SÉMINAIRE L. DE BROGLIE.
THÉORIES PHYSIQUES

A. GONZÄLEZ DOMINGUEZ

Les parties finies des intégrales de Riemann-Weyl et les méthodes de régularisation

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. nº 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de Théories Physiques
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1954/1955
-:-:-:-

30 Novembre 1954

Exposé n° 4

LES PARTIES FINIES DES INTÉGRALES DE RIEMANN-WEYL ET LES MÉTHODES DE RÉGULARISATION.

par A. GONZÁLEZ DOMINGUEZ

-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION

On dit en électrodynamique quantique qu'on est en présence d'une divergence "ultraviolette" lorsque les calculs conduisent à une intégrale qui diverge à cause de l'insuffisante décroissance de l'intégrande à l'infini.

Exemples :

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}\ ,\ a>0\ ;\ \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_1^r + q_2^r + q_3^r}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 1}}\ dq_1 dq_2 dq_3\ ;$$

$$\iiiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - m^2 - iy} \qquad 1,1$$

Les physiciens ont imaginé diverses méthodes pour neutraliser les divergences ultraviolettes, dont peut-être la plus importante est celle que MM. Pauli-Villars ont baptisé <u>régularisation</u> ([3], [5], [19], [20], [23], [25]).

Nous ferons dans cet exposé un essai de systématisation des divers procédés qu'on a mis en oeuvre pour éliminer les divergences ultraviolettes en électrodynamique quantique.

A la base de notre exposé est le concept de partie finie <u>à l'infini</u> d'une intégrale divergente. Il s'agit du concept classique de partie finie, de M. Hadamard [8], mais transposé au cas où le point de non-sommabilité de l'intégrande est le point à l'infini. Nous utiliserons le concept de partie finie à l'infini surtout pour donner un sens à des intégrales divergentes de Riemann-Weyl :

$$I_{RW}^{(\alpha)}\left\{f(x)\right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (y-x)^{\alpha-1} f(y)\, dy \quad .$$

On voit que notre point de vue est très voisin de celui de M.M. Riesz, dont le magistral mémoire [20] nous a été d'une utilité inappréciable.

I

1,1.- Soit $f(A)$ $[a \leq A < \infty]$ une fonction qui tend vers l'infini lorsque $A \longrightarrow \infty$. Considérons les fonctions

$$K(A, m, Z) = A^Z \log^m A \,, \qquad (1,1\ ;\ 1)$$

avec m entier non négatif et $\mathrm{Re} Z \geq 0$; en convenant d'exclure la valeur $Z = 0$ si $m = 0$. Soit $C(A)$ une combinaison linéaire de fonctions du type $(1,1\ ;\ 1)$. Si la différence $f(A) - C(A)$ tend vers une limite finie lorsque $A \longrightarrow \infty$, nous dirons que cette limite est la partie finie à l'infini (ou plus brièvement, la partie finie) de $f(A)$:

$$\mathrm{Pf.} f(A) = \lim_{A \to \infty} [f(A) - C(A)]\ ^{(1)} . \qquad (1,1\ ;\ 2)$$

Cette partie finie, si elle existe, est unique. Il y a, naturellement, une définition analogue pour le cas $A < 0$.

1,2.- Un cas particulier important de $(1,1\ ;\ 2)$ est celui où $f(A)$ est une intégrale :

$$f(A) = \int_a^A G(X)\, dX \quad , \qquad (1,2\ ;\ 1)$$

avec

$$G(X) = \sum_\nu C_\nu X^{Z_\nu} + h(X) \quad ; \qquad (1,2\ ;\ 2)$$

ici $h(X)$ est sommable en $[a\ ,\ \infty]$, $a > 0$, C_ν et Z_ν étant des nombres complexes quelconques, avec $\mathrm{Re} Z_\nu \geq -1$.

Deux cas sont alors à distinguer.

1°) Aucun des exposants Z_ν n'est égal à -1 . Alors on déduit de $(1,1\ ;\ 2)$ les deux formules équivalentes

$$\mathrm{Pf.} \int_a^A G(X)\, dX = \lim_{A \to \infty} \left[\int_a^A G(X)\, dX - \sum_\nu C_\nu \frac{A^{Z_\nu + 1}}{Z_\nu + 1} \right] \quad , \qquad (1,2\ ;\ 3)$$

---

(1) C'est, si l'on fait le changement de variable $A = \frac{1}{\varepsilon}$, la même définition de Methée ([15], pag.237) .

ou bien

$$\text{Pf.} \int_a^A G(X)\, dX = \lim_{S \to 0} \int_a^\infty G(X)\, X^S dX \text{ , } \operatorname{Re}S < 0 \text{ .} \qquad (1,2\ ;\ 4)$$

2°) Dans le cas où l'un quelconque des exposants (par exemple, Z_1) est égal à -1 , on déduit de (1,1 ; 2) les résultats équivalents

$$\text{Pf.} \int_a^A G(X)\, dX = \lim_{A \to \infty} \left\{ \int_a^A G(X)\, dX - \sum_{\nu \neq -1} C_\nu \frac{A^{Z_\nu+1}}{Z_\nu+1} - c_1 \log A \right\} \text{ , } \qquad (1,2\ ;\ 5)$$

ou bien

$$\text{Pf.} \int_a^A G(X)\, dX = \lim_{A \to \infty} \left\{ C_1 S^{-1} + \int_a^\infty G(X)\, X^S dX \right. \text{ .} \qquad (1,2\ ;\ 6)$$

1,3.- Donnons deux exemples d'application des définitions ci-dessus. Considérons la série qui définit, pour $\operatorname{Re} S < -1$, la fonction ζ de Riemann :

$$\zeta(S) = \sum_{n=1}^{\infty} n^S \text{ .} \qquad (1,3\ ;\ 1)$$

Plus générale est la formule, valable pour $\operatorname{Re} S < 0$ (cf. [1], pp. 198-200)

$$\zeta(S) = \lim_{A \to \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{n=A} n^S - \frac{A^{S+1}}{S+1} \right. \text{ .} \qquad (1,3\ ;\ 2)$$

Le prolongement analytique de la fonction ζ a donc été accompli en calculant la partie finie de la fonction

$$f(A) = \sum_{n=1}^{A} n^S \qquad (1,3\ ;\ 3) \text{ .}$$

Cet exemple n'est nullement isolé.

Supposons maintenant qu'on est en présence de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{dZ}{dX}\, dX \text{ , } \qquad (1,3\ ;\ 4)$$

où $Z(X)$ se comporte à l'infini de la manière suivante (avec B, C, D constantes).

$$Z(X) = BX + C + DX^{-1} + O(X^{-2}) \text{ , } \qquad (1,3\ ;\ 5)$$

$$\frac{dZ}{dX} = B - DX^{-2} + O(X^{-3}) \text{ .} \qquad (1,3\ ;\ 6)$$

L'intégrale (1,3 ; 4) diverge, mais la fonction

$$f(A) = \int_0^A \frac{dZ}{dX}\, dX \qquad (1,3\ ;\ 7)$$

a une partie finie qui se calcule immédiatement d'après (1,2 ; 3) :

$$\text{Pf. } f(A) = \text{Pf.} \int_0^A \left(\frac{dZ}{dX} - B + B\right) dX = \int_0^\infty \left(\frac{dZ}{dX} - B\right) dX + \text{Pf. } B \int_0^A dX =$$

$$= \lim_{A \to \infty} [Z(A) - BA] - Z(0) = C - Z(0) . \qquad (1,3 ; 8)$$

Nous avons choisi cet exemple parce qu'une intégrale, semblable à (1,3 ; 4), s'est présentée à M.M. Riesz, et son calcul (que M. Riesz fait ingénieusement par prolongement analytique) est à la base d'une formule remarquable par laquelle il exprime le potentiel de Lienard-Wiechert ([20], p. 2.160, et [21], pp. 152-159).

Voici une petite liste de parties finies dont nous ferons usage dans la suite.

Petite liste de parties finies[2]

1) $\log \int_a^\infty \frac{dX}{X} = - \log a$

2) $\int_a^\infty X^S dX = - \frac{a^{S+1}}{S+1}$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\, S \neq -1$

3) $\int_a^\infty \frac{X^2 dX}{\sqrt{X^2+m}} = \frac{m}{4} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2+m} + \frac{m}{2} \log \frac{a + \sqrt{a^2+m}}{2}$

4) $\int_a^\infty \frac{X^2 dX}{(X^2+m)^{3/2}} = -1 + \frac{a}{(a^2+m)^{1/2}} - \log \frac{a + \sqrt{a^2+m}}{2}$

5) $\int_a^\infty \frac{X^2 dX}{X+m} = - \frac{a^2}{2} + ma - m^2 \log (a+m)$

6) $\int_a^\infty X^2 \sqrt{X^2+m^2}\, dX = \frac{m^4}{32} - \frac{a}{4}(a^2+m^2)^{3/2} + \frac{m^2}{8} a \sqrt{a^2+m^2} +$

$+ \frac{m^4}{8} \log \left\{\frac{a + \sqrt{a^2+m^2}}{2}\right\} - \frac{a^4}{4}$

7) $\int_0^\infty (X^2+m^2)^{\frac{1}{2}} dX = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} \log \frac{m}{2}$

8) $\int_a^\infty (X^2+m^2)^{-\frac{1}{2}} dX = - \log [\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+m^2})]$

9) $\int_a^\infty \frac{X dX}{X+m} = m \log (a+m) - a$

[2] On a supprimé le symbole Pf. devant le signe d'intégrale.

10) $$\int_a^\infty \frac{X dX}{(m+X)^2} = -\log(a+m) - \frac{m}{a+m}$$

11) $$\int_a^\infty \frac{\sqrt{X}\, dX}{X+m} = \sqrt{m}\,[2\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a}{m}} - \pi] - 2a^{\frac{1}{2}}$$

12) $$\int_a^\infty (X-a)(b+X)^{-2} dX = -1 - \log(a+b)$$

II

2,1.- La méthode puissante créée par M.M.Riesz pour intégrer l'équation des ondes [20], a été appliquée avec succès par M.Fremberg [4] pour éliminer les infinis qui apparaissent dans la théorie classique de l'électron. Puis MM. Gustafson ([6]), Nilsson ([16], [17]) et Kothari ([12], [13], [14]), ont appliqué la méthode de M.Riesz en théorie quantique. Nous allons montrer que le concept de partie finie à l'infini joue implicitement un rôle essentiel dans les travaux de MM. Nilsson et Kothari.

En poursuivant l'oeuvre de M. Gustafson, Nilsson a réussi à éliminer certains infinis devant lesquels les méthodes antérieures s'étaient révélées impuissantes. Sa méthode, qu'il a exposée dans son ouvrage [16], revient à donner un sens aux intégrales divergentes de l'électrodynamique quantique par prolongement analytique ; or cela est équivalent, d'après les formules [1,2 ; 3] et [1,2 ; 4], à prendre la partie finie <u>dans le cas où aucun des exposants n'est égal à -1</u> . Il est donc naturel qu'il n'ait pas réussi à éliminer par cette méthode les divergences "logarithmiques", qui se présentent lorsqu'on a affaire à une intégrale du type

$$I(a) = \int_a^\infty \frac{\varphi(X)}{X} dX \quad , \qquad (2,1\ ;\ 1)$$

avec

$$\varphi(\infty) = C \neq 0 \quad . \qquad (2,1\ ;\ 2)$$

Peu après, M.Nilsson a réussi à rendre finie la selfénergie de l'électron en seconde approximation, dans la théorie des trous, par une méthode qui lui a été suggérée par M.Riesz. La même méthode a été utilisée plus tard par M.Kothari et joue un rôle essentiel dans sa théorie. La prescription de MM.Riesz-Nilsson-Kothari pour donner un sens à une intégrale divergente du type (2,1 ; 1) consiste à former l'intégrale convergente [Re S < 0]

$$I(S) = \int_a^\infty X^{S-1} \varphi(X)\, dX \quad , \qquad (2,1\ ;\ 3)$$

et puis à prendre la limite

$$\lim_{S \to i0} \frac{1}{2} \left\{ I(S) + I(\bar{S}) \right. \quad ; \qquad (2,1 ; 4)$$

où, avec le symbole $S \to i0$ on indique qu'on doit prendre la limite lorsqu'on s'approche à l'origine par un chemin tangent à l'axe imaginaire. Il est très facile de constater que la méthode de MM. Riesz-Nilsson-Kothari est équivalente à la méthode de la partie finie dans le cas où il y a un exposant égal à -1. Si l'on prend, en effet, la partie finie de l'intégrale (2,1 ; 1), on trouve

$$\mathrm{Pf} \int_a^\infty \frac{\varphi(X)}{X} \, dX = \int_a^\infty \frac{\varphi(X) - C}{X} \, dX + \mathrm{Pf.}\; C \int_a^\infty \frac{dX}{X} \quad . \qquad (2,1 ; 5)$$

Il suffit donc de constater que

$$\mathrm{Pf.} \int_a^\infty \frac{dX}{X} = -\log a = \frac{1}{2} \lim_{S \to i0} \left\{ \int_a^\infty X^{S-1} \, dX + \int_a^\infty X^{\bar{S}-1} \, dX \right\} \quad . \qquad (2,1 ; 6)$$

Or cela est immédiat, car la valeur du deuxième membre est égale à

$$-\frac{1}{2} \lim_{S \to i0} \left\{ \frac{1}{S} + \frac{1}{\bar{S}} + 2 \log a + O(S) \right\} = -\log a \quad . \qquad (2,1 ; 7)$$

III

3,0.- Nous définissons l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre α de la fonction $f(X)$ par la formule

$$I_{RW}^{[\alpha]}(f(X)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_X^\infty (t - X)^{\alpha - 1} f(t) \, dt \quad . \qquad (3,0 ; 0)$$

Ces intégrales ont été appliquées avec succès par M.H.Weyl dans la théorie des séries trigonométriques (cf. [26], et [27], p. 222).

Rappelons les propriétés connues

$$I_{RW}^{[\alpha]} \left\{ I_{RW}^{[\beta]} [f(X)] \right\} = I_{RW}^{[\alpha+\beta]} [f(X)] \quad , \qquad (3,0 ; 1)$$

$$-\frac{d}{dX} \, I_{RW}^{[\alpha]} [f(X)] = I_{RW}^{[\alpha-1]} [f(X)] \quad . \qquad (3,0 ; 2)$$

On a donc, comme conséquence de ces formules

$$f(X) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_X^\infty (t - X)^{n-1} f(t) \, dt =$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \ldots \int_0^\infty d\alpha_n \, [f^{(n)}(X + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)] \quad . \qquad (3,0 ; 3)$$

On suppose dans ces formules que la décroissance de $f(X)$ et de ses dérivées, lorsque $X \to \infty$, est telle que toutes les intégrales ont un sens. Or, c'est ce qui n'aura pas lieu dans les formules des paragraphes suivants, où vont apparaître des intégrales de Riemann-Weyl divergentes. Pour leur donner un sens, nous prendrons leur partie finie.

3,1.- Considérons la distribution F quadridimensionnelle définie par la formule (nous suivons la notation de [23])

$$\left\langle F\ ,\ \varphi(q_1,q_2,q_3,q_4)\right\rangle = \iiiint \frac{\varphi(q_1,q_2,q_3,q_4)\ dq_1dq_2dq_3dq_4}{q^2 - m + iy} \ ,$$

$$y > 0 \quad . \qquad (3,1\ ;\ 0)$$

L'intégrale est étendue à tout l'espace R^4 ; m est un paramètre non négatif et

$$q^2 = q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \quad . \qquad (3,1\ ;\ 1)$$

On constate que le produit scalaire (3,1 ; 0) n'est pas défini pour $\varphi \equiv 1$. Néanmoins, des produits scalaires semblables apparaîssent très souvent en électrodynamique quantique, et il y a intérêt à leur donner un sens. C'est ce que MM.Pauli-Villars appellent <u>régularisation</u> dans leur mémoire bien connu [18].

Pour décrire le procédé de régularisation dont nous ferons usage dans les paragraphes suivants nous prendrons l'exemple simple du produit scalaire (3,1 ; 0), avec $\varphi \equiv 1$:

$$I_1\,[m] = \iiiint \frac{dq_1dq_2dq_3dq_4}{q^2 - m + iy} \ ,\ y > 0 \ . \qquad (3,1\ ;\ 2)$$

En dérivant formellement par rapport au paramètre m on obtient [cf.[3], p.785]

$$I_1^{[2]}(m) = 2\iiiint \frac{dq_1dq_2dq_3dq_4}{(q^2 - m + iy)^3} = \pi^2 i \ \ \frac{1}{m-iy} \quad . \qquad (3,1\ ;\ 3)$$

Maintenant pour "récupérer" $I_1(m)$ nous écrirons l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre 2 par rapport à m de (3,1 ; 3), <u>en calculant sa partie finie</u> d'accord avec les règles du paragraphe (1,2) . On obtient ainsi, si l'on tient compte des formules (1) et (9) de la table

$$I_1(m)_{reg} = (-1)^2 \frac{1}{\Gamma(2)} \int_m^\infty (t-m) \ \frac{\pi^2 i}{t-iy}\ dt = \left\{(m-iy)\ \log\ (m-iy)\ -\ m\right\} \pi^2 i \quad . \qquad (3,1\ ;\ 4)$$

Le procédé est général. Si l'on a eu besoin de dériver <u>n</u> fois pour arriver à une intégrale convergente, on devra écrire l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre <u>n</u> et calculer sa partie finie (après avoir multiplié par $(-1)^n$) .

3,2.- Nous allons calculer avec notre méthode la valeur de quelques intégrales qui apparaissent couramment en électrodynamique quantique.

1) $$I_2(m) = \iiiint \frac{dq_1dq_2dq_3dq_4}{(q^2 - m + iy)^2} \quad . \qquad (3,2\ ;\ 0)$$

Il suffit dans ce cas de dériver une seule fois. On obtient donc, en tenant compte de (3,1 ; 3) ,

$$I_2\,(m)_{reg} = \pi^2 i \log\,(m - iy) \quad . \qquad (3,2\;;\;1)$$

2) $$I_3(m) = \iiiint \frac{q_\mu\, dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 - m + iy} \quad . \qquad (3,2\;;\;2)$$

C'est une des intégrales "dangereuses" qui apparaissent dans le problème de la polarisation du vide ([8], p.324) . Si l'on dérive deux fois on arrive à une intégrale convergente, qui est nulle (en raison du numérateur de l'intégrande). On a par conséquent

$$I_3(m)_{reg} = 0 \quad . \qquad (3,2\;;\;3)$$

3) $$I_4(m) = \iiiint \frac{q_\sigma\, q_\tau\, dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - 2p.q - m + iy)^3} \quad . \qquad (3,2\;;\;4)$$

Ici p est un vecteur fixe, et σ , τ , peuvent prendre les valeurs 1,2,3,4 . Une seule dérivation nous conduit dans le cas présent à [cf.[3], p.785, formule 13a]

$$\frac{d\,I_4(m)}{dm} = \frac{\pi^2 i}{2}\;\frac{p_\sigma p_\tau - \frac{1}{2}\,\delta_{\sigma\tau}\,[p^2 + m - iy]}{(p^2 + m - iy)^2} \quad . \qquad (3,2\;;\;5)$$

Par conséquent

$$I_4(m)_{reg} = -\frac{\pi^2 i}{2}\;\mathrm{Pf.}\int_m^\infty \frac{p_\sigma p_\tau - \frac{1}{2}\,\delta_{\sigma\tau}\,(p^2 + X - iy)}{(p^2 + X - iy)^2}\,dX =$$

$$= -\frac{\pi^2 i}{2}\,p_\sigma\, p_\tau\;\frac{1}{p^2 + m - iy} - \frac{\pi^2 i\,\delta_{\sigma\tau}}{4}\,\log\,(p^2 + m - iy) \quad . \qquad (3,2\;;\;6)$$

En particulier, la régularisée de

$$I_5(m) = \iiiint \frac{q_\sigma\, q_\tau\, dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - m + iy)^3} \qquad (3,2\;;\;7)$$

est

$$I_5(m)_{reg} = -\frac{\pi^2 i\,\delta_{\sigma\tau}}{4}\,\log\,(m - iy) \quad . \qquad (3,2\;;\;8)$$

De (3,2 ; 8) on déduit immédiatement que l'intégrale (qui apparaît dans l'évaluation du moment magnétique anomal de l'électron ; cf. [8], p.313, formule q_2)

$$I_6 = \iiiint \frac{q_{44} - q_{XX}}{(q^2 - m + iy)^3}\;dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \qquad (3,2\;;\;9)$$

est égale à zéro .

4) $$I_7(m) = \iiiint \frac{q_\sigma q_\tau dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - 2p.q - m + iy)^2} \quad . \qquad (3,2\ ;\ 10)$$

Dans ce cas, il faut dériver deux fois. On aura par conséquent, en tenant compte de (3,2 ; 5)

$$I_7(m)_{reg} = i\pi^2 \text{ Pf.} \int_m^\infty (X-m) \frac{p_\sigma p_\tau - \frac{1}{2}\delta_{\sigma\tau}(p^2 + X - iy)}{(p^2 + X - iy)^2} dX =$$

$$= -i\pi^2 p_\sigma p_\tau \left[\log(m+p^2-iy) + 1\right] - \frac{1}{2} i\pi^2 \delta_{\sigma\tau} \left\{ (p^2+m-iy)\log(p^2+m-iy) - m \right\} \qquad (3,2\ ;\ 11)$$

Cas particulier de (3,2 ; 11) pour $p = 0$

5) $$I_8(m) = \iiiint \frac{q_\sigma q_\tau\, dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - m + iy)^2} \quad . \qquad (3,2\ ;\ 12)$$

$$I_8(m)_{reg} = -\frac{i\pi^2}{2}\delta_{\sigma\tau}\left\{(m - iy)\log(m - iy) - m\right\} . \qquad (3,2\ ;\ 13)$$

Des formules (3,1 ; 4) et (3,2 ; 13) on déduit immédiatement que la valeur de l'intégrale [qui apparaît dans l'excellent livre de M.Pauli, [20], p. 39],

$$I_9(m) = \iiiint \frac{2\, q_\mu q_\nu\, dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 + \frac{1}{4}p^2(1-u^2) - m^2 + iy} + \iiiint \frac{\delta_{\mu\nu}\, dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 + \frac{1}{4}p^2(1-u^2) - m^1 + iy} , \qquad (3,2\ ;\ 14)$$

est nulle.

3,3.- Nous voudrions signaler l'étroite connexion du procédé de régularisation que nous avons décrit avec une intéressante méthode développée par M.Karlson dans un ouvrage récent ([11]), où il calcule les termes de quatrième ordre de la polarisation du vide. Karlson arrive à des intégrales où apparaissent les produits scalaires $\langle \delta^{[k]}[q^2 - m], 1\rangle$, avec k suffisamment grand ; qu'il faut évaluer, pour avoir le résultat définitif, lorsque $k = 0$, 1, 2 . Il atteint son but par un procédé de prolongement analytique qui est une modification d'une autre méthode suggérée par Källen [10] .

Prenons pour exemple le cas simple des intégrales divergentes auqule conduit l'évaluation des termes de second ordre. Il s'agit de l'intégrale ([11], p.225 ; nos notations ne sont pas les mêmes que celles de Karlson)

$$I(p,M) = +\frac{4}{(2\pi)^3}\int_0^1 \alpha(1-\alpha)d\alpha \iiiint \delta'[q^2+p^2(1-\alpha)-M]dq_1 dq_3 dq_3 dq_4 \quad . \qquad (3,3\ ;\ 0)$$

dont la valeur (renormalisée) donne le résultat cherché. Avec notre méthode, on procèderait de la manière suivante.

De la formule connue ($k \geqslant 2$) [cf.[9], p.398 et [24], p.800]

$$\left\langle \delta^{[k]}[q^2 - M], 1 \right\rangle = \pi (k-2)!\, M^{1-k} \quad . \qquad (3,3\ ;\ 1)$$

on déduit qu'il suffit de dériver (3,3 ; 0) une seule fois par rapport à M, pour obtenir une intégrale convergente.

En faisant après l'intégrale de Riemann-Weyl on obtient,

$$I(p)_{reg} = + \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^1 \alpha(1-\alpha)\, d\alpha\, \mathrm{Pf} \int_M^\infty \frac{dX}{p^2\alpha(1-\alpha) + X} =$$

$$= - \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^1 \alpha(1-\alpha) \log[p^2\alpha(1-\alpha) + M]\, d\alpha \ ; \qquad (3,3\ ;\ 2)$$

et par conséquent

$$I(p) - I(0) = \frac{-2}{(2\pi)^2} \int_0^1 \alpha(1-\alpha) \log\left[1 + \frac{p^2}{M}\alpha(1-\alpha)\right] , \qquad (3,3\ ;\ 3)$$

qui est la même expression que celle à laquelle arrive Karlson (en posant dans 3,3 ; 3) $M = m^2$, et $p = q$). Nous croyons que notre méthode offre des avantages pour l'évaluation des intégrales plus compliquées qui apparaissent en quatrième approximation.

4,0.- Signalons, pour finir, l'étroite connexion de notre méthode avec l'ingénieux procédé de régularisation développé récemment par M. Gupta [5]. Pour le faire voir plus clairement nous aborderons avec notre méthode le même exemple que celui traité par Gupta [self-énergie du photon en seconde approximation].

Après des calculs que nous ne reproduisons pas, on arrive à l'intégrale divergente [[5], p. 137, formule 63].

$$J_{\mu,\nu}[q,m^2] = \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^1 du \frac{k^2\delta_{\mu\nu} - 2k_\mu k_\nu + kq\,\delta_{\mu\nu} - k_\mu q_\nu - k_\nu q_\mu + m^2\delta_{\mu\nu}}{(k^2 + 2u\, k.q + u\, q^2 + m^2 - iy)^2} .$$

(4,0 ; 0)

Décrivons brièvement la méthode de Gupta. Lorsqu'on est en présence d'une intégrale divergente comme (4,0 ; 0), qui contient m^2 en dénominateur [rappelons que m^2 est un paramètre invariant lorentzien] le procédé de M. Gupta consiste à dériver formellement sous le signe autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir une intégrale convergente ; puis il forme l'expression (si l'on a dérivé n fois)

$$J_{\mu\nu}(q,m^2)_{reg} = (-1)^n \int_0^\xi d\xi_n \int_0^\xi d\xi_{n-1} \cdots \int_0^\xi J^{[n]}_{\mu\nu}[m^2 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n]\, d\xi_1 \ ;$$

(4,0 ; 1)

et, à la fin, il fait tendre ξ vers l'infini ["...where ξ, which is a large constant of the dimension of mass, ultimately tends to infinity" ; [5], p.136] . L'infini apparaît de nouveau, naturellement, dans le résultat final. Mais ce résultat contient aussi des termes finis [indépendants de ξ] ; ce sont les seuls qui, d'après la théorie, sont à retenir comme ayant une signification physique.

Or, supposons que l'intégrale dont on est parti soit absolument convergente, alors le second membre de (4,0 ; 1) a un sens lorsque $\xi = \infty$, et redonne $J_{\mu\nu}(q)$ (supposé convergente) ; ce n'est pas autre chose, d'après la formule (3,0 ; 3), que l'intégrale de Riemann-Weyl de $J^{[n]}_{\mu\nu}(q)$, multipliée par $(-1)^n$. Le second membre de (4,0 ; 1) est donc une espèce d'intégrale partielle de l'intégrale RW de $J^{[n]}_{\mu\nu}[q]$. Lorsque l'intégrale dont on est parti est divergente il est donc bien naturel de faire tendre ξ vers l'infini, et de prendre après la partie finie de l'intégrale de Riemann-Weyl qui en résulte. C'est en cela que consiste précisément notre méthode de régularisation.

4,1.- Dans le cas de l'intégrale (4,0 ; 0) il suffit de dériver deux fois pour avoir une intégrale convergente (rappelons que dans (4,0 ; 0) nous avons conservé les notations de Gupta :

$k^2 = k_1^1 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2$; et q^2 a une signification semblable. Nous poserons $M = m^2$

On obtient en dérivant deux fois,

$$\frac{d^2 J_{\mu\nu}[q,M]}{d M^2} =$$

$$= \frac{4ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^1 du \frac{-\frac{1}{2} k^2 \delta_{\mu\nu} + 5 [u^2 - u] q^2 \delta_{\mu\nu} + 6 (u - u^2) q_\mu q_\nu + M \delta_{\mu\nu}}{[k^2 - u^2 q^2 + u q^2 + M]^4} . \qquad (4,1 ; 0)$$

En faisant l'intégrale par rapport à $\underline{k}$ on obtient [cf. [5], p. 138]

$$\frac{d^2 J_{\mu\nu}[q, M]}{d M^2} = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{(u - u^2) [q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] du}{(u q^2 - u^2 q^2 + M - iy)^2} . \qquad (4,1 ; 1)$$

Formons donc, d'accord avec notre règle, l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre 2 de (4,1 ; 1) : on obtient sans difficulté [toutes les intégrales dont on a besoin figurent dans la table] :

$$I^{[2]}_{RW} \left[\frac{d^2 J_{\mu\nu}[q , M]}{d M^2}\right] = - \frac{e^2}{4\pi^2} [q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] Z(q) , \qquad (4,1 ; 2)$$

où
$$\mathcal{Z}(q) = \int_0^1 [u - u^2][1 + \log [u\, q^2 - u^2 q^2 + M]] \quad . \qquad (4,1\ ;\ 3)$$

Si maintenant, d'accord avec les principes de la renormalisation nous formons la différence du deuxième membre de (4,1 ; 2),et sa valeur pour $q = 0$ nous obtiendrons :

$$[J_{\mu\nu}(q)]_{renorm} = - \frac{e^2}{4\pi^2} [q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \int_0^1 (u - u^2) \log [1 + \frac{uq^2 - u^2 q^2}{m^2}] \, du \ . \qquad (4,1\ ;\ 4]$$

C'est le même résultat auquel arrive Gupta avec sa méthode.

Les lettres représentées dans ce texte dactylographié par les majuscules S , X et Z seraient à remplacer dans un texte imprimé par les minuscules correspondantes s , x et z .

BIBLIOGRAPHIE

[1]. Arnaud DENJOY . Journ. Anal. Math. Jérusalem III , (1953-1954), pp. 197-206 .

[2]. F.J.DYSON . Phys. Rev., 75 (1949), pp. 1736-1755.

[3]. R.P.FEYNMAN . Phys. Rev., 76 (1949), pp. 769-789 .

[4]. N.E.FREMBERG . A study of generalised hyperbolic potentials. Lund, 1946.

[5]. S.N.GUPTA . Proc. Phys. Soc. A , 166 (1953), pp. 129-138

[6]. T.GUSTAFSON . Arkiv Mat. Astr. Fys., 34 A (1946).

[7]. J.HADAMARD . Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris, Hermann, 1932.

[8]. W.HEITLER . The Quantum theory of radiation. Oxford, 1954.

[9]. G.KÄLLEN . Arkiv för Fysik, 2, (1951), pp. 371-410.

[10]. G.KÄLLEN . Arkiv för Fysik, 5 (1952), pp. 130-131.

[11]. E.KARLSON . Arkiv för Fysik, 7 (1954) pp. 221-237.

[12]. L.S.KOTHARI . Proc. Phys. Soc., A, vol. 67 (1954), pp. 17-24.

[13]. L.S.KOTHARI . Proc. Phys. Soc. A, vol. 67 (1954), pp. 201-205.

[14]. L.S.KOTHARI . Proc. Phys. Soc. A, vol.67 (1954) pp. 580-583.

[15]. Pierre D.METHÉE . Comm. Math. Helv. 28 (1954), pp. 225-269.

[16]. S.B.NILSSON . Phys. Rev., 73 (1948), pp. 903-909.

[17]. S.B.NILSSON . Arkiv för Fysik, 1 (1949-1950), pp. 369-422.

[18]. W.PAULI and D.VILLARS . Rev. Modern Physics, 21 (1949), pp. 434-444.

[19]. W.PAULI . Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung. Zürich, 1950-1951.

[20]. M.RIESZ . Acta Math. 81 (1949), pp. 1-223.

[21]. M.RIESZ . Comptes rendus Acad. Sci. Paris, vol. 234 (1952), pp.2159-2161.

[22]. D.RIVIER . Helv. Phys. Acta, 22 (1949), pp. 265-318.

[23]. L.SCHWARTZ . Théorie des distributions. Paris, Hermann, 1950 et 1951.

[24]. J.SCHWINGER . Phys. Rev. 76 (1949), pp. 790-817.

[25]. E.C.G.STUECKELBERG et T.A.GREEN. Helv. Phys. Acta, 24 (1951), pp.153-174.

[26]. H.WEYL . Vierteljahrs-schrift Naturforsch. Ges. Zürich, 62(1917)pp296-302.

[27]. A.ZYGMUND . Trigonometrical Series. Warzawa-Lwow, 1935.