Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

F. Fer

Construction d'une équation non linéaire en théorie de la double solution

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. nº 3, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1955/1956
-:-:-:-

29 novembre 1955

Exposé n° 3

CONSTRUCTION D'UNE ÉQUATION NON LINÉAIRE EN THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION

par F. FER

1.- Le principe de ce travail est le suivant : si on possède un ensemble de solutions singulières (à singularités ponctuelles) de l'équation d'onde :

$$(E) \qquad \boxed{Lu = \Box u + 2i\,\gamma^\rho \frac{\partial u}{\partial x^\rho} - ku = 0} \qquad \rho = 1 \text{ à } 4\ ,\ i = \sqrt{-1}$$

il doit être possible, par un procédé convenable de sommation continue des solutions singulières, de construire une fonction Ψ régulière qui obéisse, non plus à l'équation (E) , mais à cette équation modifiée par l'adjonction d'un second membre. L'analogie avec la théorie du potentiel newtonien est ici le guide : on passe de l'équation de Laplace à celle de Poisson par l'introduction d'une densité intégrable.

Le second membre ainsi obtenu est alors (à un coefficient près, dont on verra plus loin l'importance) la densité des singularités, jusqu'à présent totalement arbitraire. Si on cherche à raccorder les fonctions Ψ et u suivant les principes de la théorie de la double solution, cette densité va se trouver soumise à certaines conditions, et ces conditions conduisent précisément à une équation non linéaire (N) valable pour Ψ . Le raccordement imposé à Ψ et à u oblige alors la densité des singularités à coïncider avec la densité attachée à l'onde Ψ .

Enfin il est indispensable de se préoccuper de la possibilité d'existence des conditions dont il vient d'être question. On est ainsi amené à s'intéresser à une classe particulière de solutions des équations (E) ou (N) : ce sont celles dont la phase est "polyvalente", c'est-à-dire susceptible de s'accoupler à une infinité d'amplitudes pour former des solutions de l'équation d'onde.

2.- Je dois d'abord rappeler, sans démonstration, quelques notions préliminaires.

On sait que si $u = f\,e^{i\varphi}$ est l'expression complexe de la solution u , l'équation (E) se décompose en deux équations :

- l'équation de Hamilton-Jacobi :

(1) $$g^{\rho\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} + 2\gamma^\rho \frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho} + k = \frac{\Box f}{f}$$

- l'équation de continuité :

(2) $$2\left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho\right)\frac{\partial f}{\partial x^\rho} + f\,\Box\varphi = 0$$

Dans ces équation $g^{\rho\sigma}$ est la métrique contrevariante d'espace temps 1,1 , 1 , $-\frac{1}{c^2}$ que nous écrivons sous la forme généralisée pour raccourcir les écritures ; les γ^ρ sont les composantes du potentiel appliqué.

On sait (que) si on définit <u>les lignes de guidage</u> par les équations différentielles :

(3) $$\frac{dx^\rho}{d\lambda} = g^{\rho\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho = u^\rho$$

et les vitesses spatiales v^i par les équations :

$$v^i = \frac{u^i}{u^4} \qquad (i = 1 \text{ à } 3)$$

l'équation (2) s'écrit

(4) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i) = 0$$

en posant

(5) $$\rho = f^2 u^4 = f^2\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \gamma^4\right)$$

ρ étant la densité de fluide fictif attachée à l'onde u .

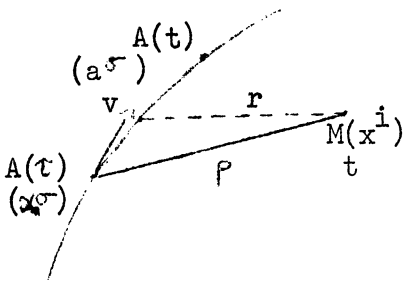
J'ai démontré par ailleurs que les solutions singulières ponctuelles, à singularité en $\frac{1}{r}$ de l'équation (E) ont pour forme la plus générale :

(6) $$u(x^\sigma) = \frac{\omega(\tau)\, U(x^\sigma ; \alpha^\sigma)}{\rho(c - v_\rho)} - 2\int_{-\infty}^{T} \omega(\theta)\, \mathcal{U}(x^\sigma ; a^\sigma)\, d\theta$$

expression dans laquelle :

- la dite solution singulière est construite à partir d'une trajectoire arbitraire C , définie par la variation de coordonnées a^i en fonction d'un paramètre temps θ $(a^i , \theta = a^\sigma)$; $r = \sqrt{\sum (x^i)^2}$ étant la distance euclidienne de $M(x^i)$ au point courant de C ;

- τ est la valeur de θ pour laquelle, $x^\rho(x^i , t)$ étant donnés, on a



$$c(t-\tau) - r(\tau) = 0$$

τ étant unique si la vitesse v est inférieure à c.

On pose $\rho = r(\tau)$, $\alpha^i = a^i(\tau)$, $\alpha^4 = \tau$

- v_ρ est la projection sur $\overrightarrow{A_\tau M}$ de la vitesse $v^i(\tau)$.

- $U(x^\rho \,; a^\rho)$ et $\mathcal{U}(x^\rho \,; a^\rho)$ sont les deux fonctions régulières qui interviennent dans la solution élémentaire de Hadamard pour les équations simplement hyperboliques à un nombre pair de variables :

$$\frac{U}{\Gamma} + \mathcal{U} \log \Gamma + w$$

avec $\Gamma = \sum (x^i - a^i)^2 - c^2(t-\theta)^2$, solution singulière sur le cône de lumière issu du point d'espace-temps a^ρ . On trouvera dans Hadamard ("Les équations hyperboliques et le problème de Cauchy") le mode de détermination de ces fonctions U et $\mathcal{U}$, calculées assez simplement à partir des coefficients de l'équation (E) (pour $\gamma^\rho = 0$ et $k = Cte$ par exemple, on a $U = 1$, $\mathcal{U}$ étant une fonction de Bessel) . w est une fonction régulière, sans intérêt ici.

- enfin $\omega(\theta)$ est une fonction complexe, $\omega = \Omega\, e^{i\zeta}$, pour l'instant arbitraire, de la variable θ .

Une telle solution (6) admet comme ligne singulière d'espace temps la trajectoire C elle-même : à l'instant t , le point siugulier (et le seul) de u est le point $a^i(t)$, t .

On remarque sans difficulté que la phase φ de u est, au point singulier $a^i(t)$, t , égale à ζ , le premier terme de u étant seul singulier.

Pour que les dérivées de φ , $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$, soient définies sur la ligne singulière d'espace-temps, il faut et il suffit que Ω et ζ obéissent à l'équation intégrale :

$$(7) \qquad \frac{1}{c^2 - v^2}\left(\frac{d\zeta}{dt} + \gamma^i v^i - c^2\gamma^4\right) + \text{part. imag. de} \left\{ \frac{1}{\omega(t)} \int_{-\infty}^{t} \omega(\theta)\, \mathcal{U}(t,\theta)\, d\theta \right\} = 0$$

$\mathcal{U}(t\,;\theta)$ étant égal à $\mathcal{U}\,[a^\sigma(t)\,;\, a^\sigma(\theta)]$.

Cette équation, on le voit facilement, permet de déterminer :

- soit ζ en fonction de Ω pour une trajectoire C donnée, par une équation intégro-différentielle ;
- soit Ω en fonction de ζ par une équation intégrale homogène de Volterra à une limite infinie.

3.- Construction d'une fonction régulière Ψ à partir d'un ensemble de solutions singulières.

Considérons, dans l'espace-temps, une famille continue de courbes L , et une famille continue de fonctions ω dont nous supposons qu'elles vérifient l'équation (7) , à chaque courbe L correspondant une fonction ω .

Constituons une collection discrète (finie ou dénombrable, en tout cas en grand nombre), L_1 , ... , L_K , ... de ces courbes L et des fonctions ω correspondantes ; sur chaque ligne L_K on peut construire la solution $u_K = f_K \, e^{i\varphi_K}$ donnée par l'équation (6). La somme $u = \sum u_K$ est solution de (E) et admet pour lignes singulières l'ensemble des lignes singulières des u_K , c'est-à-dire les L_K .

En outre, en point de L_K , et si φ est la phase de u , on a :

$$\varphi = \varphi_K$$

En effet, quand on calcule $\dfrac{u}{u^*}$ sur L_K , la quantité $\dfrac{u_K}{u_K^*}$ intervient seule.

En représentant les 4 coordonnées d'espace-temps pour une seule coordonnée x , les quantités $f = |u|$ et φ se représentent comme ci-dessous :

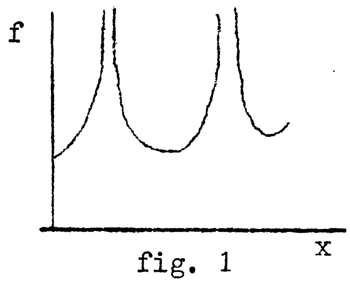


fig. 1

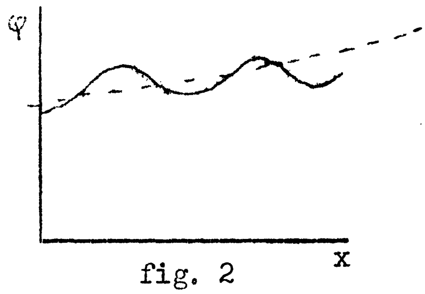


fig. 2

Le graphique correspondant à la phase peut paraître curieux : on s'attendrait plutôt à ce que la phase ait l'allure donnée par la courbe pointillée. A y regarder de plus près, on s'aperçoit qu'en général il n'en sera pas ainsi. En effet, sur la ligne L_1 , la phase φ est mathématiquement égale à φ_1 ; mais, physiquement, dès qu'on s'éloigne un peu de L_1 , l'influence de la solution u_1 devient négligeable par rapport à $(u - u_1)$, qui provient de toutes les autres singularités ; φ devient alors, à peu de chose près, la phase de $(u - u_1)$, qui peut être très différente de φ_1 . Ce n'est que dans le cas où on a, sur toutes les L_K :

$$\varphi_K = \text{phase de } (u - u_K) \tag{8}$$

que la phase sera représentée par la courbe en pointillé de la figure 2 .

Ceci dit, nous allons définir la fonction régulière ψ à partir de u. Soit ϖ un volume d'espace indéformable, qu'on peut déplacer dans l'espace ; nous supposons que ses dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde, mais assez grandes pour pouvoir renfermer un grand nombre de singularités ; nous appellerons centre de ϖ un point intérieur qui lui soit rigidement lié. Nous définirons alors ψ par la relation

$$\psi(m\,,\,t) = \frac{1}{\varpi} \int_{\varpi(m)} u(M\,,\,t)\, d\varpi_M \tag{9}$$

l'intégration en $d\varpi_M$ étant faite dans le volume $\varpi(m)$ centré sur m (point d'espace).

On voit sans difficulté que la fonction $\psi(m\,,\,t)$ est régulière en m, t. En outre, d'après les hypothèses faites sur le grand nombre de singularités et sur ϖ, on voit facilement, si l'on pose

$$\psi = a\, e^{is}$$

que l'on a, sauf sur les lignes singulières L_K et dans leur voisinage immédiat

$$a \# f \quad , \quad s \# \varphi \tag{10}$$

et, sur chaque ligne singulière L_K :

$$s \# \text{ phase de } (u - u_K) \tag{11}$$

On aura des relations analogues pour les dérivées partielles de s et φ.

Avec la même approximation que celle qu'on se permet en physique dans le passage du discontinu au continu, on pourra remplacer, le moment venu, le signe $\#$ par le signe d'égalité.

On montre facilement que la définition (9) de ψ par une moyenne est équivalente à celle que l'on obtiendrait si l'on dotait la famille continue des trajectoires L d'une densité continue de singularités, qu'on pondère les solutions singulières individuelles par cette densité, et qu'on fasse l'intégrale (d'espace à chaque instant) du tout.

Aussi n'est-il pas extraordinaire de constater que, si l'on forme $L\psi$, L étant l'opérateur différentiel de l'équation E, on trouve

$$L\psi + \frac{4\pi}{c}\sigma\omega = 0 \tag{12}$$

$\sigma(x^i\,,\,t)$ étant, à l'instant t, la densité de singularités au point x^i, et ω la valeur de la fonction ω correspondant, pour le temps t, à la courbe L qui passe par x^i à cet instant.

4.- Formation de l'équation non linéaire.

Nous allons maintenant nous placer dans l'hypothèse définie par l'équation (8) . On a alors, d'après (10) et (11) , et en passant à l'égalité :

$$s = \varphi$$

valable dans tout l'espace-temps. Mais d'après ce que nous avons vu plus haut (paragraphe 2) φ est égale à ζ ; on a donc $\xi = s$. Si on décompose (12) en ses 2 équations de Jacobi et de continuité, ces équations seront :

(1 bis) $$g^{\rho\sigma} \frac{\partial s}{\partial x^\rho} \frac{\partial s}{\partial x^\sigma} + 2 \gamma^\rho \frac{\partial s}{\partial x^\rho} + k - \frac{\Box a}{a} + \frac{1}{a} \frac{4\pi}{c} \sigma \Omega = 0$$

(2 bis) $$2(g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho) \frac{\partial a}{\partial x^\rho} + a \Box s = 0$$

La forme de l'équation de continuité est donc conservée, sans adjonction de second membre, c'est-à-dire que, en posant, d'après (5)

$$\rho = a^2 (- \frac{1}{c^2} \frac{\partial s}{\partial t} + \gamma^4)$$

ρ , densité attachée à Ψ , obéit à l'équation de continuité (4), v^i n'étant autre que la vitesse spatiale des lignes de guidage de Ψ , égale à la vitesse des lignes de guidage de u , puisque $\frac{\partial s}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$.

Or on a aussi :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\sigma v^i) = 0$$

puisque σ , densité des singularités, se comporte suivant l'équation de continuité. On déduit de ce rapprochement que

$$\frac{\rho}{\sigma} = K = Cte$$

le long d'une ligne de guidage. L'équation (12) s'écrit alors :

$$L \Psi + \frac{4\pi}{c} \rho \frac{\Omega}{K} e^{is} = 0$$

Enfin, comme Ω doit obéir à l'équation (7), où ζ est remplacé par s , et que cette équation ne détermine Ω qu'à une constante multiplicative près, on peut faire entrer K dans cette constante, et nous aboutissons ainsi à l'équation non-linéaire :

(N) $$\boxed{L \Psi + \frac{4\pi}{c} \Omega \quad a^2(- \frac{1}{c^2} \frac{\partial s}{\partial t} + \gamma^4) e^{is} = 0}$$

Nous sommes ainsi conduits à substituer à l'équation linéaire (E) le système d'équations composé de l'équation aux dérivées partielles (N) et de l'équation intégrale (7) .

5.- Raccordement des solutions régulière et singulière.

Supposons qu'on connaisse une solution Ψ , Ω du système (N,7). On peut définir sur Ψ les lignes de guidage, prendre ces lignes de guidage pour trajectoires L , et, à l'aide des fonctions $\omega = \Omega\, e^{is}$, construire des solutions singulières u_1 , u_2 ... u_K ... , sur une famille discrète L_1 ... L_K ... des L et leur somme $u = \sum u_K$. Soit σ la densité des singularités de la famille ainsi choisie.

Supposons que σ soit telle que Ψ soit la moyenne de u définie par (9) . En tant que moyenne, Ψ obéit, d'après (12) à l'équation.

$$L\Psi + \frac{4\pi}{c}\,\sigma\Omega\, e^{is} = 0$$

En rapprochant cette équation de l'équation (N) , à laquelle obéit également Ψ , on voit qu'en résulte :

$\sigma = a^2(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t} + \chi^4)$. Nous pouvons donc énoncer :

Si Ψ est une solution régulière du système (N , 7), et u une solution singulière de l'équation (E) et de l'équation intégrale (7), et si les conditions suivantes sont remplies:

a) les lignes de u sont des lignes de guidage de Ψ , les phases φ et s étant égales sur ces lignes ;

b) Ψ est moyenne de u d'après la définition (9) ; alors la densité des singularités de u est égale à la densité ρ attachée à l'onde Ψ .

L'hypothèse que la solution régulière obéit à une équation non linéaire est essentielle. Si en effet on supposait que Ψ soit une solution de la même équation linéaire (E) que u , la condition b) étant alors hors de question et la condition a) étant maintenue, on arriverait sans difficulté au résultat suivant : les quantités ρ et σ sont, non plus égales, mais proportionnelles sur chaque ligne de guidage de Ψ , la constante de proportionnalité variant avec cette ligne de guidage.

On peut, d'autre part, se demander si la condition b) ne pourrait pas être supprimée puisque, en dehors de la coïncidence des phases et de leurs dérivées premières, conditions essentielles du raccord dans toute théorie de la double solution, elle impose une relation supplémentaire à Ψ et u .

Il semble bien qu'il n'en soit rien : la coïncidence des lignes de guidage ne fait en effet que traduire une identité de trajectoires ; elle ne renferme en elle-même aucune relation de densités, et cette relation ne peut advenir que si par ailleurs existe une condition, quelle qu'elle soit, qui oblige la fonction Ψ à "ressembler" à la fonction u .

6.- Phases polyvalentes.

Il nous reste maintenant à nous poser la question (et on verra que la réponse n'est pas aisée) de savoir si les conditions a) et b) ci-dessus peuvent être effectivement réalisées.

La première de ces conditions est, comme on vient de le voir, l'égalité de φ et s sur les courbes L_K . Comme nous l'avons vu au paragraphe 3 , cette condition est équivalente à la condition (8) sur L_K :

$$\varphi_K = \text{phase de } (u - u_K) \tag{8}$$

On aperçoit immédiatement un cas particulier dans lequel cette condition sera réalisée : c'est le cas dans lequel toutes les fonctions u_K ont la même phase φ dans tout l'espace-temps ; la moyenne de $u = \sum u_K$ aura d'ailleurs également dans ce cas la même phase φ . C'est à ce cas particulier que nous allons restreindre notre étude, mais, auparavant, tâchons de définir, dans la mesure du possible la portée de cette restriction.

Un argument en sa faveur est que, lorsque le nombre des singularités, et le nombre des trajectoires L_K par conséquent, est grand, l'égalité des phases φ et s sur ces trajectoires revient pratiquement à leur égalité dans le continuum à 4 dimensions. De là à transposer sur le plan de l'identité mathématique, il n'y a qu'un pas, qu'il est tentant de franchir.

D'autre part, ainsi qu'on le verra plus loin, la restriction ainsi imposée amène à définir la phase par des équations qui, quand elles sont vérifiées, sont totalement indépendantes de l'amplitude : la phase régissant les trajectoires (comme l'action dans l'équation classique de Hamilton - Jacobi), l'amplitude , les densités, le potentiel quantique $\frac{\Box f}{f}$ (ou $\frac{\Box a}{a}$) n'aurait plus d'influence sur la détermination de la phase.

Enfin, last but not least, les calculs effectués dans cette hypothèse sont harmonieux et complets, comme on le verra plus loin.

En contrepartie, on peut ramarquer que, jusqu'à preuve administrée, on n'a pas grande indication physique pour pencher vers une hypothèse ou vers une autre. En outre, et c'est cela qui est le plus important, l'équation (8) elle-même introduit la non-linéarité. En effet, si on a formé une famille de solutions u_K obéissant à cette équation, en général, l'adjonction à cette famille d'une solution supplémentaire (même dotée d'une seule singularité) u', fera que la nouvelle famille n'obéira plus à (8) ; autrement dit, la somme de 2 solutions u et u' de (E) satisfaisant chacune à (8) est encore solution de (E), mais en général ne satisfait plus à (8) : c'est la caractéristique même de la non-linéarité. Si on se restreint au cas particulier envisagé, cette propriété cesse, l'adjonction à la famille u_K d'une solution u' possédant la même phase, dans tout l'espace-temps, que les u_K, ne modifie pas la condition (8). Bien entendu, l'introduction de ψ amènera la non-linéarité, mais un parallélisme harmonieux disparaît.

En tout état de cause, seules l'expérience et la théorie poussées plus loin permettront de trancher.

7.- Conditions de polyvalence.

Résolvons donc le problème dans le cas particulier envisagé. Nous appellerons phase polyvalente une fonction s (ou φ, son nom n'importera plus désormais) telle qu'on puisse lui faire correspondre une infinité d'amplitudes singulières dont la singularité (ponctuelle pour simplifier) puisse, à l'instant initial, être placée arbitrairement.

De telles phases existent-elles ? Une fonction s étant donnée, et en nous plaçant dans le cas de l'équation linéaire (E), la fonction f (régulière ou singulière) doit obéir aux deux équations (1) et (2) . Le problème posé est celui de la compatibilité des équations aux dérivées partielles ; on sait que ce n'est pas un petit problème. Laissant de côté les méthodes théoriques d'examen, pratiquement inapplicables ici, on peut en avoir une solution partielle par la méthode suivante.

Tenant compte des équations (3) et intégrant l'équation (2) le long d'une ligne de guidage on obtient :

$$\log \frac{f}{f_0} = - \tfrac{1}{2} \int_0^\lambda \Box s \, d\lambda = \log F \tag{13}$$

f_0 étant la valeur de f pour $\lambda = 0$, donc sur une hypersurface à 3 dimensions. En portant la valeur $f = f_0 F$ dans (1) on obtient une équation en f_0. La substitution est facile si on fait un changement de coordonnées convenable. Les équations finies résolvant les équations différentielles (3) sont de la forme

$$x^{\sigma} = x^{\sigma}(\xi^k, \lambda)$$

ξ^k étant des paramètres dont la variation peut définir l'hypersurface $\lambda = 0$. En prenant ξ^k et λ comme coordonnées au lieu des x^{σ}, les $g^{\rho\sigma}$ se transforment en des coefficients $G^{\rho\sigma}$, les χ^{ρ} de même, et l'équation (1) devient, après division par $f = f_0 F$:

$$G^{ik} \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + H^k \frac{1}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + J = 0 \qquad i, k = 1,2,3 \tag{14}$$

Or dans cette équation, f_0 n'est fonction que des ξ^k, tandis que les G^{ik} sont fonctions des ξ^k et de λ. En général aucune solution autre que zéro n'est possible. Pour qu'une solution non triviale soit possible, il faut et il suffit que le système constitué par l'équation (14) et l'ensemble des équations dérivées successives par rapport à λ, le tout pris pour $\lambda = 0$:

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial \lambda} \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + \frac{\partial H^k}{\partial \lambda} \frac{1}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0 \tag{15}$$

etc.

ne renferme que neuf équations indépendantes au plus. C'est encore un problème de compatibilité des équations aux dérivées partielles.

Restreignant encore (peut-être peu, à vrai dire) la portée de notre analyse, nous nous bornerons au cas où le nombre des équations indépendantes est égal à 2, savoir (14) et (15). Les conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité sont alors les équations :

$$\frac{1}{G^{ik}} \frac{\partial G^{ik}}{\partial \lambda} = \frac{1}{H^k} \frac{\partial H^k}{\partial \lambda} = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \lambda} = \mathfrak{M} \tag{16}$$

Si ces équations sont satisfaites quel que soit λ, f_0 est alors déterminé par la seule équation (14), qu'on peut d'ailleurs rendre indépendante de λ en la divisant par $e^{\int \mathfrak{M} d\lambda}$. Outre ses solutions régulières, l'équation (14) est susceptible d'une infinité de solutions singulières ponctuelles, en $\frac{1}{r}$ (les G^{ik} déterminent une forme définie positive), dont la singularité peut être placée arbitrairement : cela résulte des théorèmes d'Hadamard dans la recherche des solutions élémentaires d'une équation à 3 variables.

Le jeu de l'équation (13) fait alors que la solution f , donc $f\, e^{is}$, est parfaitement déterminée, sa singularité se plaçant sur la ligne de guidage issue de la singularité de f_0 pour $\lambda = 0$.

En outre, comme l'expression (6) est l'expression la plus générale des solutions singulières d'espace-temps en $\frac{1}{\tau}$, la solution $f\, e^{is}$ ainsi obtenue est bien de cette même forme.

Enfin, comme s est régulière, l'équation intégrale sera sûrement vérifiée.

On peut facilement interpréter les conditions concernant les G^{ik} en revenant au système de coordonnées initial. En opérant localement (et la forme même du résultat montre que le résultat est valable partout), on trouve facilement que les conditions $\frac{\partial G^{ik}}{\partial \lambda} = \mathfrak{M}\, G^{ik}$ peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(v^i\, v^k) + \frac{\mathfrak{M}}{u^4}\left(\delta_{ik} - \frac{v^i\, v^k}{c^2}\right) = 0 \tag{17}$$

dont deux combinaisons évidentes donnent :

$$\frac{1}{v^2}\left[\frac{dv^2}{dt} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial v^2}{\partial t}\right] + \frac{\mathfrak{M}}{u^4}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0 \tag{18}$$

$\frac{d}{dt}$ étant la dérivée totale le long d'une ligne de guidage, et :

$$2\,\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{\mathfrak{M}}{u^4}\left(3 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0 \tag{19}$$

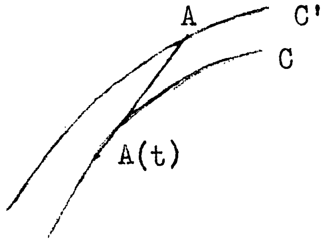
Par élimination de la dérivée $\frac{\partial v^2}{\partial t}$ on obtient :

$$\frac{\mathfrak{M}}{u^4} = \frac{1}{3}\ \frac{d}{dt}\log\left[(c^2 - v^2)(a^2\, u^4)^2\right]$$

a étant l'une quelconque des amplitudes que l'on peut associer à s . Compte tenu de ce que $u^4 = \frac{dt}{d\lambda}$, l'intégrale $\int \mathfrak{M}\, d\lambda$ a une expression finie simple

8.- Calcul de la fonction Ω .

Nous pouvons d'autre part calculer la fonction Ω par méthode différentielle à partir de sa valeur Ω_0 pour $\lambda = 0$ par la méthode suivante, qu'on peut rendre rigoureuse sans en altérer la conclusion. Considérons une ligne de guidage L de s_0 servant de trajectoire à une solution singulière u définie par (6) .



Soit C la projection de cette trajectoire dans l'espace, L' et C' les courbes correspondantes pour une ligne de guidage voisine de la première. Soit à l'instant t , le point singulier A(t) sur C et le point M de C' situé sur la tangente en A(t) à C (bien entendu il aura fallu choisir convenablement C'). On montre sans difficulté à partir de (6), que

$$f(M\,,\,t)\; r \sim \Omega\,(t) \qquad\qquad r = A_t\, M$$

Lorsque t varie, M varie en même temps, de même que Ω . On différentie cette équation, et on la compare à la différentielle obtenue en appliquant l'équation de continuité (4) à la trajectoire C' :

$$(20) \qquad 2\,\frac{\delta f}{f} + \frac{\delta u^4}{u^4} + \frac{\partial v^i}{\partial x^i}\,\delta t = 0$$

Cette comparaison donne :

$$2\,\frac{\delta \Omega}{\Omega} = 2\,\frac{\delta r}{r} - \frac{\delta u^4}{u^4} - \frac{\partial v^i}{\partial x^i}\,\delta t = 0$$

Or on peut calculer $\delta \tau$; on trouve :

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{1}{2v^2}\,\frac{\partial v^2}{\partial x^k}\,v^k \delta t = \frac{1}{2v^2}\,\Big(\frac{dv^2}{dt} - \frac{\partial v^2}{\partial t}\Big)\delta t$$

Une combinaison évidente des équations (18) et (19) permet alors d'écrire :

$$(21) \qquad 2\,\frac{\delta \Omega}{\Omega} = \Big(2\,\frac{\mathfrak{M}}{u^4} + \frac{\partial v^i}{\partial x^i}\Big)\,\delta t - \frac{\delta u^4}{u^4}$$

et enfin, en tenant compte le la valeur (19) de $\mathfrak{M}$

$$\Omega = \Omega_0\,\Big[\frac{(c^2 - v^2)a}{u^4}\Big]^{1/3}$$

Il est remarquable que, lorsqu'on effectue le calcul rigoureux (car il est évident que l'on a choisi M de manière particulière et qu'il faut se débarrasser de cette restriction), les conditions (17) sont précisément celles qui rendent le résultat indépendant de la direction $A_t\,M$ choisie.

La façon dont ont été obtenues les équations (18) et (19) à partir de (17) montre que le coefficient $\frac{1}{3}$ résulte du nombre de dimensions de l'espace.

9.- Passage à l'équation non linéaire.

Enfin nous avons jusqu'ici raisonné sur l'équation linéaire. Il est manifeste que, dans le cas d'une équation non linéaire, la polyvalence de la phase requiert une condition supplémentaire, à ajouter aux conditions (16) . Le terme supplémentaire de l'équation (N) ~~étant~~ $\frac{4\pi}{C}\,\Omega\, a^2\, u^4$ (a peut aussi bien s'appeler f) la condition supplémentaire cherchée est, puisque l'équation (14) a été obtenue après division par f " :

$$\frac{1}{\Omega\, a\, u^4}\;\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\Omega\, a\, u^4\right) = \mathfrak{M}$$

ou encore, en tenant compte de ce que $u^4 = \frac{dt}{d\lambda}$:

$$\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \frac{1}{u^4}\frac{du^4}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{u^4}$$

et enfin, d'après l'équation de continuité (4) :

$$\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2u^4}\frac{du^4}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{u^4}$$

C'est précisément l'équation (21). Nous pouvons donc énoncer :

Si une phase s est polyvalente pour l'équation (E) , elle sera polyvalente pour l'équation (N) correspondante, à condition que Ω satisfasse à l'équation intégrale (7) , résolue ici par l'équation (21), et ceci quelle que soit l'amplitude a de la solution de (N) .

En résumé, nous voyens que l'équation (N), associée à l'équation intégrale (7), est telle que :

1) le raccord des phases et des vitesses entre solution régulière et solution singulière entraîne la densité $\rho = \psi\,\psi^*\,u^4$ pour celle des singularités ;

2) dans le cas particulier de phases polyvalentes, elle fournit, avec (21) , un système immédiatement résoluble en Ω .

La fonction Ω remplace la fonction de Dirac qui figure implicitement au second membre de l'équation (E) quand on lui attribue des solutions singulières. Ce faisant, elle remplace une singularité mathématique par une répartition finie, susceptible de traduire une structure, dont l'évolution au cours du temps est donnée par l'équation (21) en fonction de la structure initiale donnée par Ω_0 .

Enfin on remarquera que les phases polyvalentes doivent vérifier les 9 équations (16) . Ces équations ont-elles des solutions ? Le cas particulier de l'équation $\Box u - ku = 0$ $(k = Cte)$, pour lequel la fonction $s = \alpha_\rho x^\rho$ obéit bien à ces conditions, incline à penser que la réponse est affirmative (il existe d'ailleurs d'autres cas particuliers où ces relations sont encore vérifiées). Il faut ajouter, conformément à ce qui a été dit plus haut, que dans ce cas, la phase est déterminée par des équations du type (16) <u>totalement indépendantes de l'amplitude</u>.