie équicontinue de F' sur une partie relativement compacte de E.

Enfin on voit que A implique A_5. Soit en effet $u \in \mathcal{L}(F;E)$. Si les v_i sont des applications linéaires continues de rang fini de E dans E, convergeant vers 1 sur tout compact de E (hyp. A), les $v_i \circ u$ sont des applications linéaires continues de rang fini de F dans E (donc $\in F' \otimes E$); si alors l'image par u de toute partie de F appartenant à $\mathfrak{S}$ est relativement compacte, les $v_i \circ u$ convergent vers u dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F;E)$, d'où A_5.

(A_2) est resté en plan. Comme il implique (A), il reste à montrer que (A) implique (A_2). Or si $u \in \mathcal{L}(E;F)$, et si les v_i sont comme ci-dessus les $u \circ v_i$ sont de rang fini et convergent vers u dans $\mathcal{L}_c(E;F)$, ce qui achève la démonstration de (I).

<u>Démonstration de (II)</u>.

Il n'est pas mauvais d'énoncer (A_4 bis) et (A_5 bis) en termes compréhensibles de tout le monde :

(A_4 bis) <u>Toute application d'un</u> F' (F <u>Banach), dans E, faiblement continue compacte, est limite (pour la norme) d'applications faiblement continues de rang fini</u>.

(A_5 bis) <u>Toute application compacte d'un Banach</u> F <u>dans</u> E <u>est limite (pour la norme) d'applications continues de rang fini</u>.

1°) Les A impliquent A_4 bis et A_5 bis (E quelconque).

2°) A_4 bis implique A_5 bis (E quelconque).

Soit en effet $u \in \mathcal{L}(F;E)$ compacte, F Banach. Sa transposée u'' applique F'' dans E'' ; mais elle s'obtient en prolongeant u par continuité faible, et comme l'image par u de la boule unité A de F est relativement compacte dans E, l'image par u'' de la boule unité A'' de F'' est contenue dans $\overline{u(A)}$ et u'' applique F'' dans E. Appliquons alors (A_4 bis) à u'' : u'' et a fortiori u est limite uniforme sur A d'applications linéaires continues de rang fini, ce qui est (A_5 bis).

3°) (A_5 bis) $\longrightarrow$ (A), <u>sous l'hypothèse</u> E = <u>Fréchet</u> (ce qui achèvera la démonstration du théorème).

On utilisera le

<u>Lemme.- Si</u> E = <u>Fréchet, pour tout compact</u> $K_0 \subset E$, <u>il existe un disque compact</u> $K \supset K_0$, <u>tel que</u> K_0 <u>soit encore compact dans</u> E_K.

<u>Démonstration du Lemme</u>.

a) Il existe une suite $x_i \longrightarrow 0$, avec $K_0 \subset \overline{\Gamma}((x_i))$.

b) Il existe une suite α_i de nombres > 0 , $\alpha_i \longrightarrow 0$, avec $\frac{1}{\alpha_i} \cdot x_i \longrightarrow 0$

c) Soit $K = \overline{\Gamma}(\frac{1}{\alpha_i} x_i)$, disque compact, $\supset K_0$. On a : $\| x_i \|_{E_K} \leqslant \alpha_i \longrightarrow 0$.

Alors dans E_K , l'enveloppe convexe équilibrée fermée de la suite (x_i) est un compact (donc compact de E) contenu dans K_0 donc $= K_0$.

<u>C.Q.F.D.</u>

<u>Démonstration du 3°</u> .

Supposant (A_5 bis), il faut montrer : pour tout compact $K_0 \subset E$ et V voisinage de 0 dans E , il existe $v \in E' \otimes E$ avec

(13) $$v(x) - x \in V \quad \text{pour tout} \quad x \in K_0 .$$

Soit u l'application identique de E_K (Banach) dans E . L'image par u de la boule unité de E_K est compacte, donc, par (A_5 bis)

(14) $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } w \text{ , application linéaire continue de rang fini de } E_K \text{ dans} \\ E \text{ , telle que } w(x) - x \in \frac{V}{2} \quad \text{pour } x \in K . \end{array} \right.$

Nous utiliserons alors le lemme :

<u>Lemme</u>.- <u>Si</u> w <u>est une application linéaire continue de rang fini de</u> E_K <u>dans</u> F , K_0 <u>un compact dans</u> K , W <u>un voisinage de</u> 0 <u>donné dans</u> F' , <u>il existe une application linéaire continue</u> v <u>de rang fini de</u> E <u>dans</u> F <u>vérifiant</u> :

(15) $$v(x) - w(x) \in W \qquad \text{pour} \quad x \in K_0 .$$

<u>Démonstration du Lemme</u> :

Comme w est de rang fini, on a

$$w = \sum_{i=1}^{N} w'_i \otimes f_i \qquad w'_i \in (E_K)' \quad , \quad f_i \in F .$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon f_i \in W$, $i = 1 , 2 , \ldots , N$. Si on trouve $v'_i \in E'$ telles que

$$| v'_i(x) - w'_i(x) | \leqslant \frac{\varepsilon}{N} \quad \text{pour} \quad x \in K_0 ,$$

$v = \sum_{i=1}^{N} v'_i \otimes f_i$ répondra à la question.

Il reste donc à montrer que les restrictions à E_K des formes linéaires continues sur E sont denses parmi les formes linéaires continues sur E_K , pour la topologie $\mathcal{C}_c$ de la convergence uniforme sur les compacts de E_K .

u étant l'injection de E_K dans E , cela veut dire que ${}^t u(E')$ est dense dans $(E_K)'$ pour $\mathcal{C}_c$; comme $\mathcal{C}_c$ est compatible avec la dualité faible, il suffit pour cela que ${}^t u(E')$ soit faiblement dense dans $(E_K)'$, ce qui résulte de ce que u est biunivoque.

Comme ici $F = E$, prenons $W = \frac{V}{2}$, alors (14) et (15) donnent (13) , d'où (A) .

C.Q.F.D.

3.- Les propriétés de biunivocité.

Théorème 3.- *Soit* E *un espace de Banach. Les propriétés suivantes portant sur* E *, sont équivalentes entre elles, et équivalentes aux* (A) *du théorème 2 :*

(B) *pour tout* $u \in E' \hat{\otimes} E$ *, tel que l'application nucléaire correspondante* $\tilde{u}$ ($\tilde{u} \in L^1(E;E)$, Cf. exposé n° 12) *vérifie* $\tilde{u} = 0$, *on a* : $\mathrm{Tr}\, u = 0$.

(B_1) *L'application naturelle de* $E' \hat{\otimes} E$ *dans* $\mathcal{L}(E;E)$ *est biunivoque.*

(B_2) *Pour tout espace de Banach* F , *l'application naturelle de* $F' \hat{\otimes} E$ *dans* $\mathcal{L}(F;E)$ *est biunivoque.*

(B_3) *Pour tout espace de Banach* F , *l'application naturelle de* $E \hat{\otimes} F$ *dans* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ *est biunivoque.*

Démonstration.

1°) $B_2 \Longrightarrow B_1 \Longrightarrow B$. Evident.

2°) $B_3 \Longrightarrow B_2$.

On applique en effet B_3 à F' ; alors l'application naturelle de $F' \hat{\otimes} E$ dans $F' \hat{\hat{\otimes}} E$ est biunivoque, or $F' \hat{\hat{\otimes}} E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F;E)$, d'où B_2 .

3°) (B) $\longrightarrow$ (B_3) .

Soit $u \in F \hat{\otimes} E$, d'image $\tilde{u}$ dans $F \hat{\hat{\otimes}} E \subset \mathcal{L}(F';E)$ *nulle.* On veut en conclure (en s'aidant de (B)) que $u = 0$, soit que :

(17) $\langle u , X \rangle = 0$ pour tout $X \in B(F,E)$.

Or X définit $\tilde{X} \in \mathcal{L}(F;E')$. Si alors

$$v = (X \otimes 1) \cdot u \quad , \quad \text{on a} \quad \text{(Cf. exposé n° 12)} \;:$$

(18) $$\langle u , X \rangle = \mathrm{Tr}\, v$$

Or $v \in E' \hat{\otimes} E$ définit $\tilde{v} \in L^1(E;E)$ et $\tilde{v} = \tilde{u}\, {}^t\tilde{X}$, donc $\tilde{v} = 0$ (car $\tilde{u} = 0$) . Donc grâce à (B) , on a : $\mathrm{Tr}\, v = 0$, ce qui, avec (18) , entraîne (17) .

C.Q.F.D.

4°) (A) $\longleftrightarrow$ (B) (ce qui achèvera la démonstration du théorème).

(A) équivaut à ceci :

(19) $\left\{\begin{array}{l}\text{Toute forme linéaire continue sur } \mathcal{L}_c(E;E)\text{, nulle sur } E' \otimes E \text{ est nulle} \\ \text{sur } 1 .\end{array}\right.$

Mais d'après le théorème 1 , une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_c(E;E)$ provient d'un élément u de $E \hat{\otimes} E'$; pour $v \in \mathcal{L}_c(E;E)$, on a ; $\langle u , v \rangle = \mathrm{Tr}\,(v \otimes 1) \cdot (u)$. Dire que u est orthogonale à 1 revient donc à dire :

(20) $$\mathrm{Tr}\, u = 0 .$$

Par ailleurs si $v = a' \otimes b$, on a

(21) $$\langle u , v \rangle = \langle \tilde{u}(b) , a' \rangle ,$$ $\tilde{u}$ étant l'élément de $\mathcal{L}(E;E)$ associé à u , comme on le voit par continuité en partant de $u = x \otimes y'$. Dire que u est orthogonal à $E' \otimes E$, revient donc à dire que $\tilde{u} = 0$.

Alors (19) ou (A) est bien équivalent à (B) .

<u>Définition</u>.- On dit d'un espace E vérifiant toutes les propriétés équivalentes précédentes qu'il a <u>la propriété d'approximation</u>. La plupart des espaces connus ont cette propriété ; pour quelques uns d'entre eux, on ignore s'ils l'ont ou non ; on ne connaît pas d'espace qui ne l'ait pas.

<u>Proposition</u>.- <u>Si E est un espace de Banach, pour que E' ait la propriété d'approximation, il faut et il suffit que l'on ait l'une quelconque des propriétés suivantes</u> :

(B'_2) <u>Pour tout espace de Banach F , l'application naturelle de $E' \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}(E;F)$ est biunivoque</u>.

(A_5 bis') <u>Toute application linéaire compacte de E dans un espace de Banach F est limite (pour la norme) d'applications linéaires continues de rang fini</u>.

1°) Compte tenu de ce que $E' \hat{\hat{\otimes}} F$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E;F)$, (B'_2) relative à E n'est autre que (B_3) relative à E' .

2°) Montrons maintenant l'équivalence de (A_5 bis') et de la condition d'approximation pour E' . Supposons que l'on ait (A_5 bis'), et soit u une application compacte de F Banach dans E'. Alors ${}^t u$ est compacte de E'' dans F' , donc a fortiori de E dans F' ; elle est alors en vertu de (A_5 bis') limite, pour la norme, d'applications linéaires continues de rang fini de E dans F' ; donc ${}^{tt}u$ et par suite u est limite, pour la norme, d'applications continues de rang fini de F dans E' , et E' vérifie (A_5 bis) .

Réciproquement supposons que $E' = G$ vérifie la condition d'approximation Soit u une application compacte de E dans un Banach F . ${}^t u$ est alors compacte de F' dans G ; d'autre part ${}^{tt}u$ applique (voir démonstration du théorème 2 , II, 2°) $E'' = G'$ dans F, donc ${}^t u$ est faiblement continue de F' dans G ; G vérifiant la propriété d'approximation, on peut appliquer (A_4 bis) à G et ${}^t u$, donc ${}^t u \in F \hat{\hat{\otimes}} G$ ou $u \in E' \hat{\hat{\otimes}} F$, ce qui est (A_5 bis') .

<u>Corollaire.- Si</u> E <u>est un Banach et si</u> E' <u>vérifie la condition d'approximation alors</u> E <u>aussi</u> .

En effet (B'_2) , pour $F = E$, devient B_1 .