L. Schwartz

La théorie des opérateurs nucléaires

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 12, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

17 février 1954

Exposé n° 12

LA THÉORIE DES OPÉRATEURS NUCLÉAIRES.

1.- La trace.

Soit E un espace de Banach dont nous appellerons le dual E'. On sait que - par définition - il existe une correspondance biunivoque et isométrique entre l'espace $B(E, E')$ des formes bilinéaires continues sur $E \times E'$ et le dual de $E \hat{\otimes}_\pi E'$. A la forme bilinéaire canonique $(x,x') \to \langle x,x' \rangle$ correspond donc une forme linéaire continue sur $E \hat{\otimes}_\pi E'$ qu'on appelle "trace" et qu'on note Tr. Si $u = \sum_\nu x_\nu \otimes y'_\nu$ on a, par définition, $\mathrm{Tr}(u) = \sum_\nu \langle x_\nu , y'_\nu \rangle$. La forme Trace est de norme égale à 1. De plus tout $u \in E \hat{\otimes}_\pi E'$ s'écrit sous la forme $u = \sum_{n \geq 0} x_n \otimes y'_n$ avec $\sum_{n \geq 0} \|x_n\| \, \|y'_n\|$ finie, donc la série $\sum_{n \geq 0} \langle x_n , y'_n \rangle$ converge absolument et l'on a, puisque la trace est continue

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{n \geq 0} \langle x_n , y'_n \rangle .$$

Pour justifier le mot "trace", rappelons qu'on peut identifier $E \otimes E'$ à l'espace des endomorphismes de rang fini de E, et que si E est de dimension finie la forme trace coïncide avec la trace usuelle des opérateurs.

Il existe une application continue canonique $E' \hat{\otimes}_\pi E \to \mathcal{L}(E;E)$. Tant qu'on ne sait pas si elle est biunivoque, on peut seulement parler de la trace d'un élément de $E' \hat{\otimes}_\pi E$ et non de la trace de l'opérateur image $\in \mathcal{L}(E,E)$.

Rappelons d'autre part qu'il existe un isomorphisme S (symétrie) entre $E \otimes E'$ et $E' \otimes E$ défini par

$$S\left(\sum_\nu x_\nu \otimes y'_\nu\right) = \sum_\nu y'_\nu \otimes x_\nu \qquad \begin{array}{l} x_\nu \in E \\ y'_\nu \in E' \end{array}$$

Si on identifie $E \otimes E'$ à l'espace des applications de rang fini de E dans E et $E' \otimes E \subset E' \otimes (E')'$ à un espace de transformations de E', l'application S correspond à la transposition des opérateurs. Grâce à S, la trace est aussi définie sur $E'\hat{\otimes}_{\pi}E$. On peut alors interpréter la dualité entre $E\hat{\otimes}_{\pi}F$ et $B(E,F)$ au moyen de la trace : soit $A \in B(E,F) \subset \mathcal{L}(E;F')$. Si 1 est l'identité dans F, $A\otimes 1$ envoie $E\hat{\otimes}_{\pi}F$ dans $F'\hat{\otimes}_{\pi}F$. Donc si $u \in E\hat{\otimes}_{\pi}F$ on peut former la trace de $(A\otimes 1)(u) \in \mathcal{L}(F;F')$ et l'on a

$$\langle u, A\rangle = \mathrm{Tr}((A\otimes 1)(u)) \tag{1}$$

En effet, les deux membres pour A fixé sont des formes linéaires continues en u et elles sont égales pour $u = x\otimes y$.

2.- L'application $E'\hat{\otimes}_{\pi}F \to \mathcal{L}_b(E_{\tau};F)$, E, F, localement convexes.

L'indice $_b$ désigne la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés dans un espace d'applications linéaires.

Soient E, F deux espaces localement convexes séparés quelconques. Aux éléments de $E'\otimes F$ correspondent les applications linéaires continues de rang fini de E dans F. Donc $E'\otimes F \subset \mathcal{L}(E_{\tau};F)$ car ce dernier espace est l'espace des applications faiblement continues. (Cf. Exposé 8, n° 1)

PROPOSITION 1 : La topologie induite sur $E'\otimes F$ par celle de $\mathcal{L}_b(E_{\tau};F)$ est identique à la topologie de $E'_b\otimes_{\varepsilon}F$.

La topologie de $E'_b\otimes_{\varepsilon}F$ est par définition la topologie induite sur $E'\otimes F$ par $\mathcal{L}_{\varepsilon}((E'')_{\tau};F)$. Or une partie équicontinue de E'' est le polaire d'un voisinage de 0 dans E' qui est lui-même le polaire d'un ensemble borné de E donc (théorème du bipolaire) elle est l'enveloppe convexe équilibrée faiblement fermée d'un borné de E. Or dans une $\mathfrak{S}$-topologie, on peut remplacer les ensembles de $\mathfrak{S}$ par leur enveloppe convexe équilibrée fermée. Donc $\mathcal{L}_{\varepsilon}((E'')_{\tau};F)$ et $\mathcal{L}_b(E_{\tau};F)$ induisent la même topologie sur $E'\otimes F$.

COROLLAIRE : Si E et F sont complets, il existe une application continue φ de $E'\otimes_{\pi}F$ dans $\mathcal{L}_b(E_{\tau};F)$ qui prolonge l'identité sur $E'\otimes F$.

En effet, la topologie π étant plus fine que la topologie ε, il existe une application canonique $E'\hat{\otimes}_{\pi}F \to E'\hat{\otimes}_{\varepsilon}F$ qu'on composera avec l'application $E'\hat{\otimes}_{\varepsilon}F \to \mathcal{L}_b(E_{\tau};F)$.

3.- Définition des applications nucléaires - Cas des espaces de Banach.

Désormais, le seul produit tensoriel considéré sera le produit π; ainsi $E\widehat{\otimes}F$ signifie $E\widehat{\otimes}_{\pi}F$.

DÉFINITION 1 : Si E et F sont des espaces de Banach on note $L^1(E;F)$ le sous-espace $\varphi(E'\widehat{\otimes}F)$ de $\mathcal{L}(E;F)$. Les éléments de $L^1(E;F)$ sont dits opérateurs nucléaires ou de Fredholm. $L^1(E,F)$ est un espace quotient de $E\widehat{\otimes}F$. La norme quotient de la norme π sera dite norme-trace ou norme nucléaire notée $\|\ \|_1$ ou $\|\ \|_{Tr}$.

On ne connait pas de cas où φ ne soit pas biunivoque mais on ne sait pas le démontrer en général.

$E'\otimes F$ étant dense dans $E'\widehat{\otimes}F$ et φ étant continue, tout opérateur nucléaire est limite "uniforme" (dans $\mathcal{L}_b$) d'opérateurs de rang fini donc en particulier est compact (l'image dans F d'une boule de E est relativement compacte).

REMARQUE : Si $E = F$ est un Hilbert, les opérateurs nucléaires hermitiens sont les opérateurs complètement continus dont la suite (λ_n) des valeurs propres est sommable et

$$\|u\|_1 = \sum_n |\lambda_n|$$

Dans le cas des Banach généraux, tout opérateur nucléaire u admet une décomposition $u = \sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$, $x'_i \in E'$, $\|x'_i\| \leq 1$, $y_i \in F$, $\|y_i\| \leq 1$, $\sum|\lambda_i| < \infty$, et la borne inférieure de $\sum|\lambda_i|$ pour toutes ces représentations est précisément $\|u\|_1$.

PROPOSITION 2 : Soient $u : E \to F$ un opérateur nucléaire, A une application continue $H \to E$ et $B : F \to G$. Alors $B \circ u \circ A$ est un opérateur nucléaire et $\|B \circ u \circ A\|_1 \leq \|A\|\ \|u\|_1\ \|B\|$

On a en effet le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E'\widehat{\otimes}F & \xrightarrow{\ {}^tA\otimes B\ } & H'\widehat{\otimes}G \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi \\ \mathcal{L}(E;F) & \xrightarrow{(u \to B\circ u\circ A)} & \mathcal{L}(H;G) \end{array}$$

(car les 2 applications de $E'\widehat{\otimes}F$ dans $\mathcal{L}(H;G)$ que définit ce diagramme sont continues, et coïncident pour $u_0 \in E'\otimes F$ de la forme $x'\otimes y$).

Donc, si u est nucléaire, u_0 étant un élément de $E\widehat{\otimes}F$ tel que $\varphi(u_0) = u$, on a $({}^tA\otimes B)u_0 \in H'\widehat{\otimes}G$ et $B\circ u\circ A = \varphi(({}^tA\otimes B)(u_0))$, donc $B\circ u\circ A$ est nucléaire. Compte tenu de ce que $\|{}^tA\otimes B\| = \|A\|\ \|B\|$, on a

$$\|B \circ u \circ A\|_1 \leq \inf_{\varphi(u_0) = u} ({}^tA \otimes B)(u_0) \leqslant \inf_{\varphi(u_0) = u} \|A\| \; \|B\| \; \|u_0\|$$
$$= \|A\| \; \|B\| \; \|u\|_1$$

4.- Définition des opérateurs nucléaires. Cas général.

DÉFINITION 2 : On dit qu'une application linéaire $u : E \to F$, où E et F sont des espaces localement convexes séparés, est nucléaire, s'il existe deux espaces de Banach E_1 et F_1 , un opérateur nucléaire β $E_1 \to F_1$, et deux opérateurs continus $\alpha : E \to E_1$, $\gamma : F_1 \to F$ tels que $u = \gamma \circ \beta \circ \alpha$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rrr, bend right, "u"'] & E_1 \arrow[r, "\beta"] & F_1 \arrow[r, "\gamma"] & F \end{tikzcd}$$

REMARQUE : Il suffit que F_1 soit Banach et E_1 normé, car on peut étendre β à $\widehat{E}_1$.

Pour simplifier, on appelle disque tout ensemble convexe équilibré. En remplaçant E_1 par $\alpha(E)$ et F_1 par $F_1/\overset{-1}{\gamma}(0)$ on peut supposer que α est une épijection et γ une injection ; mais on sait (exposé 7) que E_1 sera isomorphe à E_{U_1} et F_1 à F_{B_1} pour U_1 disque ouvert de E , B_1 partie complétante de F . Comme le dual de E_{U_1} est $\widehat{E'_{A'_1}}$, où $A'_1 = U_1^0$, β provient d'un élément β_0 de $E'_{A'_1} \widehat{\otimes} F_{B_1}$ et $u = \gamma \circ \beta \circ \alpha$ provient d'un élément $u_0 = ({}^t\alpha \otimes \gamma)(\beta_0)$ de $E' \widehat{\otimes} F$; or ${}^t\alpha \otimes \gamma$ n'est autre que l'application canonique de $E'_{A'_1} \widehat{\otimes} F_{B_1}$ dans $E' \widehat{\otimes} F$. Il y a même plus : u provient d'un $u_0 \in E'_{A'_1} \widehat{\otimes} F_{B_1}$, mais on sait (exposé 5) que u_0 appartient à un ensemble de la forme $\Gamma(A' \otimes B)$ où A et B sont compactes dans $E'_{A'_1}$ et F_{B_1} . D'où la

PROPOSITION 3 : Un opérateur $u : E \to F$ est nucléaire si et seulement s'il est défini par un élément d'un $E'_{A'} \otimes F_B$ où A' et B sont convexes équilibrées compactes (donc complétantes) . On peut donc supposer dans la définition 2 que α et γ sont des applications compactes.

Remarquons d'autre part que $E'_{A'}$ étant le dual de $E_{A'_0}$ on a deux applications continues "canoniques" $E'_{A'} \widehat{\otimes} F_B \to \mathcal{L}_b(E_{A'_0} ; F_B) \to \mathcal{L}_b(E;F)$. Comme un élément de $E'_{A'} \widehat{\otimes} F_B$ s'écrit sous la forme

$$u = \sum \lambda_i \, x'_i \otimes y_i$$

on a une telle égalité dans $\mathcal{L}_b(E;F)$.

Réciproquement, si $\sum|\lambda_i| < +\infty$, si x'_i est une suite équicontinue et si (y_i) est contenue dans une partie complétante de F , $\sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$ converge dans $\mathcal{L}_b(E;F)$ et définit un opérateur nucléaire.

PROPOSITION 4 : Pour qu'un opérateur u soit nucléaire, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $u = \sum \lambda_i\, x'_i \otimes y_i$ où $\sum|\lambda_i| < +\infty, (x'_i)$ suite équicontinue, (y_i) suite contenue dans une partie complétante.

PROPOSITION 5 : Si u est nucléaire, $B \circ u \circ A$ est nucléaire (prop. 2)

COROLLAIRE : Si u est nucléaire de E dans F , elle le reste quand on renforce la topologie de E et qu'on affaiblit celle de F ; si E_1 est un sous-espace de E , F un sous-espace de F_1 , u est nucléaire de E_1 dans F_1 .

Par contre si u est une application nucléaire de E dans F , et si $u(E)$ est contenu dans un sous-espace F_2 de F , u n'est pas nécessairement nucléaire de E dans F_2 . De même si u est nulle sur un sous-espace E_2 de E , elle n'est pas nécessairement nucléaird de E/E_2 dans F .

5.- Transposée d'une application nucléaire.

PROPOSITION 6 : Soient E et F deux espaces de Banach, $u \in L^1(E;F)$ alors ${}^t u \in L^1(F';E')$ et $\|{}^t u\|_1 \leq \|u\|_1$. Réciproquement si F est réflexif, et ${}^t u$ nucléaire, u est nucléaire et $\|{}^t u\|_1 = \|u\|_1$.

Soit en effet $u \in L^1(E;F)$, $u = \varphi(u_0)$, $u_0 \in E' \hat{\otimes} F$. Soit i l'injection de $F \hat{\otimes} E'$ dans $F'' \hat{\otimes} E'$ alors ${}^t u = \varphi(i(S\, u_0))$, ${}^t u : F' \longrightarrow E'$, donc ${}^t u$ est nucléaire. Comme S est une isométrie et que $\|i\| \leq 1$ (on peut même montrer que i est une isométrie), on a

$$\|{}^t u\|_1 \leq \inf_{\varphi(u_0)=u} \|i\, S(u_0)\| \leq \inf_{\varphi(u_0)=u} \|u_0\| = \|u\|_1$$

Si enfin F est réflexif et ${}^t u$ nucléaire, ${}^{tt} u$ est nucléaire de E'' dans $F'' = F$, donc u est nucléaire de E dans F . Dans tous les cas connus, la propriété subsiste sans l'hypothèse de réflexivité de F .

COROLLAIRE : Soient E , F deux espaces localement convexes séparés ; si $u : E \longrightarrow F$ est nucléaire, ${}^t u : F'_c \longrightarrow E'_b$ est nucléaire, et a fortiori ${}^t u : F'_b \longrightarrow E'_b$ ou $F'_c \longrightarrow E'_c$.

En effet on a ${}^t u = {}^t\alpha\, {}^t\beta\, {}^t\gamma$ (Cf. définition 2) ${}^t\beta$ est nucléaire, ${}^t\alpha$ est continue et ${}^t\gamma$ est continue de F'_c dans F'_1 si γ est compacte, ce qu'on a le droit de supposer.

6.- Propriétés de relèvement.

PROPOSITION 7 : *Soient E , F , G trois espaces localement convexes séparés $E \subset F$; soit u une application nucléaire $E \rightarrow G$. Il existe alors une application nucléaire $v : F \rightarrow G$ prolongeant u . De plus dans le cas des Banach on peut supposer* $\|v\|_1 \leqslant \|u\|_1 + \varepsilon$.

Bornons-nous à faire la démonstration dans le cas des Banach.

Considérons le diagramme déjà vu (prop. 2) :

$$\begin{tikzcd}
F' \widehat{\otimes} G \arrow[r, "{}^t i \otimes 1"] \arrow[d, "\varphi"] & E' \widehat{\otimes} G \arrow[d, "\varphi"] \\
L^1(F;G) \arrow[r, "u \rightarrow i \circ u"] & L^1(E;G)
\end{tikzcd}$$

i = injection de E dans F

Le trajet $\rightarrow\downarrow$ est un épimorphisme métrique, donc aussi $\downarrow\rightarrow$,

C.Q.F.D.

PROPOSITION 8 . *Soient E , F , G trois espaces localement convexes séparés $F \subset E$, F fermé ; on suppose que tout disque compact de E / F est l'image d'une partie complétante de E . Dans ces conditions, toute application nucléaire $u : G \rightarrow E/F$ provient par passage au quotient d'une application nucléaire $v : G \rightarrow E$. De plus dans le cas des Banach on peut supposer* $\|v\|_1 \leqslant \|u\|_1 + \varepsilon$.

Posons $H = E/F$. Supposons que u provienne d'un élément u_0 de $G'_{A'} \widehat{\otimes} H_B$ où B est une partie complétante compacte de H (prop. 3). Soit B_1 une partie complétante de E qui se projette sur B . On a un épimorphisme $E_{B_1} \rightarrow H_B$ et il suffit de montrer que u_0 s'obtient à partir d'un élément de $G'_{A'} \widehat{\otimes} E_{B_1}$ par projection, c'est-à-dire qu'on peut se ramener au cas des Banach. Mais dans ce cas on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
G' \widehat{\otimes} E \arrow[r, "1 \otimes P"] \arrow[d, "\varphi"'] & G' \widehat{\otimes} H \arrow[d, "\varphi"] \\
L^1(G , E) \arrow[r, "u \rightarrow P \circ u"] & L^1(G , H)
\end{tikzcd}$$

P , projection canonique de E sur H .

Ici encore $\rightarrow\downarrow$ est un épimormhisme, donc $\downarrow\rightarrow$,

C.Q.F.D.

REMARQUES .

1°) On est dans les conditions d'application de la proposition 8 , si E est un Fréchet , ou si E est un dual d'espace de Fréchet, et F faiblement fermé.

2°) Reprenons la proposition 7 , si l'on utilise la proposition 4 , on peut écrire u sous la forme $u = \sum \lambda_i \, y'_i \otimes z_i$ et si grâce à Hahn Banach on prolonge simultanément les y'_i en des formes $\overline{y'_i}$ équicontinues sur F , on peut poser $v = \sum \lambda_i \, \overline{y'_i} \otimes z_i$, v prolonge u ce qui redémontre la proposition 7 . De même pour la proposition 8 .