Séminaire Schwartz

L. Schwartz

# L'espace $C(K;E)$

*Séminaire Schwartz*, tome 1 (1953-1954), exp. nº 9, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A10_0>

Exposé n° 9

# L'ESPACE C(K ; E)

## L'ESPACE C(K ; E)

C'est l'espace des fonctions continues sur un compact K , à valeurs dans un espace vectoriel topologique E . Si $\vec{\varphi}$ est une telle fonction vectorielle, sa valeur en un point x de K est un élément $\vec{\varphi}(x)$ de E .

On prend la topologie de la convergence uniforme : alors, dire que $\vec{\varphi} \to 0$ est équivalent à

(1) $\vec{\varphi}(x) \to 0$ dans E uniformément lorsque x parcourt K .

Si $\overleftarrow{e'}$ est un élément de E' , $x \to \langle \vec{\varphi}(x) , \overleftarrow{e'} \rangle$ définit une fonction scalaire continue $\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ . Il existe donc, lorsque $\vec{\varphi}$ est fixée, une application linéaire $L_{\vec{\varphi}}$ : $\overleftarrow{e'} \to \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ de $E' \to C(K)$ .

Si H' est une partie équicontinue de E' , on a une condition équivalente à (1) :

(2) $\langle \vec{\varphi}(x) , \overleftarrow{e'} \rangle \to 0$ uniformément pour $x \in K$ et $\overleftarrow{e'} \in H'$ , ou encore

(3) $\langle \vec{\varphi} , \overleftarrow{e'} \rangle \to 0$ dans C(K) uniformément pour $\overleftarrow{e'} \in H'$

ce qui ramène la topologie sur C(K,E) à la topologie de la convergence uniforme dans un espace vectoriel scalaire C(K) .

Les applications linéaires $L_{\vec{\varphi}}$ transforment toute partie équicontinue de E' en partie bornée de C(K) (d'après les propriétés de $L_{\vec{\varphi}}$ , il est équivalent de dire que $\langle \vec{\varphi}(x) , \overleftarrow{e'} \rangle$ reste bornée lorsque $x \in K$ et $\overleftarrow{e'} \in H'$ , ou que $\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ parcourt une partie bornée de C(K) lorsque $\overleftarrow{e'}$ parcourt une partie équicontinue H' de E') .

Si l'on désigne par $\Lambda$ (E' , C(K)) l'espace des applications linéaires de E' dans C(K) transformant toute partie équicontinue de E' en une partie bornée de C(K) , on lui met la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E' ; ainsi topologisé on le notera $\Lambda_{\varepsilon}(E' ; C(K))$

PROPOSITION 1 - $C(K) \underset{\varepsilon}{\otimes} E$ est un sous-espace vectoriel topologique de C(K,E)

En effet on sait déjà (exposé n° 2) que $C(K) \otimes E$ est un sous-espace de $C(K;E)$ (à savoir la réunion des $C(K;F)$ , $F$ de dimension finie dans $E$).

De plus la topologie $\varepsilon$ est précisément la topologie induite par $\Lambda_{\varepsilon}(E';C(K))$ .

<u>PROPOSITION 2</u> – <u>Si $E$ est complet, $C(K) \hat{\hat{\otimes}} E = C(K,E)$.</u>

On sait en effet (Cf. Bourkaki) :

1°) que $C(K,E)$ est complet

2°) que $C(K) \otimes E$ est dense dans $C(K,E)$ .

<u>PROPOSITION 3</u> – <u>Si $E$ est normé complet, les espaces $C(K) \hat{\hat{\otimes}} E$ et $C(K,E)$ sont des Banach qui ont la même norme.</u>

$$\text{Car } \|\vec{\varphi}\|_{C(K,E)} = \sup_{x \in K} \|\vec{\varphi}(x)\|_E = \sup_{\substack{x \in K \\ \|e'\| \leqslant 1}} |\langle \vec{\varphi}(x) , \overleftarrow{e'} \rangle| =$$

$$= \sup_{\|e'\| \leqslant 1} \|\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle\|_{C(K)} = \|L_{\vec{\varphi}}\| = \|\vec{\varphi}\|_{\varepsilon}$$

COROLLAIRE 1 – <u>Si $x$ (resp. $y$) parcourt un compact $H$ (resp. $K$) :</u>

$C_{x,y} = C_x \hat{\hat{\otimes}} C_y$ car $C_{x,y} = C_x(C_y) = C_y(C_x)$ .

<u>GÉNÉRALISATIONS</u> –

$$C_x[C_y(E)] = C_y[C_x(E)] = C_{xy}(E) = \widehat{C_x \otimes_{\varepsilon} C_y \otimes_{\varepsilon} E}$$

$$C_x(E) \hat{\hat{\otimes}} C_y(F) = C_{x,y}(E \hat{\hat{\otimes}} F)$$

$$J[C_x , C_y] = (C_x \hat{\hat{\otimes}} C_y)' = (C_{x,y})' = C'_{x,y} \quad \text{(Espace des mesures)}$$

Il est ici facile d'interpréter un élément de $J(C_x , C_y)$ comme forme bilinéaire intégrale sur $C_x \times C_y$ . Un tel élément est en effet une mesure $d\mu(x,y)$ . Alors

$$\iint_{H \times K} \varphi(x)\psi(y)\,d\mu(x,y) = \iint_{H \times K} \langle \varphi, \delta_{(a)} \rangle \langle \psi, \delta_{(b)} \rangle \, d\mu(a,b)$$

d'où $d\mu = \int_{H \times K} \delta_{(a)} \otimes \delta_{(b)} \, d\mu(a,b)$

l'intégrale étant prise sur le faiblement compact des points $\delta_{(a)} \otimes \delta_{(b)}$ de $H' \otimes K'$ , pour la topologie de la convergence simple sur $C(H) \times C(K)$ .

<u>COROLLAIRE 2</u> – <u>Si $u$ (resp. $v$) est une application linéaire continue de $C_x$ dans $C_y$ (resp. $E$ dans $F$ complets) , on peut la prolonger en une application linéaire continue</u> $u \hat{\otimes} v$ <u>de</u> $C_x(E)$ <u>dans</u> $C_y(F)$ , <u>vérifiant</u> $u(\vec{\varphi e}) = u(\varphi)v(\vec{e})$ .

PROPOSITION 4 - $C(K;E) = C(K) \hat{\hat{\otimes}} E = \mathcal{L}_{\varepsilon}(E'_c ; C(K))$ . Autrement dit l'hypothèse générale de Banach est réalisée ici.

1ère Démonstration - Soit $L$ une application linéaire continue de $E'_c$ dans $C(K)$ . Pour $\mu \in C'(K)$ , $\overleftarrow{e'} \to \mu(L(\overleftarrow{e'}))$ est faiblement continue sur $E'$ ; en prenant en particulier $\mu = \delta_{(x)}$ , masse + 1 en $x$ , on voit qu'il existe un élément $\vec{\varphi}(x)$ de $E$ tel que $\langle \vec{\varphi}(x), \overleftarrow{e'} \rangle = L(\overleftarrow{e'})(x)$ ou $\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle = L(\overleftarrow{e'})$ $\vec{\varphi}$ est scalairement continue, il faut montrer qu'elle est continue. Pour cela il faut voir que si $x \to x_0$ dans $K$ , $\vec{\varphi}(x)$ converge vers $\vec{\varphi}(x_0)$ dans $E$ donc que $\langle \vec{\varphi}(x), \overleftarrow{e'} \rangle$ converge vers $\langle \vec{\varphi}(x_0), \overleftarrow{e'} \rangle$ uniformément pour $\overleftarrow{e'} \in H'$ équicontinue ; autrement dit que lorsque $\overleftarrow{e'}$ parcourt $H'$ , $\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ parcourt un ensemble équicontinu de fonctions numériques sur $K$ . Or par hypothèse $L$ transforme $H'$ en une partie relativement compacte de $C(K)$ , donc équicontinue d'après Ascoli.

2ième Démonstration - Soit ${}^tL$ la transposée de $L$ ; c'est une application linéaire continue de $(C'(K))_c$ dans $E$ . Elle est donc continue sur la boule unité de $C'(K)$ , pour la topologie faible de $C'(K)$ et la topologie initiale de $E$ . Or $x \to \delta_{(x)}$ plonge le compact $K$ dans la boule unité faible de $C'(K)$ ; donc ${}^tL$ définit une fonction $\vec{\varphi}$ continue de $K$ à valeurs dans $E$ . Le retour à $L$ montre que $\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle = L(\overleftarrow{e'})$ , puisque $\langle \vec{\varphi}(x) , \overleftarrow{e'} \rangle =$ $= \langle {}^tL\,\delta_{(x)} , \overleftarrow{e'} \rangle = L(\overleftarrow{e'})(x)$ .

PROPOSITION 5 - Si $\vec{\varphi} \in C(K;E)$ , $E$ complet, $\mu \in C'(K)$ , on peut définir l'intégrale $\mu(\vec{\varphi}) = \int_K \vec{\varphi}(x) d\mu(x) \in E$ , par

$$\langle \mu(\vec{\varphi}) , \overleftarrow{e'} \rangle = \mu(\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle) \quad \text{pour tout } \overleftarrow{e'} \in E'$$

L'image par $\mu \to \mu(\vec{\varphi})$ de la boule unité de $C'(K)$ est un compact de $E$ ; si $\mu$ converge faiblement vers $0$ dans $C'(K)$ en restant bornée , $\mu(\vec{\varphi})$ converge vers $0$ dans $E$ .

En effet, $\mu \to \mu(\vec{\varphi})$ est l'application ${}^tL_{\vec{\varphi}}$, transposée de l'application $L_{\vec{\varphi}}$ : $\overleftarrow{e'} \to \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ de $E'$ dans $C(K)$ .

$${}^tL_{\vec{\varphi}} \in \mathcal{L}_{\varepsilon}((C'(K))_c ; E) .$$

---