Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

Bernard Jouvet

Sur la cohérence de la théorie quantique des champs

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 27 (1957-1958), exp. nº 9, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1957-1958__27__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIE PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1957/58
-:-:-:-

21 janvier 1958

SUR LA COHÉRENCE DE LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par Bernard JOUVET

Nous avons vu dans notre précédent exposé, que la question de savoir si le postulat de l'existence de couplages fondamentaux de Fermi était une donnée suffisamment complète pour calculer la charge et la masse des bosons, était reliée à la connaissance de la structure de la constante de renormalisation des champs de bosons.

Nous allons maintenant voir que la connaissance de la valeur des constantes de renormalisation permet de tester la cohérence physique d'un modèle donné ou de la théorie des champs. Pour cette raison des travaux importants ont été faits en vue de déterminer la valeur de ces constantes dans le cas de l'électrodynamique. A la lumière de ces recherches, que nous examinerons et discuterons nous pourrons conclure

a. que la méthode des perturbations n'est pas valable pour résoudre l'équation $Z_3(\alpha) = 0$

b. qu'on n'a pas de preuve cohérente qu'il n'existe pas une solution à l'équation de la charge, $Z_3(\alpha) = 0$.

1. Relations entre la valeur des constantes de renormalisation et le problème de la cohérence physique des modèles quantiques.

a. Constante de renormalisation et probabilité. - Soit $H = H^o(A_o , \psi_o) + G^o A_o \bar{\psi}_o \psi_o$, l'hamiltonien d'un système exprimé en fonction des champs non renormalisés. Plaçons-nous en représentation de Schrödinger.

Soient $|B_K>$ les états propres de H , correspondant aux bosons observables, et $|B_K^o>$, $|f_p^o , \bar{f}_{p'}^o>$ ... les états propres de H^o correspondant aux états, d'un boson, nu d'une paire de fermions , ... on a

$$|B_K> = C|B_K^o> + \sum' \Phi(K , p , p')|f_p^o , \bar{f}_{p'}^o> + \dots$$

La constante C et la fonction $\emptyset$ peuvent s'interpréter respectivement comme les amplitudes de probabilité de trouver l'état observable $|B_K\rangle$ dans l'état $|B_K^o\rangle$ et dans l'état de paire $|f_p^c , \bar{f}_{p-K}\rangle$, ...
on montre d'autre part que [11]

$$|\langle B_K|B_K^o\rangle|^2 = |C|^2 = Z_3 \ .$$

par conséquent Z_3 est une probabilité. Ce doit donc être un nombre compris entre 0 et 1 .

b. Constante de renormalisation et conservation des probabilités. - Si Z_3 est plus petit que 0 , on voit d'après les formules données dans le séminaire précédent que G_0 est imaginaire, et l'hamiltonien total n'est plus hermitien. Il s'ensuit que ses valeurs propres ne sont plus nécessairement réelles et qu'il faut s'attendre à la présence d'états propres dont la norme ne sera pas constante dans le temps. Cela voudrait dire, par exemple, qu'il existe des particules qui s'évanouissent d'elles-mêmes, sans pour autant être remplacées par des produits de désintégration.

c. Discussion des points de vues (b) et (c). - Les arguments précédents, par leur grande généralité formelle n'ont cependant pas été admis sans discussion. En effet l'électrodynamique a depuis longtemps utilisé des états dont la norme est négative, sans qu'aucun trouble physiquement observable ne s'ensuive (cf. le traitement de la 4e composante de potentiel). Quoique cet exemple soit très particulier, il n'est pas impossible, a priori, que de tels phénomènes ne puissent se reproduire dans d'autres cas physiques, et que l'argument ne puisse pas être contourné. D'autre part, les états $|B_0\rangle$ ... , nus, n'étant pas observables, l'emploi de la notion de probabilité peut être abusif dans ce cas. Il a cependant été démontré explicitement [8] que, dans le cas particulier du modèle de Lee, et lorsque $Z_2 < 0$ il existe des transitions entre états observables en principe qui s'effectuent avec des probabilités négatives.

L'argument (b) est aussi contesté par HEISENBERG, qui soutient que seule une description asymptotique (matrice S) des phénomènes a un sens physique. Dans ce point de vue, si les états de probabilité négative s'évanouissent assez rapidement, on n'a plus de contradiction expérimentale. Une illustration de ce phénomène est fournie dans sa théorie des particules élémentaires [1] .

d. Conclusion. - Cependant le point de vue le plus généralement adopté est que les arguments (a) et (b) sont valides. Dans ce cas si une théorie conduit à un Z_1 ou Z_2 négatif, il faut la modifier, et pour cela différentes méthodes ont été proposées :

1° Introduction d'interactions non locales :
mais alors aucune forme n'a été trouvée qui ne conduise à briser le principe de causalité macroscopique.

2° Introduction d'une coupure non relativiste :
les invariances du groupe de Lorentz sont alors détruites. Par conséquent, si les arguments (a) et (b) sont admis, et si un modèle physique en accord avec l'expérience conduit à l'obtention de la constante $Z_{1,2} < 0$, il s'ensuit que l'un des principes fondamentaux de la théorie quantique :

- Interprétation probabiliste
- Principe de causalité
- Principe de relativité

doit être abandonné.

Pour cette raison, il est essentiel de connaître, au moins pour le seul modèle qui rend compte avec précision des faits expérimentaux (l'électrodynamique), la valeur des constantes de renormalisation.

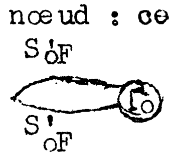
2. Théorie de Landau.

On utilise la matrice S en représentation d'interaction et la méthode des graphes (cf. FEYNMAN-DYSON) les propagateurs non renormalisés des photons Δ'_{oF} et des électrons S'_{oF} sont :

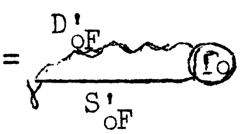
$$\Delta'_{oF} = \Delta_F/1 - \Delta_F K^o \qquad S'_{oF} = S_F/1 - S_F \Sigma_o$$

$$\Delta_F = \frac{1}{p^2} \qquad S_F = \frac{1}{\gamma p + m_o}$$

Deux équations sont connues reliant les trois fonctions fondamentales K_o , Σ_o et $\Gamma_{\mu o}$, la fonction de nœud : ce sont :

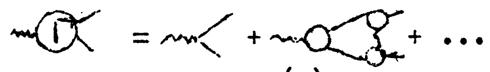
$K_{o\mu\nu} = \gamma_\mu$ 

$= K_o(\Sigma_o , \Gamma_o)$

$\Sigma_o =$ 

$= \Sigma_o(\Sigma_o , K_o , \Gamma_o)$

Γ_o n'est connue que comme une série infinie de termes



Landau montre que les fonctions $\Gamma_{o\mu}^{(n)}(p,p')$ définies par le développement de $\Gamma_{o\mu}(p\ ,\ p')$ en puissance de ℓ_o , la charge non renormalisée,

$$\Gamma_{o\mu}(p\ ,\ p') = \ell_o \gamma_\mu + \ell_o^3\ \Gamma_\mu^{(1)}(p\ ,\ p') + \ldots + \ell_o^{2n+1}\Gamma_\mu^{(n)}(p\ ,\ p') + \ldots$$

sont telles que

$$\lim \Gamma_\mu^{(n)}(p\ ,\ p')\Bigg|_{\begin{cases} p^2 \to \infty \\ p'^2 \to \infty \\ (p-p')^2 \to \infty \end{cases}} \longrightarrow \begin{cases} \log^n \dfrac{\Lambda^2}{p^2} \\ \log^n \dfrac{\Lambda^2}{p'^2} = g^n(p\ ,\ p') \\ \log^n \dfrac{\Lambda^2}{(p-p')^2} \end{cases}$$

une coupure Λ ayant été introduite pour manipuler les quantités divergentes. Il prend ensuite :

$$\text{(L)}\quad \lim \Gamma_\mu(p\ ,\ p')\Bigg|_{\substack{p^2 \to \infty \\ p'^2 \to \infty \\ (p-p')^2 \to \infty}} = \sum_n g^n(p,p')\,\ell_o^{2n+1} = \sum_n \ell_o^{2n+1}\ \lim[\Gamma_\mu^{(n)}(p,p')]_{\substack{p^2 \to \infty \\ \ldots}}$$

ce qui permet de résoudre les équations (pour haute énergie) et d'obtenir : $K_o(p^2) = -\,p^2\,\dfrac{\ell_o^2}{3\pi}\log \Lambda^2/|p^2|$; on trouve alors que $Z_3 = 1 - \dfrac{\ell^2}{3\pi}\log\dfrac{\Lambda^2}{m^2}$. $(\ell^2 = \frac{1}{137})$ résultat identique à l'application de la théorie des perturbations (en ℓ^2) pour le calcul de Z_3 . On a donc $Z_3 < 0$ si $\Lambda^2 \to \infty$ d'où la conclusion de LANDAU que $\log\dfrac{\Lambda^2}{m^2} \leqslant \dfrac{3\pi}{\ell^2}$.

Cependant, comme l'a remarqué KÄLLÉN l'équation (L) n'est pas justifiée, car on n'a pas le droit d'écrire $\lim\limits_{p\to\infty} \sum_A = \sum_n \lim\limits_{p\to\infty}$, à moins que la série ne soit uniformément convergente, ce que n'a pas prouvé LANDAU. KAMEFUCHI [9] a plus explicitement discuté l'approximation de LANDAU.

3. Théorie de Källen.

a. On démontre les formules suivantes ([5] et [12]) :

1) $$\frac{1}{Z_3} = 1 + \int_0^\infty \frac{1}{3}\frac{1}{a^2}\,\pi(a)\,da$$

2) $$\pi(-p^2) = \sum_{z=z(\vec{p})} |<0|j_\mu|z(\vec{p})>|^2(-1)^{N_4^z} = \sum_{z=z(\vec{p})} \pi_z(-p^2)\ ;\ \pi_z(-p^2) \geq 0\ .$$

Dans la formule (2) les états $|z(\vec{p})>$ sont tous les états propres de l'opérateur P_μ appartenant à la valeur p_μ de l'impulsion énergie (par exemple pour $\vec{p} = 0$, $P_o = 2m + \varepsilon$, ces états peuvent être : z_1 = une paire d'électron et de positron d'impulsions opposées, ou bien : z_2 = un paire + un photon d'énergies et d'implusions convenablement choisies) ... , et en général si $\varepsilon < 2m$ il peut y avoir une paire et un nombre arbitraire (fini ou infini) de photons, le photon n'ayant pas de masse). Le facteur $(-1)^{N_4^z}$ provient des photons A_4 et est tel que chaque terme est défini positif.

L'opérateur $j_\mu = \Box A_\mu$, où A_μ est le champ de photon renormalisé .

Remarquons que d'après 1) et 2) on a à première vue, $\frac{1}{Z_3} \geqslant 1$ donc $0 \leqslant Z_3 \leqslant 1$.

3) on a aussi $\Delta_F' = \Delta_F + \int_0^\infty \frac{1}{3a^2}\,\frac{\pi(a)}{p^2 + a - i\varepsilon}\,da$ $\quad \Delta_F = 1/p^2$.

Si (1) converge,

$$(\Delta_F')_{p^2 \to \infty} \to \frac{1}{Z_3}\,\Delta_F\ .$$

Des formules analogues existent pour la valeur limite des autres propagateurs à haute énergie, S' et Γ.

La démonstration de Källen [6] est alors la suivante : puisque d'après (2), $\pi(-p^2)$ est une somme de terme $\geqslant 0$, un seul terme fournit une minorante. Il choisit pour minorante le terme $\pi_1(-p^2) = \pi(1\text{ paire})$:

(K) $$\pi(-p^2) \geqslant \pi(1\text{ paire}) = \sum_{q+q'=p} |<0|j_\mu|^{1\text{ paire}}_{q,q'}>|^2\ .$$

Utilisant les formes des propagateurs à haute énergie, (valables sous l'hypothèse de convergence des intégrales (1) et analogues, c'est-à-dire sous l'hypothèse que les constantes Z_i sont non nulles) il calcule que

4) $\left.\pi_1(-p^2)\right|_{p^2 \to \infty} \geqslant \frac{\alpha}{3\pi}\, \frac{1}{Z_3^2}\, Z_1^2 \cdot (-p^2) =$ nombre fini > 0

5) d'où $\frac{1}{Z_3} \geqslant 1 + \frac{\alpha}{3\pi}\, \frac{Z_1^2}{Z_3^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{da}{a}$ donc $\frac{1}{Z_3} > \infty$.

Ce qui contredit les hypothèses faites. Donc, d'après KÄLLEN au moins une des constantes Z est nulle.

En fait, l'inégalité (5) n'est satisfaite, pour des Z_3 réels, que s'il y a une coupure Λ telle que $\log \frac{\Lambda^2}{m^2} \leqslant 3\pi/\alpha Z_1^2$, (formule analogue à celle de Landau, à part le facteur Z_1) ou bien si $Z_1 = 0$.

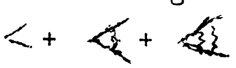
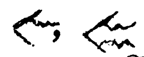
b. <u>Critique</u> [4] . - En fait cette démonstration est fausse à cause de l'inégalité (K) . En effet pour toute valeur finie de p^2 telle que $-p^2 \gg 4m^2$ c'est-à-dire $P_0 = E > 2m$, la série (2) contient une <u>infinité</u> de termes définis positifs. L'inégalité (K) n'est vraie que si cette série converge, c'est-à-dire si le développement (2) a un sens (cf. par exemple la série $1 + X + X^2 + \dots = \frac{1}{1-X}$ pour $X > 1$).

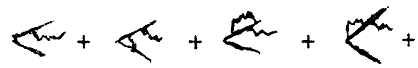
Nous allons montrer que précisément la série (2) est divergente :

α) On montre d'abord que ni le propagateur Δ_F' , ni la fonction $\pi(-p')$ ni la constante Z_3 ne contiennent de divergence infra-rouge. Rappelons que les divergences infra-rouges apparaissent dans les processus réels lorsqu'il y a émissions de photons mous $(k_0 \to 0)$, et dans les connections radiatives à cause des photons mous virtuels. Ces infinis proviennent du fait que l'on sépare artificiellement des processus qui ne sont pas physiquement distinguables. On montre qu'en groupant les termes de connection radiative et d'émission de photon, ces infinis se compensent. Les seuls termes contribuant à Δ_F' sont des boucles fermées et par conséquent il ne peut pas y avoir émission de photons mous à cause du théorème de Furry. Les divergences infra-rouges des connections radiatives portées par ces boucles doivent se compenser d'elles-mêmes [2] ; c'est ce qu'on vérifie en théorie des perturbations ([3] et [7]).

β) par contre la fonction π_1 (une paire), est divergente infra-rouge, à tout ordre de perturbation.

L'élément de matrice $\langle 0 | j_\mu | 1 \text{ paire} \rangle$ est en effet proportionnel (par le facteur Δ_F' non divergent infra-rouge) à la fonction de noeud

$\Gamma_\mu(q\, q') =$  $+ \dots$ qui est divergente infra-rouge pour toute valeur de q et q' . La limite à haute énergie de cette fonction est $\sim Z_1$ qui est aussi divergente infra-rouge en théorie des perturbations. D'après l'argument précédent, on sait que les divergences infra-rouges de Π_1 en α^n sont compensées, dans Π , par les termes de même degré, des fonctions Π_2 (une paire + un photon), Π_3 (une paire + 2 photons)... elles-mêmes développées en théorie des perturbations, c'est-à-dire par les graphiques du type  , ... Cette compensation a été étudiée par KÄLIEN [7] pour les termes de Π en α^2 . Cependant on ne connait aucun argument tendant à montrer que la somme des seules divergences infra-rouges contenues dans Π_1 (une paire) se compensent, en se sommant par exemple, sur une valeur non-divergente. Même si un tel cas se produisait (ce qui reste à démontrer) la difficulté reste entière pour la fonction Π_2 (1 paire + 1 photon) ; l'élément $\langle 0|j_\mu|1 \text{ paire} + 1 \text{ photon}\rangle$ est en effet proportionnel (par le facteur Δ'_F , non divergent ici) à la somme des graphiques



Dans ce cas, même si les connections radiatives de ces graphiques n'étaient pas divergentes infra-rouges (ce qui serait le cas si les divergences infra-rouges se compensent dans Π_1 donc dans Z_1), ces graphiques seraient cependant encore divergents infra-rouges, car ils représentent l'émission d'un photon qui peut être mou.

γ) La situation est donc la suivante : pour $(-p^2) \geqslant 4m^2$ on a

$$\textcircled{1} \qquad \Pi = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i \quad \Pi_i \geqslant 0$$

$\textcircled{\alpha}$ Π n'est pas divergent infra-rouge.

$\textcircled{\beta}$ très vraisemblablement Π_1 , et certainement Π_2 , sont divergents infra-rouge. Donc $\sum_{i\neq 2}^{\infty} \Pi_i$ doit compenser la divergence infra-rouges de Π_2 .

Or puisque Π_2 est $\geqslant 0$, la compensation ne peut être produite que par un terme négatif. Donc la série $\sum_{i\neq 2}^{\infty} \Pi_i$ apporte une contribution < 0 . Cela n'est manifestement possible que si cette série est divergente, qui est le seul cas où elle puisse se sommer sur une expression négative.

La série $\sum \Pi_i$ est donc divergente, et l'inégalité (K) est fausse.

Ajoutons que rien n'exclut mathématiquement la possibilité que la fonction $\Pi(-p^2)$ représentée par cette somme, soit elle-même non définie > 0 . On ne peut alors démontrer que $\frac{1}{Z_3} > 0$. Dans le cas d'une masse non nulle du photon l'argument que nous venons de donner tombe, car pour p^2 fini le nombre de termes de la série est fini. Mais alors

1° l'invariance de jauge disparait et Δ'_F n'est plus déterminé par une seule fonction Π.

2° notre théorie s'écarte, à ce moment, de la théorie de Maxwell, à cause du couplage avec les neutrinos qui devient alors effectif. Le photon peut alors se désintégrer en deux neutrinos (de masse non nulle et les fonctions Π_i ne sont plus définies > 0.

c. Conclusion. - Il existe des arguments physiques montrant qu'une théorie physiquement cohérente doit avoir des $Z_{2,3} \geqslant 0$.

On a vu d'autre part que, dans le cas de l'électrodynamique,

1° le calcul de Z_3 par la théorie des perturbations n'est pas valable ;

2° il n'y a pas de preuve mathématique que le signe de Z_3 soit positif pour toute valeur de la charge, ou qu'une des constantes Z soient identiquement nulle.

Il n'est donc pas impossible d'espérer trouver une valeur de la charge pour laquelle Z_3 s'annule.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HEISENBERG (W.). - Quantum theory of fields and elementary particles, Rev. mod. Phys., t. 29, 1957, p. 269-278.

[2] JAUCH (J.M.) and ROHRLICH (F.). - The theory of photons and electrons. The relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half. - Cambridge, Addison-Wesley, 1955.

[3] JOST (R.) und LUTTINGER (J.M.). - Vacuumpolarisation und e^4-Ladungsrenormalisation für Elektronen, Helv. phys. Acta, t. 23, 1950, p. 201-214.

[4] JOUVET (B.). - Fermi coupling and mass and charge spectra of bosons, Nuovo Cimento, Série 10, t. 5, 1957, p. 1-20.

[5] KÄLLEN (Gunnar). - On the definition of the renormalization constants in quantum electrodynamics, Helv. phys. Acta, t. 25, 1952, p. 417-434.

[6] KÄLLEN (Gunnar). - On the magnitude of renormalization constants in quantum electrodynamics, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., t. 27, 1953, n° 12, 18 p.

[7] KÄLLEN (G.) and SABRY (A.). - Fourth order vacuum polarization, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., t. 29, 1955, n° 17, 20 p.

[8] KÄLLEN (G.) and PAULI (W.). - On the mathematical structure of T. D. Lee's model of a renormalizable field theory, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., t. 30, 1955, n° 7, 23 p.

[9] KAMEFUCHI (Susumu). - A comment on Landau's method of integration in quantum electrodynamics, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., t. 31, 1957, n° 6, 12 p.

[10] LANDAU (L. D.). - On the quantum theory of fields, Niels Bohr and the development of physics. - London, Pergamon Press, 1955 ; p. 52-69.

[11] LEE (T. D.). - Some special examples in renormalizable field theory, Phys. Rev., Series 2, t. 95, 1954, p. 1329-1334.

[12] LEHMANN (H.). - Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder, Nuovo Cimento, Serie 9, t. 11, 1954, p. 342-357.