Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

J. Winogradzki

Invariance et conservation en relativité restreinte et généralisée

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. nº 11, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A10_0>

INVARIANCE ET CONSERVATION EN RELATIVITÉ RESTREINTE ET GÉNÉRALISÉE

par Mme J. WINOGRADZKI.

E. Noether a étudié les champs dont les équations dérivent d'un principe variationnel, l'intégrale d'action étant invariante par rapport à un groupe continu G [1]. Elle a montré que si G est un groupe fini G_ρ , ρ grandeurs se conservent en vertu des équations du champ ; si G est un groupe infini $G_{\infty\rho}$, les équations du champ satisfont à ρ identités. Et elle a donné la forme de ces équations et de ces identités. Dans chaque cas particulier, on trouve donc des équations de conservation satisfaites en vertu des équations du champ, ou bien des identités auxquelles satisfont les équations du champ, par simple application de l'un de ces deux théorèmes. Dans cet exposé, je montrerai que ces théorèmes peuvent aussi être fort utiles pour le traitement d'autres questions. J'utiliserai le premier théorème pour étudier une question de Relativité Restreinte. J'utiliserai le second pour établir les identités auxquelles satisfont les équations du champ généralisé d'Einstein. C'est un champ qui ne possède aucunement les propriétés des champs considérés par Noether : d'abord, les équations sont obtenues par variations liées alors que Noether suppose une variation libre, de plus l'intégrale d'action n'est pas invariante par rapport au groupe $G_{\infty 8}$ considéré ! Néanmoins, le théorème de Noether permet d'établir 8 identités, dont 4 sont nouvelles. Il faut remarquer toutefois que l'on peut obtenir ces 4 dernières identités sans se servir du théorème de Noether, mais le procédé est beaucoup moins élégant.

Avant de commencer l'exposé de ces questions, je voudrais rappeler brièvement la démonstration (en partie commune) des 2 théorèmes et exposer quelques applications immédiates du premier. En effet, le second théorème, du moins dans ces applications à la Relativité Générale, est bien connu à la suite des travaux de Klein [2] et de Weyl [3] . Par contre le premier, s'il a bien suscité des travaux [4][5] est néanmoins resté longtemps assez peu connu ; l'attention des physiciens n'y a été attirée de nouveau que ces dernières années [6][7][8][9] .

Réintroduit aujourd'hui dans l'exposé de la Relativité Restreinte, il permet du moins de systématiser des résultats acquis et de simplifier grandement certaines démonstrations.

1.- Considérons n variables indépendantes x_k (lettres latines : 1 à n), p fonctions $u_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ (lettres grecques : 1 à p), une fonction L invariante de forme des x_k, u_α et des dérivées des u_α par rapport aux x_k jusqu'à un ordre fini quelconque, et un groupe continu G tel que

$$(G) \qquad \begin{cases} x_k \longrightarrow x'_k \ , \\ u_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow u'_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n) \ . \end{cases}$$

Pour une transformation infinitésimale, j'écrirai

$$(1) \qquad x'_k - x_k = \delta x_k$$

$$(2) \qquad u'_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n) - u_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \delta u_\alpha$$

Considérons l'intégrale

$$(3) \qquad I = \int_D L\, dx \ ,$$

dx étant un élément d'hypervolume et D un hypervolume quelconque. La variation δI de l'intégrale I pour une transformation infinitésimale du groupe G, c'est-à-dire pour une variation simultanée des variables indépendantes x_k et dépendantes u_α est bien connue.

Elle est de la forme

$$(4) \qquad \delta I = \int_D \left(A_\alpha \frac{\delta L}{\delta u_\alpha} + \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) dx \ ,$$

$\frac{\delta L}{\delta u_\alpha}$ étant les dérivées variationnelles de L . A_α , B_k sont des fonctions dont la forme ne nous importe pas pour le moment. Si l'intégrale I est invariante par rapport au groupe G ,

$$(5) \qquad \delta I = 0$$

et l'on a, puisque l'hypervolume D est quelconque,

$$(6) \qquad A_\alpha \frac{\delta L}{\delta u_\alpha} + \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0 \ .$$

Si les u_α sont les composantes d'un champ dont les équations dérivent d'un principe variationnel, le lagrangien étant L, c'est-à-dire si les u_α satisfont aux équations

$$\frac{\delta L}{\delta u_\alpha} = 0 , \tag{7}$$

les équations (6) s'écrivent

$$\frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0 . \tag{8}$$

B_k sont des formes linéaires homogènes des δx_k, δu_α. Si maintenant le groupe G est fini et dépend de ρ paramètres

$$\varepsilon_{(1)} , \ldots , \varepsilon_{(\rho)} ,$$

les équations (8) peuvent s'écrire

$$\sum_{\sigma=1}^{\rho} \varepsilon_{(\sigma)} \frac{\partial B_k^{(\sigma)}}{\partial x_k} = 0 . \tag{9}$$

D'où, puisque les paramètres $\varepsilon_{(1)} , \ldots , \varepsilon_{(\rho)}$ sont quelconques,

$$\frac{\partial B_k^{(\sigma)}}{\partial x_k} = 0 \qquad \sigma = 1 , \ldots , \rho . \tag{10}$$

Ce sont les ρ équations de conservation satisfaites en vertu des équations du champ (7).

Remarquons que les équations de conservation (10) ne sont pas générales, elles sont écrites pour un groupe G_ρ quelconque mais déterminé ; seul le lagrangien est encore arbitraire. La forme générale des équations de conservation est la forme (8). Si le lagrangien L ne contient pas de dérivées d'ordre supérieur à 1 , l'équation (8) s'écrit explicitement

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_m} \left[\left(L\, \delta_{km} - u_{\alpha,k} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,m}} \right) \delta x_k + \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,m}} \delta u_\alpha \right] = 0} \tag{11}$$

Dans ce qui suit, j'appellerai ces équations "équations de Noether".

Considérons maintenant un groupe G infini. G dépend de ρ fonctions arbitraires $\varphi_{(1)} , \ldots , \varphi_{(\rho)}$, et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre k . Revenons à l'équation (4) . Les A_α sont maintenant des formes linéaires homogènes des ρ fonctions arbitraires et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre k . Par des intégrations par partie, on peut donc mettre l'équation (4) sous la forme

$$\text{(12)} \qquad \delta I = \int_D \left(\sum_{\alpha=1}^{\rho} \varphi_{(\alpha)} \hat{A}'^{(\alpha)}_{\alpha} \frac{\delta L}{\delta u_\alpha} + \frac{\partial B'_k}{\partial x_k} \right) dx \quad ,$$

les $\hat{A}'^{(\alpha)}_{\alpha}$ étant des opérateurs différentiels linéaires d'ordre k . Choisissons maintenant des fonctions $\varphi_{(\alpha)}$ qui annulent B'_k sur l'hypersurface qui limite D ; l'équation (12) s'écrit

$$\text{(13)} \qquad \delta I = \int_D \left(\sum_{\alpha=1}^{\rho} \varphi_{(\alpha)} \hat{A}'^{(\alpha)}_{\alpha} \frac{\delta L}{\delta u_\alpha} \right) dx \quad .$$

Si l'intégrale I est invariante par rapport au groupe G ,

$$\text{(5)} \qquad \delta I = 0$$

et l'on a, puisque l'hypervolume D est quelconque,

$$\text{(14)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{\rho} \varphi_{(\alpha)} \hat{A}'^{(\alpha)}_{\alpha} \frac{\delta L}{\delta u_\alpha} = 0$$

D'où, puisque les fonctions $\varphi_{(1)}$, ... , $\varphi_{(\rho)}$ sont quelconques,

$$\text{(15)} \qquad \hat{A}'^{(\alpha)}_{\alpha} \frac{\delta L}{\delta u_\alpha} = 0$$

Ce sont les ρ identités auxquelles satisfont les équations du champ (7). Ces identités sont linéaires, homogènes et d'ordre k .

– Jusqu'à présent il s'est agi de mathématiques pures : un chapitre de calcul variationnel. Appliquons maintenant ces théorèmes à l'étude des champs physiques. Nous poserons donc $n = 4$, $x_4 = i\,ct$; les indices grecs désignerons dorénavant des indices tensoriels ou spinoriels ou des ensembles de tels indices.

2.- Parmi tous les groupes par rapport auxquels peut être invariante l'intégrale d'action d'un champ de l'Univers de Minkowski, il y en a un tout à fait particulier : c'est le groupe des déplacements G_{10} . En effet, l'invariance de l'intégrale d'action par rapport à ce groupe n'est pas l'apanage de certains champs particuliers, mais est propre à tous les champs isolés. Cette invariance exprime en effet des propriétés de l'Univers de Minkowski lui-même : l'invariance par rapport au sous-groupe des translations G_4 - son homogénéité, l'invariance par rapport au sous-groupe des rotations G_6 - son isotropie. (Il s'agit, bien entendu, de translations et de rotations quadridimensionnelles.) Appliquons le premier théorème de Noether à ces 2 groupes. Les systèmes de référence utilisés seront orthonormaux.

Si G_ρ est le groupe G_4 des transaltions, les δx_k sont des constantes, $\delta u_\alpha = 0$. Les équations de Noether (11) s'écrivent donc

(16) $$\frac{\partial}{\partial x_m} \left(L\, \delta_{km} - u_{\alpha,k} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,m}}\right) = 0$$

Ce sont les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie. Ce qui nous intéresse surtout ici, en vue de ce qui va suivre, c'est qu'elles donnent la structure du tenseur impulsion-énergie canonique

(17) $$T_{km} = L\, \delta_{km} - u_{\alpha,k} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,m}} \quad .$$

Autrement dit, non seulement le tenseur impulsion-énergie canonique est conservatif en vertu de l'invariance de l'intégrale d'action par rapport aux translations, mais cette invariance donne sa structure même.

Si G_ρ est le groupe G_6 des rotations, on a

$$(G_6) \qquad \begin{cases} \delta x_k = \alpha_{ik}\, x_i \\ \delta u_\alpha = \alpha_{ik}\, S_{ik\alpha\beta}\, u_\beta \end{cases}$$

où
$$\alpha_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} - \delta_{ik} = -\alpha_{ki} \;;$$

$S_{ik\alpha\beta}$ dépend de la variance du champ u_α considéré. Les équations de Noether (11) s'écrivent donc

(18) $$\frac{\partial}{\partial x_m} \left(x_i\, T_{km} - x_k\, T_{im} + S_{ikm} - S_{kim}\right) = 0$$

où T_{km} est défini par (17) et

(19) $$S_{ikm} = S_{ik\alpha\beta}\, u_\beta \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,m}} .$$

L'équation (18) exprime la conservation du "moment relativiste", mais c'est le moment par rapport à un point quelconque d'un Univers homogène ! Le moment cinétique relativiste physiquement intéressant a été étudié par Mr de Broglie [10], ainsi que par Mr Costa de Beauregard [11]. Je n'en parlerai pas ici, ce que je me propose ici, ce n'est pas d'interpréter physiquement l'équation (18), mais c'est de déduire de cette équation, seule, la structure du tenseur impulsion-énergie métrique. Pour cela, commençons par considérer un tenseur du 3e rang S_{ikm} quelconque. Par une suite d'intégrations par partie, il est possible de mettre sa divergence sous la forme d'une divergence d'une forme linéaire des coordonnées. En effet

(20) $$\frac{\partial S_{ikm}}{\partial x_m} = \frac{\partial S_{rkm}}{\partial x_m}\delta_{ir} = \frac{\partial S_{rkm}}{\partial x_m}\frac{\partial x_i}{\partial x_r}$$

En intégrant d'abord par rapport à x_r, puis, celui des 2 termes obtenus qui n'est pas une divergence, par rapport à x_m, on obtient

(21) $$\frac{\partial S_{ikm}}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left[x_i \frac{\partial}{\partial x_r}(S_{mkr} - S_{rkm})\right] + \frac{\partial S_{mki}}{\partial x_m}$$

De même

(22) $$\frac{\partial S_{mki}}{\partial x_m} = \frac{\partial S_{mri}}{\partial x_m}\delta_{kr} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left[x_k \frac{\partial}{\partial x_r}(S_{rmi} - S_{mri})\right] + \frac{\partial S_{kmi}}{\partial x_m}$$

Et enfin

(23) $$\frac{\partial S_{kmi}}{\partial x_m} = \frac{\partial S_{kmr}}{\partial x_m}\delta_{ir} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left[x_i \frac{\partial}{\partial x_r}(S_{krm} - S_{kmr})\right] + \frac{\partial S_{kim}}{\partial x_m}$$

D'où,

(24) $$\frac{\partial S_{ikm}}{\partial x_m} = \left[x_i \frac{\partial}{\partial x_r}\frac{S_{mkr} + S_{krm} - S_{rkm} - S_{kmr}}{2} + x_k \frac{\partial}{\partial x_r}\frac{S_{rmi} - S_{mri}}{2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{S_{ikm} + S_{kim}}{2}$$

Et

$$\frac{\partial S_{ikm}}{\partial x_m} - \frac{\partial S_{kim}}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}[x_i \, S_{km} - x_k \, S_{im}] \tag{25}$$

avec

$$S_{km} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_r}\,(- S_{kmr} + S_{mrk} - S_{rkm} - S_{rmk} + S_{mkr} + S_{krm}) \tag{26}$$

L'équation (18) peut donc s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\,(x_i \, T'_{km} - x_k \, T'_{im}) = 0 \tag{27}$$

où

$$T'_{km} = T_{km} + S_{km} = L\,\delta_{km} - u_{\alpha,k}\,\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,m}} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_r}\,(- S_{kmr} + S_{mrk} - S_{rkm} - S_{rmk} + S_{mkr} + S_{krm}) \tag{28}$$

c'est-à-dire est le tenseur impulsion-énergie métrique [12][13][14].

Ainsi, de même que l'invariance de l'intégrale d'action par rapport aux translations non seulement entraîne la nullité de la divergence du tenseur impulsion-énergie canonique mais encore donne sa structure, l'invariance de l'intégrale d'action par rapport aux rotations donne la structure du tenseur impulsion-énergie métrique.

D'après ce qui précède, le moment du tenseur impulsion-énergie métrique est conservatif en vertu de l'invariance de l'intégrale d'action par rapport aux rotations. Comme, d'après (28),

$$\frac{\partial T'_{km}}{\partial x_m} = \frac{\partial T_{km}}{\partial x_m}\ , \tag{29}$$

le tenseur impulsion-énergie métrique est conservatif lui-même en vertu de l'invariance de l'intégrale d'action par rapport aux translations.

Enfin, si un tenseur du second rang est conservatif en même temps que son moment (la contraction se faisant dans les deux cas par rapport au même indice), il est symétrique. Donc, le tenseur impulsion-énergie métrique est symétrique en vertu de l'invariance de l'intégrale d'action par rapport au groupe des déplacements tout entier.

Ainsi, les 3 propriétés essentielles du tenseur impulsion-énergie **métrique** sont dues, <u>séparément</u>, aux 3 invariances de l'intégrale d'action exprimant l'homogénéité et l'isotropie de l'Univers de Minkowski : invariances par rapport au groupe G_{10} des déplacements, par rapport au sous-groupe G_4 des translations et par rapport au sous-groupe G_6 des rotations.

3.- L'Univers de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger est un Univers affine et métrique dont la connexion affine et le tenseur métrique sont, en général, asymétriques.

Les équations du champ généralisé sont les équations du "système fort"

$$(30) \qquad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}{}_{,k} = 0 \,, \quad V_i^{km} = 0 \,, \quad W_{\underline{ik}} = 0 \,, \quad W_{\underset{\vee}{ik},m} + W_{\underset{\vee}{km},i} + W_{\underset{\vee}{mi},k} = 0$$

dont le lagrangien est la densité de courbure de l'Univers

$$(31) \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} \left(\Gamma^m_{ik,m} - \Gamma^m_{im,k} + \Gamma^m_{pm} \Gamma^p_{ik} - \Gamma^m_{ip} \Gamma^p_{mk} \right) .$$

V_i^{km} et W_{ik} sont les dérivées variationnelles du lagrangien par rapport à Γ^i_{km} et $\mathfrak{g}^{ik}$. Ces équations sont invariantes par rapport au groupe $U_{\infty 8}$ qui se décompose en deux sous-groupes : le groupe $G_{\infty 4}$ des transformations de coordonnées et le groupe $G'_{\infty 4}$ des λ-transformations

$$(32) \qquad \lambda(x^i) = x^i \,, \qquad \lambda(g_{ik}) = g_{ik} \qquad \lambda(\Gamma^i_{km}) = \Gamma^i_{km} + \delta^i_k \lambda_m \,,$$

λ_k étant un champ vectoriel arbitraire. [15] [16] [17] [18]

Cherchons les identités auxquelles satisfont les équations de tout système fort dont le lagrangien a même U-variance que le lagrangien du champ généralisé. [19]

Désignons par $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ ... les grandeurs qui ont même U-variance que le lagrangien du champ généralisé. D'après les définitions (31) et (32), ce sont des densités scalaires telles que

$$(33) \qquad \lambda(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} - 2 \, \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}} \lambda_{i,k}$$

On montre aisément qu'il existe une infinité de telles grandeurs.

Il résulte de la définition des grandeurs $\mathfrak{A}$ que les intégrales

$$I = \int_D (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}') \, d\tau$$

sont, quel que soit l'hypervolume D, invariantes par rapport au groupe $U_{\infty 8}$.

D'après le second théorème de Noether, les dérivées variationnelles de $\mathfrak{U} - \mathfrak{U}'$ par rapport au tenseur métrique et à la connexion affine satisfont donc à 4 équations algébriques

$$N^{i}_{(0)}(\mathfrak{U} - \mathfrak{U}') = 0 \tag{34}$$

résultant de l'invariance de I par rapport au sous-groupe des λ-transformations et à 4 équations du premier ordre

$$N^{i}_{(1)}(\mathfrak{U} - \mathfrak{U}') = 0 \tag{35}$$

résultant de l'invariance de I par rapport au sous-groupe des transformations de coordonnées. Comme nous avons vu, les identités de Noether sont linéaires et homogènes par rapport aux dérivées variationnelles de la fonction que l'on intègre. Les équations (34) et (35) peuvent donc s'écrire

$$N^{i}_{(0)}(\mathfrak{U}) = N^{i}_{(0)}(\mathfrak{U}') \tag{36}$$

$$N^{i}_{(1)}(\mathfrak{U}) = N^{i}_{(1)}(\mathfrak{U}') \tag{37}$$

Les identités (37) sont triviales. L'intégrale $\int_D \mathfrak{U}\, d\tau$ est en effet invariante par rapport au sous-groupe des transformations de coordonnées. Donc

$$N^{(i)}_{(1)}(\mathfrak{U}) = 0 \quad . \tag{38}$$

Les 4 identités (38) ont été étudiées par Einstein [15] . Quant aux 4 identités (36) , elles s'écrivent explicitement

$$\delta^{i}_{k} \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta \Gamma^{i}_{km}} = \delta^{i}_{k} \frac{\delta \mathfrak{U}'}{\delta \Gamma^{i}_{km}} \tag{39}$$

Pour calculer effectivement ces expressions, utilisons une grandeur $\mathfrak{U}$ de structure particulièrement simple, afin d'alléger les calculs. Si l'on choisit $\mathfrak{U} = \frac{4}{3}\, \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}} \Gamma_{i,k}$, le résultat est immédiat. On obtient $2\, \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{mr}}{}_{,r}$. Donc, <u>toute</u> grandeur $\mathfrak{U}$ satisfait à

$$\delta^{i}_{k} \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta \Gamma^{i}_{km}} - 2\, \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{mr}}{}_{,r} = 0 \tag{40}$$

Ces 4 identités, déduites de la λ-variance de $\mathfrak{U}$, lient les équations auxquelles satisfont les équations du système fort dont $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ est le lagrangien.

Les identités (40) lient non pas l'ensemble des équations du champ, mais seulement les 4 équations $\mathcal{G}^{\underset{\vee}{ik}}{}_{,k} = 0$ posées a priori et les 16 équations $\frac{\delta \mathcal{O}\!\mathcal{L}}{\delta \Gamma^{(k)}_{(k)m}} \equiv V^{(k)m}_{(k)} = 0$ obtenues en faisant varier les 16 variables non λ-invariantes $\Gamma^{(k)}_{(k)m}$; les parenthèses indiquent l'absence de sommation. La forme des identités (40) est indépendante du lagrangien du système fort considéré, contrairement à celle des identités déduites de la variance relativiste du lagrangien. Dans ces dernières identités, le coefficient de $\mathcal{G}^{\underset{\vee}{km}}{}_{,m}$ est en effet $W_{\underset{\vee}{ik}}$. [15]

D'après (40)

$$\delta^i_k \left(\frac{\delta \mathcal{O}\!\mathcal{L}}{\delta \Gamma^i_{km}}\right)_{,m} = 0 . \tag{41}$$

Cette identité lie les 16 équations du champ obtenues en faisant varier les variables non λ-invariantes. On peut la déduire de l'invariance de l'intégrale $\int \mathcal{O}\!\mathcal{L}\, d\tau$ par rapport au sous-groupe des λ-transformations dont le vecteur λ^D_k est un gradient.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. NOETHER.- Göttinger Nachrichten, 1918, p. 235.

[2] F. KLEIN.- Göttinger Nachrichten, 1918, p. 171.

[3] H. WEYL.- Raum, Zeit, Materie, 3e édition, 1920.

[4] E. BESSEL-HAGEN.- Math. Annalen, 84, 1921, p. 258.

[5] M. MARKOW.- Physikalische Zeitschrift der Sowjet-Union, 10, 1936, p. 773.

[6] D. IVANENKO et A. SOKOLOV.- Théorie classique des champs (problèmes nouveaux). En russe, 1949 ; traduction allemande, 1953.

[7] G. SZAMOSI.- Hung. Phys. Acta, I , 1949, p. 27.

[8] E. L. HILL.- Rev. Mod. Phys., 23, 1951, p. 253.

[9] P. ROMAN.- Acta Physica Ac. Scient. Hung., V, 1955, p. 143.

[10] L. de BROGLIE.- Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion), 1954, Chap. IV.

[11] O. COSTA de BEAUREGARD.- Thèse, Paris 1943.

[12] F. J. BELINFANTE.- Physica, 6 , 1939, p. 887.

[13] L. ROSENFELD.- Mém. Acad. Belg., 8, fasc. 6 , 1940.

[14] R. ISKRAUT.- 2. Phys., 119, 1942, p. 659.

[15] A. EINSTEIN.- Generalization of gravitation theory, Appendix II of the Meaning of Relativy, 1953.

[16] A. EINSTEIN.- Extension du groupe relativiste. Dans : Louis de Broglie, physicien et penseur, 1953.

[17] J. WINOGRADZKI.- C.R. Acad. Sc., Paris, 239, 1954, p. 1359.

[18] J. WINOGRADZKI.- J. Phys., 16, 1955, p. 438.

[19] J. WINOGRADZKI.- C.R. Acad. Sc., Paris, 242, 1956, p. 74.