Séminaire L. de Broglie. Théories physiques

O. Costa de Beauregard

Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. nº 1, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A1_0>

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

-:-:-:-:-:-

Séminaire de Théories Physiques
(Séminaire Louis de Broglie.)

Année 1954/55

-:-:-:-:-:-

9 novembre 1954.

Exposé n° 1

COVARIANCE RELATIVISTE A LA BASE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE.

par O. Costa de Beauregard

----

1. Introduction.

Les idées exposées ici se trouvent dans plusieurs de nos publications [5] ; mais leur formulation est maintenant grandement améliorée, et une présentation d'ensemble sera utile.

En bref, il s'agit de définitions covariantes relativistes des intégrales de Fourier réciproques, de l'orthogonalité, de la norme des solutions de l'équation d'ondes, etc ...

Nous avons trouvé l'idée initiale de notre travail dans un article de Marcel Riesz [11]. Notre théorie, en fait, est à la théorie covariante des champs de Tomonaga [15], Schwinger [12,13], Dyson [6] et Feynman [7] ce que le formalisme d'interprétation de la théorie primitive de Heisenberg-Schrödinger était à la formulation hamiltonienne de la théorie quantique des champs.

2. Notations.

Soient λ , μ , ν , ρ les indices d'univers, α , β , $\gamma = 1, 2, 3$ les indices d'espace ; x ou x_λ ($x_4 = ict$), etc, désigneront des quadrivecteurs, $\vec{x}$ ou x_α , etc, des vecteurs de l'espace ordinaire. Comme d'habitude, k_λ sera la 4-fréquence d'une onde plane, k_0 (réel) la longueur de k_λ , reliées à l'impulsion-énergie et à la masse propre du point porté par l'onde par les formules de L. de Broglie

$$(1) \qquad h k_\lambda = 2\pi p_\lambda \ , \qquad\qquad h k_0 = 2\pi c m_0 \ ;$$

la fréquence proprement dite et l'énergie seront alors

(2) $\quad \nu = -\frac{ic}{2\pi} k_4 , \qquad W = - icp_4 = -\frac{ich}{2\pi} k_4 .$

Nous considérons l'hyperboloïde à deux nappes du 4-espace k

(3) $\quad \eta(k) = k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0 \quad ,$

dont l'élément trilinéaire, défini tantôt comme un 4-vecteur, tantôt comme un scalaire, sera

(4) $\quad d\eta_\lambda = - i \left[dk_\mu dk_\nu dk_\rho\right] \quad , \qquad k_\lambda d\eta = - k_0 \, d\eta_\lambda \quad ;$

$d\eta_\lambda$ est évidemment colinéaire au k_λ aboutissant au même point, et les définitions sont posées de telle manière que $d\eta_\lambda$ dirige la normale entrante dans l'hyperboloïde ; de la sorte,

(5) $\quad k_\lambda \, d\eta^\lambda > 0 \, , \qquad k_0 > 0 \, , \qquad d\eta > 0 \, .$

Soit

(6) $\quad \varepsilon(k) = \frac{- ik_4}{|- ik_4|}$

un commutateur de signe bien connu, et définissons

(7) $$e(kx)=e^*(-kx) = \begin{cases} (2\pi)^{-3/2} \exp . ik^\lambda x_\lambda & \text{si} \quad k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k_\lambda k^\lambda + k_0^2 \neq 0 \end{cases}$$

Dans l'espace-temps, nous considérons une famille continue arbitraire d'hypersurfaces du genre espace σ , dont l'élément trilinéaire, pointant vers les temps négatifs, sera

(8) $\quad d\sigma_\lambda = - i \left[dx_\mu dx_\nu dx_\rho\right]$

La théorie générale des particules à spin définit l'adjoint relativiste à la fonction d'onde $\psi(x)$ ou $\xi(k)$ suivant

(9) $\quad \bar{\psi} = \psi^+ \beta \quad , \qquad \bar{\xi} = \xi^+ \beta \; .$

Il est tout à fait essentiel à notre théorie que la matrice carrée β soit diagonale, ce qu'elle est en fait en théories de Dirac, de L. de Broglie [2,3] , de Kemmer [8] . Dans le cas d'une solution scalaire de l'équation des ondes, nous aurons simplement

(10) $\quad \overline{\psi} = \psi^{*} \quad , \qquad\qquad \overline{\varsigma} = \varsigma^{*}$

Il sera commode de définir un "opérateur du courant de Gordon"

(11) $\quad [\partial^{\lambda}] = \overrightarrow{\partial^{\lambda}} - \overleftarrow{\partial^{\lambda}} \quad ,$

différence entre les opérateurs de dérivation partielle agissant vers la droite et vers la gauche. L'opérateur Dalembertien sera désigné par $\partial^{\lambda}_{\lambda}$.

Naturellement, la convention de sommation sur indices tensoriels muets sera utilisée. Mais <u>il n'y aura pas de sommation sur l'indice de spin j chaque fois que celui-ci sera explicitement écrit</u> (cette sommation, au contraire, sera automatique dans les produits de matrices ; le ψ est considéré comme une matrice colonne, $\overline{\psi}$ et ψ^{+} comme des matrices lignes).

3. <u>Particule libre de spin non spécifié obéissant à l'équation de Gordon</u>.

3,1.- L'équation de Gordon

(12) $\quad (\partial^{\lambda}_{\lambda} - k_0^2)\psi(x) = 0$

prend, dans le 4-espace k , la forme

(13) $\quad (k_{\lambda}k^{\lambda} + k_0^2)\varsigma(k) = 0 \quad ;$

pour le voir, on suppose le ψ développé en intégrale de Fourier quadruple, et l'on applique aux deux membres l'opérateur de Gordon, ce qui conduit au dilemme

(14) $\quad k_{\lambda}k^{\lambda} + k_0^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varsigma(k) = 0$

L'intégrale considérée se réduit donc à une intégrale triple étendue aux deux nappes de l'hyperboloïde (3), et nous l'écrivons

(15) $$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\eta} (\exp.\ ik^{\lambda}x_{\lambda})\,\varsigma(k)\,\varepsilon(k)\,d\eta$$

Montrons que l'intégrale de Fourier covariante réciproque de (15) est

(16) $$\varsigma(k) = -\frac{i}{2k_0}(2\pi)^{-3/2} \iiint_{\sigma} (\exp.\ -ik^{\lambda}x_{\lambda})[\partial^{\mu}]\psi(x)\,d\sigma_{\mu} ,$$

où k_{λ} satisfait à (3). Tout d'abord, cette intégrale est indépendante de σ , du fait de l'équation de continuité du courant de Gordon ($\exp.\ -ik^{\lambda}x_{\lambda}$ est solution de l'équation de Gordon) et des hypothèses ordinaires sur le comportement du ψ à l'infini spatial.

Ecrivons respectivement $k_{\pm}$ pour un k à énergie positive ou négative, $\zeta_{\pm}(k)$ pour $\zeta(k_{\pm})$, $\psi_{\pm}$ pour les contributions à ψ des énergies positives ou négatives ($\psi = \psi_{+} + \psi_{-}$). L'intégrale (15) se décompose en deux intégrales, respectivement étendues aux nappes η_{+} et η_{-} de η ,

$$(17) \qquad \psi_{\pm}(x) = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\eta} (\exp.\ i k^{\lambda} x_{\lambda}) \zeta_{\pm}(k)\, \varepsilon(k)\, d\eta .$$

Chacune de ces deux intégrales se transforme aisément en une intégrale triple étendue à l'hyperplan $k_4 = 0$: chaque $\vec{k}$ est la projection d'un seul k_{+} et d'un seul k_{-} , et la formule (4_2) écrite pour $\lambda = 4$ donne

$$(18) \qquad \frac{d\vec{k}^3}{i k_4} = -\, \varepsilon(k)\, \frac{d\eta}{k_0}$$

(ce qui est un invariant bien connu de la théorie des champs). Ainsi, les deux intégrales (17) deviennent (avec $x_4 = 0$)

$$(19) \qquad \psi_{\pm}(\vec{x},0) = -\, k_0 (2\pi)^{-3/2} \iiint (\exp.\ i \vec{k}\vec{x})\, \frac{\zeta_{\pm}(\vec{k})}{i k_4}\, d\vec{k}^3 ,$$

ou, équivalemment

$$(20) \qquad \partial_4 \psi_{\pm}(\vec{x},0) = -\, k_0 (2\pi)^{-3/2} \iiint (\exp.\ i \vec{k}\vec{x}) \zeta_{\pm}(k)\, d\vec{k}^3 .$$

Par ailleurs, l'intégrale conservative (16) peut être prise sur l'hyperplan $x_4 = 0$:

$$(21) \qquad \zeta(k) = -\frac{(2\pi)^{-3/2}}{2 k_0} \iiint (\exp.-i\ \vec{k}\vec{x})[\partial^4]\psi(\vec{x},0)\, d\vec{x}^3 .$$

Prenons pour un instant $\psi(x)$ comme une onde plane, $\zeta \exp.\ i k'^{\lambda} x_{\lambda}$, avec $k'_{\lambda} \neq k_{\lambda}$; si $\vec{k}' \neq \vec{k}$, l'intégrale de Fourier (21) sera, comme d'habitude, nulle; si $\vec{k}' = \vec{k}$, $k'_4 = -\, k_4$, elle sera encore nulle, grâce au jeu de l'opérateur $[\partial^4]$. Finalement, l'intégrale (16) se décompose en les deux intégrales

$$(22) \qquad \zeta_{\pm}(k) = -\frac{i}{2k_0}(2\pi)^{-3/2} \iiint_{\sigma} (\exp.\ -i k^{\lambda} x_{\lambda})[\partial^{\mu}]\, \psi_{\pm}(x)\, d\sigma_{\mu} ,$$

chacune d'elles étant réciproque (nous allons le montrer) de chacune des (17). Prenant les (22) sur l'hyperplan $x_4 = 0$, il vient

$$(23) \qquad \zeta_{\pm}(\vec{k}) = -\frac{(2\pi)^{-3/2}}{2\,k_0}\iiint (\exp.\ -i\,\vec{k}\,\vec{x})\,(i\,k_4 + \partial_4)\,\psi_{\pm}(\vec{x},0)\,d\vec{x}^3$$

ce qui est la demi-somme des réciproques ordinaires des (19) et (20) , Q.E.D.

3,2.- Montrons semblablement que l'égalité de Parseval associée à deux solutions quelconques de l'équation de Gordon est

$$(24) \qquad -\frac{i}{2k_0}\iiint_{\sigma} \bar{\psi}^p[\partial^\lambda]\psi^q d\sigma_\lambda = \iiint_{\eta} \bar{\zeta}^p \zeta^q\, \varepsilon(k)\, d\eta \quad ;$$

en vertu de ce qui fut dit à propos de la formule (21),(24) se décompose en les deux formules

$$(25) \qquad -\frac{i}{2k_0}\iiint_{\sigma} \bar{\psi}_{\pm}^p[\partial^\lambda]\psi_{\pm}^q\, d\sigma_\lambda = \iiint_{\eta} \bar{\zeta}_{\pm}^p \zeta_{\pm}^q\, \varepsilon(k)\, d\eta,$$

où le signe est $+$ ou $-$ partout. Du fait de l'équation de continuité du courant de Gordon, le premier membre est indépendant de σ , et peut être calculé en particulier sur l'hyperplan $x_4 = 0$. Le second membre peut être transformé en une intégrale étendue à l'hyperplan $k_4 = 0$, grâce à la formule (18). Il vient ainsi

$$(26) \qquad \frac{1}{2k_0^2}\iiint \bar{\psi}_{\pm}^p\,[\partial^4]\,\psi_{\pm}^q\, d\vec{x}^3 = \iiint \frac{1}{i k_4}\ \bar{\zeta}_{\pm}^p \zeta_{\pm}^q\ d\vec{k}^3 ,$$

et ce sont bien les égalités de Parseval ordinaires associées aux intégrales de Fourier ordinaires (19) et (20), ou (23), Q.E.D.

3,3.- Posons maintenant les définitions suivantes du produit scalaire hermitien de deux solutions quelconques de l'équation de Gordon :

$$(27) \qquad \langle \psi^p | \psi^q \rangle_{\sigma} = \langle \psi^q | \psi^p \rangle_{\sigma}^{*} = -\frac{i}{2k_0}\iiint_{\sigma} \bar{\psi}^p[\partial^\lambda]\psi^q\, d\sigma_\lambda ,$$

expression indépendante de σ comme on l'a déjà expliqué, et

$$(28) \qquad \langle \zeta^p | \zeta^q \rangle_{\eta} = \langle \zeta^q | \zeta^p \rangle_{\eta}^{*} = \iiint_{\eta} \bar{\zeta}^p \zeta^q\, \varepsilon\,(k)\, d\eta$$

Faisant jouer aussi la définition (7), nous récrivons les intégrales de Fourier réciproques (15) et (16) sous la forme

$$(29) \qquad \psi(x) = \langle e(-\,k\,x) \,|\, \zeta\,(k) \rangle_{\eta} \quad ,$$

$$(30) \qquad \zeta\,(k) = \langle e(k\,x) \,|\, \psi(x) \rangle_{\sigma} \quad ,$$

et l'égalité de Parseval (24) suivant

(31) $$\langle \psi^p | \psi^q \rangle_\sigma = \langle \zeta^p | \zeta^q \rangle_\eta$$

Deux solutions ψ^p et ψ^q de l'équation de Gordon seront dites <u>orthogonales</u> au nouveau sens covariant si leur produit scalaire hermitien (24) ou (31) est nul. Deux ondes planes monochromatiques de k différents sont orthogonales en ce sens, et leur ensemble est complet pour développer toute solution ψ, comme le montrent les intégrales de Fourier (15) et (16) ou (29) et (30).

La norme, c'est-à-dire physiquement le <u>nombre d'occupation</u>, d'une solution ψ^p de l'équation de Gordon sera

(32) $$n_p = \langle \psi^p | \psi^p \rangle_\sigma = \langle \zeta^p | \zeta^p \rangle_\eta \quad .$$

Si le ψ est scalaire, la norme d'une superposition d'ondes planes à énergies positives est définie positive, celle d'une superposition d'ondes planes à énergies négatives est définie négative. Avec le ψ de Dirac, la norme est essentiellement définie positive, ainsi qu'il est bien connu ; ceci, joint à la signature $+1$ $+1$ -1 -1 de la matrice diagonale β, exhibe l'échange bien connu entre "grandes" et "petites" composantes du ψ lorsqu'on change le signe de l'énergie. Dans le cas général, la norme n'a plus de signe défini, mais, étant donnée la diagonalité postulée pour β, elle reste une somme algébrique d'expressions définies positives ; de la sorte, la théorie ordinaire de l'espace de Hilbert subsistera pour chaque composante du ψ, qui devra être séparément de carré sommable.

L'intégrand de la norme dans sa forme en k, soit $\bar{\zeta}\zeta$, est évidemment la fonction de distribution de l'impulsion-énergie dans une onde ψ. D'après une définition générale du Calcul des Probabilités, sa transformée de Fourier sera la fonction caractéristique de l'impulsion-énergie. Alors, compte tenu de l'expression covariante (15) de l'intégrale de Fourier, posons, dans (31), $\zeta^p = \zeta$ et $\zeta^q = \zeta \exp.\, i k^\lambda y_\lambda$; nous obtenons pour expression de la fonction caractéristique de l'impulsion-énergie

(33) $$\langle \psi(x) | \psi(x+y) \rangle_\sigma \, .$$

3,4.- Introduisons à présent la fonction singulière de Stueckelberg [14] et de Schwinger [12, p. 1450-1451, 13, p.678 équ. A.29]

(34) $$D(x-x') = \langle e(-k(x-x')) \,|\, 1 \rangle_\eta = (2\pi)^{3/2} \langle e(-kx) \,|\, e(-kx) \rangle_\eta$$

ou, explicitement,

$$(35)\qquad D(x) = (2\pi)^{-3/2}\iiint_{\eta} (\exp.\ ik^{\lambda}x_{\lambda})\,\varepsilon(k)\,d\eta =$$
$$= 2\,i(2\pi)^{-3/2}\iiint_{\eta_+} \sin k^{\lambda}x_{\lambda}\,d\eta\ ;$$

c'est une fonction imaginaire pure, impaire (paire en $\vec{x}$, impaire en x_4), solution de l'équation de Gordon. Un argument élémentaire montre qu'elle est nulle dans l'ailleurs : si x est du genre espace, une simple rotation des axes d'Univers suffit à changer le signe de x_4, et une telle transformation doit à la fois laisser D invariante et la changer de signe.

De ces définitions, du fait que, x' étant fixé, la transformée de Fourier au sens (15) de $D\,(x - x')$ est $e(-k\,x')$, et de (31), l'on conclut

$$(36)\qquad \langle D(x - x') | D(x - x'') \rangle_{\sigma} = (2\pi)^{-3/2} D(x' - x'')\ ;$$

ainsi, pourvu que le vecteur $x' - x'' \neq 0$ soit du genre espace, deux fonctions de x, $D(x - x')$ et $D(x - x'')$, sont orthogonales au sens (24) ou (31).

Substituant (16) dans (15), l'on résout le problème de Cauchy sous une forme équivalente à celle de Schwinger [12, équ.2.22 ; 13, équ. A.29]

$$(37)\qquad \psi(x) = \langle D(x - x') | \psi(x') \rangle_{\sigma'}$$

(la présence de la dérivée normale du ψ relativement à σ', conformément à (24), est caractéristique de l'usage de l'équation du second ordre de Gordon). Au sujet des formules (36) (où les D sont imaginaires pures) et (37) (où les ψ sont éventuellement réelles), il faut noter que, d'après (24), le produit scalaire hermitien de deux fonctions réelles est imaginaire pur.

(37) n'est autre que le développement du ψ sur un système orthogonal complet de fonctions de x, $D(x - x')$, attachées à une σ', où x' est l'indice de numération. La formule donnant les "coefficients" $\psi(x')$ est

$$(38)\qquad \psi(x') = \langle D(x' - x) | \psi(x) \rangle_{\sigma}\quad ,$$

avec une σ passant par x. La fonction intégrale de distribution correspondante n'est autre que la première expression (32), autrement dit le flux du courant de Gordon à travers σ'. La fonction caractéristique associée serait aisément calculée.

Substituant (37) dans (29) avec une σ passant par x donne

$$(39) \qquad \langle D(x - x') | \psi(x') \rangle_\sigma = \langle e(- k\, x) | \zeta(k) \rangle_\eta \quad ,$$

ce qui achève de caractériser D(x) comme l'extension covariante du $\delta(\vec{x})$ de Dirac.

Les fonctions de x , D(x - x') attachées à une σ' ont une interprétation physique simple. Supposons σ' entièrement pavée de petites cellules jointives, et constituons un jeu complet d'écrans d'Univers "complémentaires" , au sens de l'optique, en retirant un pavé et un seul de σ' , de toutes les manières possibles ; chaque D(x - x') attachée au point moyen de la petite ouverture dans l'hyperécran du genre espace représente, au sens de Von Neumann [10], une question posée au corpuscule : celui-ci franchit-il l'hyperécran au point x' ? . La réponse <u>oui</u> du corpuscule s'exprime par le nombre d'occupation 1 de l'onde D(x - x'), sa réponse <u>non</u> par le nombre d'occupation <u>zéro</u>. Si le corpuscule répond <u>oui</u>, toutes ses localisations spatio-temporelles passées et futures sont contenues dans le cône isotrope de sommet x' ; l'intérieur de ce cône est en somme l'intérieur d'un tube d'Univers du genre temps, et il y a <u>correspondance</u>, au sens de Bohr, entre la notion classique d'une trajectoire cachée intérieure au cône et la notion quantique du nombre d'occupation 1 de l'onde D(x - x').

Les D(x - x') sont donc associées à l'idée de <u>localisation spatio-temporelle</u> d'un corpuscule ; mais, en vertu de (35), l'impulsion-énergie d'un tel corpuscule est complètement indéterminée sur l'hyperboloïde η . Il y a donc bien <u>complémentarité</u>, au sens de Bohr, entre les D(x - x') et les ondes planes monochromatiques.

3,5.- Des formules analogues aux précédentes valent dans le 4-espace k . Définissons la fonction de deux variables, imaginaire pure et impaire,

$$(40) \qquad D(k,k') = (2\pi)^{-3/2} \langle e(k\, x) | e(k\, x) \rangle_\sigma \qquad ;$$

Substituant (15) dans (16), il vient

$$(41) \qquad \zeta(k) = \langle D(k,k') | \zeta(k') \rangle_\eta$$

puis, substituant à nouveau dans (16),

$$(42) \qquad \langle D(k,k') | \zeta(k') \rangle_\eta = \langle e(k\, x) | \psi(x) \rangle_\sigma \quad .$$

4. Particule libre à spin.

4,1.- $\underset{\rightarrow}{\partial}^{\lambda}$ et $\underset{\leftarrow}{\partial}^{\lambda}$ désignant les opérateurs différentiels partiels agissant respectivement vers la droite et vers la gauche, a_λ quatre matrices carrées qui peuvent toujours être prises, ainsi que β, hermitiennes, les équations de la particule libre à spin ont la forme

$$(43)\qquad (a_\lambda \underset{\rightarrow}{\partial}^{\lambda} + k_0)\,\psi(x) = 0 \quad , \qquad \overline{\psi}(x)(a_\lambda \underset{\leftarrow}{\partial}^{\lambda} - k_0) = 0 \ ,$$

ou, encore, dans le 4-espace k,

$$(44)\qquad (a_\lambda k^\lambda - i k_0)\,\zeta(k) = 0 \quad , \qquad \overline{\zeta}(k)(a_\lambda k^\lambda - i k_0) = 0 \ .$$

Quelle que soit l'algèbre suivie par les a_λ, l'équation de Gordon (12) ou (13) est conséquence des équations matricielles du 1er ordre (43) ou (44) : toutes les équations du n° 3 subsistent donc ici. Mais, aussi, elles peuvent toutes être transformées grâce aux (43) et (44).

4,2.- Commençons par l'égalité de Parseval (24) ou, compte tenu de (27) et (28), (31). Les (43) entraînent toujours la conséquence

$$(45)\qquad i\overline{\psi}^p a^\lambda \psi^q = -\frac{i}{2k_0}\,\overline{\psi}^p[\partial^\lambda]\psi^q + \frac{i}{k_0}\;\partial_\mu \overline{\psi}^p[{}^{\mu\lambda}]\,\psi^q$$

où $\overline{\psi}^p[{}^{\mu\lambda}]\psi^q$ est un tenseur antisymétrique sur ses indices λ, μ ; c'est la décomposition du courant de Gordon, bien connue. Intégrant sur une hypersurface σ du genre espace, et grâce à l'antisymétrie du tenseur en $[{}^{\mu\lambda}]$, le dernier groupe de termes se transforme en intégrale double étendue au contour à l'infini de σ, laquelle est nulle sous les hypothèses habituelles. D'où l'énoncé : <u>les flux du courant de Gordon</u> $-\frac{i}{2k_0}\overline{\psi}[\partial^\lambda]\psi$ <u>et du courant de Dirac</u> $i\overline{\psi}a^\lambda\psi$ <u>à travers une hypersurface</u> σ <u>du genre espace sont égaux</u>. Nous pouvons récrire (27) suivant

$$(46)\qquad \langle \psi^p | \psi^q \rangle_\sigma = \langle \psi^q | \psi^p \rangle_\sigma^{*} = i \iiint_\sigma \overline{\psi}^p a^\lambda \psi^q \, d\sigma_\lambda \quad ,$$

intégrale conservative en vertu de l'équation de continuité du courant de Dirac.

Par ailleurs, les (44) entraînent les conséquences

$$(47)\qquad k^\lambda \overline{\zeta}^p a_\lambda \zeta^q = i\,k_0 \overline{\zeta}^p \zeta^q \quad , \qquad k^\lambda \overline{\zeta}^p \zeta^q = i\,k_0 \overline{\zeta}^p a^\lambda \zeta^q \quad ,$$

la seconde homologue de (45) ; ceci montre que le quadrivecteur complexe $\overline{\zeta}^p a^\lambda \zeta^q$ est colinéaire à k^λ, de sorte qu'en faisant jouer successivement les

(47) et (4_2), nous mettons (28) sous la nouvelle forme

$$(48) \qquad \langle \zeta^p | \zeta^q \rangle_\eta = \langle \zeta^q | \zeta^p \rangle_\eta^* = i \iiint_\eta \bar{\zeta}^p a^\lambda \zeta^q \, \varepsilon(k) \, d\eta_\lambda$$

et que l'égalité de Parseval (24) ou (31) prend la forme élégante

$$(49) \qquad i \iiint_\sigma \bar{\psi}^p a^\lambda \psi^q \, d\sigma_\lambda = i \iiint_\eta \bar{\zeta}^p a^\lambda \zeta^q \, \varepsilon(k) \, d\eta_\lambda \; .$$

Vérifions directement la loi de passage au complexe conjugué impliquée dans (46) ou (48)

Lorsque β et les a_λ sont hermitiennes, on a les lois de commutation [8, équ. 3']

$$(50) \qquad \beta a_\lambda = \pm a_\lambda \beta \, , \quad - \text{ si } \lambda = 1,2,3, \quad + \text{ si } \lambda = 4 \; ;$$

par ailleurs,

$$(51) \qquad (i \, d\sigma_\lambda)^* = \pm i \, d\sigma_\lambda \quad , \quad - \text{ si } \lambda = 1,2,3, \quad + \text{ si } \lambda = 4 \; ;$$

finalement

$$(52) \qquad (i \psi^{+p} \beta a^\lambda \psi^q \, d\sigma_\lambda)^* = i \psi^{+q} \beta a^\lambda \psi^p \, d\sigma_\lambda \quad , \qquad \text{Q.E.D.} \; ;$$

un calcul de ce genre est impliqué dans les formules de Schwinger [12, équ.1.50 et 1.51].

Intégrant (49) à temps constant, nous trouvons l'expression classique de la norme ou de l'orthogonalité

$$(53) \qquad \langle \psi^p | \psi^q \rangle = \iiint \psi^{+p} \beta a_4 \psi^q \, d\vec{x}^3$$

qui, dans le cas particulier de l'équation de Dirac, se réduit à

$$(54) \qquad \langle \psi^p | \psi^q \rangle = \iiint \psi^{+p} \psi^q \, d\vec{x}^3 \; .$$

Il est intéressant de remarquer que deux ondes planes monochromatiques de même impulsion $\vec{k}$ mais d'énergies opposées $\pm k_4$ sont orthogonales au sens classique (53) : cela résulte de ce qui fut dit à propos de l'équation (21) ; cela se voit aussi grâce à la conséquence des (44)

$$(55) \qquad (k^\lambda - k'^\lambda) \bar{\zeta}(k) \, a_\lambda \, \zeta(k') = 0 \; ,$$

écrite avec $k_\lambda = (\vec{k}, + k_4)$ et $k'_\lambda = (\vec{k}, - k_4)$.

Finalement, la famille des ondes planes monochromatiques est orthogonale à la fois au sens classique (53) et au nouveau sens covariant impliqué dans (24) ou (49).

4,3.- Voyons maintenant la transformation des intégrales de Fourier covariantes réciproques (15) et (16). Compte tenu de (44) et de (4_2) , (15) devient

$$(56) \qquad \psi(x) = (2\pi)^{-3/2}\, i \iiint_{\eta} (\exp.\, i\, k^{\lambda} x_{\lambda})\, a^{\mu}\, \zeta(k)\, \varepsilon(k)\, d\eta_{\mu}$$

expression que, compte tenu de (7) et de (46), nous récrivons symboliquement suivant

$$(57) \qquad \psi(x) = \left\langle\!\left\langle e(-\,k\,x) \middle| \zeta(k) \right\rangle\!\right\rangle_{\eta} \qquad ;$$

en effet, la fonction scalaire $e(-\,k\,x)$, solution de l'équation de Gordon, ne saurait être solution de l'équation de la particule à spin, en sorte que la formule (57), rigoureusement valable au sens (27), ne saurait être que symboliquement valable au sens (46).

Dans la formule (16), nous pouvons remplacer $\partial^{\mu}\psi$ d'après la conséquence des (43)

$$(58) \qquad \partial^{\mu}\psi = \left\{ \qquad [^{\nu\mu}]\, \partial_{\nu} \;-\; k_0\, a^{\mu} \right\} \psi$$

déjà invoquée sous la forme (45). Dans l'intégrale (16), le groupe de termes $[^{\nu\mu}]\, \partial_{\nu}$ peut être intégré par parties, la partie tout-intégrée se transformant du fait de l'antisymétrie de $[^{\nu\mu}]$, en intégrale double nulle prise sur le contour à l'infini de σ ; il y a ensuite une autre intégrale en $[^{\nu\mu}]\, \partial_{\nu}$, où l'opérateur ∂_{ν} , agissant sur l'exponentielle, engendre des termes en k_{ν} qui s'ajoutent à celui figurant déjà dans (58).

Considérons d'abord le cas de l'équation de Dirac. Le résultat finalement obtenu s'écrit

$$(59) \qquad \zeta(k) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{2k_0} \iiint_{\sigma} (\gamma_{\mu} k^{\mu} + i\, k_0)\, (\exp.\, -\, i\, k^{\lambda} x_{\lambda})\, \gamma^{\nu}\, \psi(x)\, d\sigma_{\nu} \quad ;$$

la fonction $(\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - k_0)\, \exp.\, i\, k^{\lambda} x_{\lambda}$ est solution de l'équation (43) de la particule à spin, en sorte que nous pouvons écrire, au sens (46)

$$(60) \qquad \zeta_{(1/2)}(k) = \left\langle -\, \frac{i}{2k_0}\, (\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - k_0)\; e\,(k\,x) \middle| \psi_{(1/2)}\,(x) \right\rangle_{\sigma}$$

Naturellement, cette formule est valable aussi au sens (27), où elle est intégralement équivalente à (30) . Substituant (60) dans (56), on résout le problème de Cauchy sous la forme indiquée par Schwinger [12, équ. 2.23 et 2.24 ; 13, équ. A.29]

$$(61) \qquad \psi_{(1/2)}(x) = \left\langle S_{(1/2)}(x - x') \middle| \psi_{(1/2)}(x') \right\rangle_{\sigma'} \quad ,$$

formule entendue au sens (46) , et où

$$(62) \qquad S_{(1/2)}(x) = - \frac{i(2\pi)^{-3/2}}{2k_0} (\gamma_\mu \partial^\mu - k_0) D(x) \quad ;$$

naturellement, $S_{(1/2)}(x - x')$ étant solution de l'équation de Gordon, (61) peut être prise aussi au sens (27), où elle est intégralement équivalente à (37). Au sens (46), la dérivée normale du ψ sur σ' ne figure pas : elle est remplacée par une combinaison linéaire homogène des composantes du $\psi(x')$.

4,4.- La concision des formules précédentes ne se retrouve pas dès que le spin est supérieur à 1/2 ; la raison en est que les a_λ de la forme irréductible de l'équation de la particule à spin n'admettent plus, alors, d'inverses. Par exemple, en théorie de Kemmer [8, équ. 6 et 61] de la particule de spin 1, il vient, tous calculs faits,

$$(63) \qquad \varsigma_{(1)}(k) = - \frac{(2\pi)^{-3/2}}{2k_0} \iiint_\sigma (\exp. -i k^\lambda x_\lambda) \left\{ k^\nu + k_\mu [\beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu] + i k_0 \beta^\nu \right] \psi(x) \, d\sigma_\nu \quad ,$$

$$(64) \qquad \psi_{(1)}(x) = \iiint_{\sigma'} S^\lambda_{(1)}(x - x') \, \psi_{(1)}(x') \, d\sigma'_\lambda \quad ,$$

avec

$$(65) \qquad S^\lambda(x) = \frac{i(2\pi)^{-3/2}}{2k_0} \left\{ \partial^\lambda + \partial_\mu [\beta^\mu \beta^\lambda - \beta^\lambda \beta^\mu] - k_0 \beta^\lambda \right\} D(x) \; .$$

Ces formules sont covariantes relativistes, mais non réductibles à la forme canonique (46).

5. Particule plongée dans un champ extérieur.

5,1.- Formules du cas général.

Si l'on suppose la solution $\psi(x)$ de l'équation relativiste de la particule à spin soumise à un champ extérieur développée en intégrale de Fourier quadruple, aucune réduction à une intégrale triple, comme aux n^{os} 3 et 4, n'est possible. Nous aurons donc

$$(66) \qquad \psi(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iiiint_{-\infty}^{+\infty} (\exp.\ i k^\lambda x_\lambda)\, \zeta(k)\, d\tau \qquad ,$$

$$i d\tau = dk_1\ dk_2\ dk_3\ dk_4 .$$

La formule réciproque est évidemment

$$(67) \qquad \zeta(k) = \frac{1}{4\pi^2} \iiiint_{-\infty}^{+\infty} (\exp.\ -i k^\lambda x_\lambda)\, \psi(x)\, d\omega \qquad ,$$

$$i d\omega = dx_1\ dx_2\ dx_3\ dx_4 ,$$

$d\tau$ et $d\omega$ étant réels. Ces formules n'ont de sens, en théorie des fonctions de carré sommable, que si

$$(68) \qquad \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{*}\, \psi_j\, d\omega = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \zeta_j^{*}\, \zeta_j\, d\tau \quad = \text{nombre borné,}$$ [formule écrite pour chaque composante ψ_j de la fonction d'onde, donc <u>sans sommation sur l'indice de spin</u> j . Il est bien connu que les formules (68), en nombre p égal à celui des composantes du ψ , ne sont pas covariantes relativistes.

Mais introduisons les adjoints relativistes bien connus

$$(69) \qquad \overline{\psi} = \psi^+ \beta \quad , \qquad\qquad \overline{\zeta} = \zeta^+ \beta \ ,$$

et rappelons que l'hypothèse d'une matrice β diagonale est essentielle à notre théorie. Dans ce cas, les p formules (68) entraînent une valeur bornée pour la norme relativiste suivante, physiquement homogène à une action [1, p.223-224 ; 4, équ. IV.32].

$$(70) \quad - m_0 \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}\psi\, d\omega = - m_0 \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\zeta}\, \zeta\, d\tau \ = \text{action bornée.}$$

La métrique liée à l'égalité de Parseval (70) n'est pas définie positive, mais elle est une somme algébrique d'expressions définies positives bornées (68).

Ici se présente une apparente difficulté. Physiquement, la norme du ψ n'est aucunement l'intégrale quadruple (70), mais l'intégrale triple, conservative en vertu de l'équation d'ondes

$$(71) \qquad n = i \iiint_{\sigma} \overline{\psi} a^\lambda \psi\, d\sigma_\lambda \ .$$

Si l'intégrale conservative (71) est finie, l'intégrale quadruple (70) sera infinie, et la validité des intégrales réciproques (66) et (67) ne sera pas établie.

Nous allons donc modifier légèrement l'équation d'ondes de la manière que voici. Introduisons arbitrairement quatre hypersurfaces du genre espace, ne se coupant pas, et se succédant dans le temps, σ_1 et σ_2 arbitrairement loin dans le passé, σ_3 et σ_4 arbitrairement loin dans le futur. Entre σ_1 et σ_2 d'une part, σ_3 et σ_4 de l'autre, supposons que le champ extérieur comporte un terme additif imaginaire pur ; alors, la divergence du courant $i\bar{\psi}a^\lambda\psi$ sera non nulle entre σ_1 et σ_2 d'une part, σ_3 et σ_4 de l'autre ; nous supposerons notre extra-champ tel que l'intégrale (71), conservative entre σ_2 et σ_3, tombe à <u>zéro</u> avant σ et après σ_4. De la sorte, l'intégrale (70) sera comme il le fallait, finie, quoiqu'arbitrairement grande.

Deux fonctions quelconques (solutions ou non de l'équation d'ondes) seront dites <u>orthogonales</u>, au sens de la norme non définie positive (70), si leur produit scalaire hermitien

$$(72) \qquad \langle \psi^p | \psi^q \rangle = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}^p \psi^q \, d\omega = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\zeta}^p \zeta^q \, d\tau = \langle \zeta^p | \zeta^q \rangle$$

est nul. Par exemple, les fonctions $\zeta \exp. ik^\lambda x_\lambda$, où aucune restriction n'est imposée au quadrivecteur k, forment un système orthogonal, et de plus complet en vertu des formules (66) et (67).

L'opérateur des ondes est self-adjoint (nous ne disons pas hermitien!) au sens de la norme non définie positive (70). Vérifions-le dans le cas de l'électron de Dirac, où les équations d'ondes adjointes s'écrivent, compte tenu de l'extra-champ que nous avons postulé

$$(73) \qquad \left\{ a_\lambda (\overrightarrow{\partial}^\lambda + A'^\lambda + i A^\lambda) + k_0 \right\} \psi = 0 \quad ,$$

$$\bar{\psi} \left\{ a_\lambda (\overleftarrow{\partial}^\lambda + A'^\lambda - i A^\lambda) - k_0 \right\} = 0 \quad ;$$

les trois A'^α ($\alpha = 1,2,3$) sont imaginaires pures, A'^4 est réelle. Récrivons les (73) en notation de Dirac

$$(74) \qquad | \mathfrak{D} \psi \rangle = k_0 \psi \qquad , \qquad k_0 \bar{\psi} = \langle \psi \mathfrak{D} | \, ,$$

et formons l'expression

$$(75)\quad \langle \psi | \mathfrak{D}\, \psi \rangle - \langle \psi \mathfrak{D} | \psi \rangle = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} (\partial^{\lambda} + 2\,A'^{\lambda})\,\overline{\psi} a_{\lambda} \psi \, d\omega$$

$$= i\left\{ \iiint_{\sigma_{+\infty}} - \iiint_{\sigma_{-\infty}} \right\} \overline{\psi} a^{\lambda} \psi \, d\sigma_{\lambda} + 2\left\{ \iiiint_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \iiiint_{\sigma_3}^{\sigma_4} \right\} A'_{\lambda} \overline{\psi} a^{\lambda} \psi d\omega \;;$$

en vertu de nos hypothèses, chacune des deux intégrales triples est nulle, et la somme des deux intégrales quadruples est nulle, en sorte que

$$(76)\quad \langle \psi | \mathfrak{D}\, \psi \rangle = \langle \psi \mathfrak{D} | \psi \rangle \qquad , \qquad \text{Q.E.D.}$$

La masse propre réelle k_0 peut être considérée comme une valeur propre multiple de l'opérateur self-adjoint $\mathfrak{D}$, les fonctions propres correspondantes étant les solutions de l'équation des ondes.

5,2.- Cas du champ extérieur indépendant du temps.

Les notations restant celles indiquées au n° 2, il est bien connu que la solution générale de l'équation des ondes est ici de la forme

$$(77)\quad \psi(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int dk_4 \rho(k_4) \varphi(\vec{x}, k_4) \exp.\, i k_4 x_4$$

l'amplitude $\rho(k_4)$ étant arbitraire, et le facteur numérique étant introduit en vue de la suite ; les $\varphi(\vec{x}, k_4)$ sont les fonctions propres de l'énergie totale

$$(78)\quad W = \frac{h\, k_4}{2\pi i c} \quad ,$$

définies au facteur de phase $\exp.\, i k_4 x_4$ près ; pour une valeur propre W ou k_4 du spectre ponctuel, l'intégrale (77), alors symbolique, inclut aussi une sommation sur les fonctions orthogonales de la multiplicité.

Si nous faisons la transformation de Fourier

$$(79)\quad \varphi(\vec{x}, k_4) = (2\pi)^{-3/2} \iiint (\exp.\, i \vec{k}\, \vec{x}) \eta(\vec{k}, k_4)\, d\vec{k}^3$$

et posons

$$(80)\quad \zeta(k) = \rho(k_4) \eta(\vec{k}, k_4) \; ,$$

nous ramenons la forme classique (77) à la forme explicitement covariante (66). Réciproquement, M. Levy [9] a montré que si l'on prend le ψ sous la forme (66) et qu'on postule l'invariance du champ extérieur par les translations parallèles à l'axe de temps, le $\zeta(k)$ se décompose sous la forme (80), où $\rho(k_4)$ est arbitraire.

À deux fonctions propres de l'énergie totale, orthogonales au sens classique

$$(81) \qquad \iiint \varphi_j^{+p} \varphi_j^{q} \, d\vec{x}^3 = \iiint \eta_j^{+p} \eta_j^{q} \, d\vec{k}^3$$

<u>sans sommation sur l'indice de spin</u> j (c'est-à-dire quel que soit j) correspondent univoquement deux solutions de l'équation d'ondes ψ^p et ψ^q ou ζ^p et ζ^q orthogonales au nouveau sens covariant (72). C'est évident si les valeurs propres correspondantes W_p et W_q diffèrent, car alors, dans le 4-espace k , chacun des deux ζ est nul dans la région où l'autre ne l'est pas. Reste à considérer le cas de deux fonctions propres attachées à la même valeur propre W du spectre ponctuel. À l'espace des variables de configuration $\vec{x}$ et j (indice de spin) correspond un espace fonctionnel (X, J), et à l'espace des seules variables $\vec{x}$ correspond un sous-espace fonctionnel (X) . Si deux fonctions de $\vec{x}$ et j sont orthogonales dans X quel que soit j , elles sont également orthogonales dans (X,J) . Or, il est toujours possible de sous-tendre la multiplicité des fonctions propres attachées à W par des fonctions satisfaisant à la précédente condition, et c'est bien ce que l'on fait en pratique : dans le cas du champ à symétrie sphérique, les fonctions de Laplace $Y_m^{\ell}(\theta, \varphi)$ qu'on introduit sont orthogonales dans l'espace fonctionnel attaché à θ , φ, quels que soient le rayon r et l'indice de spin j . Or, pourvu que la matrice β des (69) soit diagonale, les p formules (81) (p désignant le nombre de valeurs de l'indice de spin) entraînent

$$(82) \qquad \iiiint_{k_4-\Delta k_4}^{k_4+\Delta k_4} \bar{\zeta} \, \zeta \, d\tau = 0 \quad , \qquad\qquad \text{Q.E.D.}$$

Si W est valeur propre de l'énergie, $-W$ l'est aussi. En effet, il est physiquement évident que les valeurs propres de l'énergie ne sont pas changées si l'on fait une réflexion des 4 axes d'Univers ou une réflexion des 3 axes d'espace. Or, les deux équations aux valeurs propres ainsi obtenues ne diffèrent que par le signe de W , Q.E.D. En somme, les valeurs propres de l'énergie ne sont définies qu'en module ; cette circonstance est inscrite dans le fait que la classique formule aux valeurs propres de l'atome hydrogénoïde est donnée par un radical.

Il ressort de tout ce qui précède que les fonctions propres de l'énergie associées aux seules valeurs positives de W ne forment pas un système complet pour développer le ψ général. Ceci suggère fortement, comme dans le cas électromagnétique, la possibilité d'un double signe pour la constante de couplage. En effet, dans le spectre continu, où $|W| \geqslant c^2 m_0$, le signe de l'énergie potentielle n'est pas imposé, en sorte que les deux signes sont a priori possibles pour la constante de couplage. Avec l'interprétation classique, on supposait l'énergie totale essentiellement positive, et l'on acceptait a priori deux signes pour la constante de couplage. Le présent formalisme offre une autre possibilité : le signe de la constante de couplage sera fixe, mais l'énergie totale sera susceptible des deux signes; ainsi, le corpuscule non lié sera figuré dans la région $W \geqslant c^2 m_0$ et l'anticorpuscule non lié dans la région $W \leqslant - c^2 m_0$: c'est là l'interprétation feynmanienne du système électron-positon.

Dans le spectre ponctuel, $|W| < c^2 m_0$, le signe de l'énergie potentielle est obligatoirement opposé à celui de l'énergie totale : une seule des deux possibilités au choix $0 < W < c^2 m_0$, ou $- c^2 m_0 < W < 0$, sera donc à retenir.

A cet égard, un mot d'explication sera peut-être nécessaire. Soit, dans l'Univers de Minkowski, un choc entre deux particules ; les deux trajectoires d'Univers peuvent, arbitrairement, être orientées toutes deux vers le futur (comme d'habitude), ou toutes deux vers le passé (figuration à la Feynman d'un choc entre positons) ou l'une vers le passé, l'autre vers le futur (figuration à la Feynman d'un choc entre, disons, un proton et un positon). Les impulsion-énergies doivent être orientées comme les trajectoires, en sorte que les diagrammes valent aussi dans le 4-espace k . Dans tous les cas, on a le théorème de conservation suivant : la somme des impulsion-énergies convergeant vers l'instant-point du choc égale la somme des impulsion-énergies divergeant de l'instant-point du choc.

Un énoncé analogue vaut pour les processus de désintégration et de synthèse, et notamment pour l'émission ou l'absorption d'un photon par transition du précédent électron entre deux états d'énergie différente, liés ou libres (ceci se peut, du fait de la présence du champ ambiant, et il faut inclure le cas de deux états électroniques non liés à énergies de signes opposés : création ou annihilation d'une paire dans le champ, avec absorption ou émision d'un photon).

Le précédent formalisme d'intégrales quadruples, porté dans le formalisme de Feynman, fournit directement l'amplitude attachée à la transition précédente, comme à celles d'ordres plus élevés (diffusion cohérente ou effet Raman, etc ...). A titre d'exemple, écrivons l'élément de matrice pour les transitions électroniques du premier ordre : B_λ désignant le quadrivecteur polarisation du photon, k_μ son impulsion-énergie, $\psi^p(x)$ et $\psi^q(x)$ les deux états de l'électron, l'application pure et simple de la règle de Feynman [6,7] donne l'expression suivante (non normée) pour l'amplitude de transition :

$$(83) \qquad \iiiint_{-\infty}^{+\infty} (\exp.\ i k^{\mu} x_{\mu})\, B_{\lambda}\, \bar{\psi}^{p}(x)\, \gamma^{\lambda}\, \psi^{q}(x)\, d\omega \quad .$$

Faisons sortir des ψ les facteurs exponentiels en $i W t$: la précédente intégrale ne sera non nulle que si

$$(84) \qquad k_4 + K_4^q - K_4^p = 0$$

et alors, toujours à un facteur près, elle se réduit à

$$(85) \qquad \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp.\ i[\vec{k}\,\vec{x} + (k_4 + K_4^p - K_4^q)\, x_4] \right\} B_{\lambda}\, \bar{\varphi}(\vec{x}, K_4^p)\, \gamma^{\lambda}\, \varphi(\vec{x}, K_4^q)\, d\vec{x}^3 \, ,$$

ce qui est l'expression bien connue pour l'amplitude de transition par unité de temps. Remarquons en passant que le formalisme de Feynman [7, n° 8], en plein accord avec celui de L. de Broglie [3, p.45-64] ne distingue pas entre les cas du photon longitudinal et du photon transversal. M. L. de Broglie a montré que, dans sa théorie, la probabilité d'émission-absorption dipolaire d'un photon longitudinal est commandée par la masse propre du photon, et tend vers zéro en même temps que celle-ci [3, p.45-64].

5,3.- Retour sur l'interprétation du cas général.

Les intégrales quadruples (66) à (76) présentent, comme y a insisté par avance L. de Broglie [1, p.301-307] le caractère paradoxal (mais très minkowskien) d'exprimer une Physique sans évolution, puisque tout le devenir temporel des phénomènes est intégré d'un coup. Mais la théorie de Schwinger [12, paragraphes I et II] de la représentation superquantifiée de Heisenberg, de la représentation d'interaction et de leurs rapports mutuels, fournit aujourd'hui la réponse qu'on n'apercevait pas encore en 1934.

En représentation superquantifiée de Heisenberg, chacun des deux champs obéit à ses équations de particule plongée dans le champ de l'autre, et la fonction de répartition des nombres d'occupation est invariable. Ce n'est donc pas du fait d'un accident fâcheux que nous avons été obligé de traiter ce cas au moyen d'intégrales quadruples : c'est par essence que la représentation de Heisenberg est une représentation sans évolution, puisque par ailleurs la fonction de répartition y est invariable.

Si nous voulons une représentation avec évolution, il faut, au moyen de la transformation unitaire de Schwinger [12, paragraphe II] , passer en représentation d'interaction. Dans la représentation d'interaction pure, chaque champ obéit à ses équations de particule libre, et l'interaction est décrite au moyen d'un opérateur fonction d'instant-point agissant dans l'espace des nombres d'occupation n , et faisant varier la fonction de répartition définie comme une fonctionnelle d'hyper-surface du genre espace. C'est bien là une représentation avec évolution.

Physiquement, ce sont souvent les représentations mixtes, où une partie de l'interaction est décrite d'une manière et l'autre de l'autre, qui fournissent la réponse adéquate aux questions qu'on se pose. Par exemple, en appliquant les règles de Feynman pour écrire la formule (85), nous avons représenté la liaison de l'électron au noyau à la Heisenberg (en harmonie avec la notion de niveaux d'énergie arbitrairement fins et la 4ème relation d'incertitude) et l'interaction du même électron avec le champ des photons libres en représentation d'interaction de Tomonaga [15] - Schwinger [12] - Dyson [6] - Feynman [7] (en harmonie avec les notions de transition électronique et d'émission-absorption de photons).

Comme autre exemple, considérons un effet Stark ou Zeeman. Deux points de vue sont possibles. On peut s'intéresser à l'altération du spectre naturel de l'atome par le champ perturbateur : alors, celui-ci doit être introduit dans l'équation d'ondes de l'électron, et l'on est _ipso-facto_ en représentation de Heisenberg. L'on peut aussi s'intéresser aux transitions que le champ perturbateur induit entre niveaux naturels de l'atome : alors, il faut se placer en représentation d'interaction.

Ceci nous montre une généralisation possible de la notion d'effet Stark-Zeeman : un atome est soumis à un champ électromagnétique arbitrairement variable, assez petit toutefois pour être considéré comme une perturbation. Deux problèmes peuvent être posés :

1) Altération du spectre naturel de l'atome par le champ perturbateur, y compris l'effet de 4ème relation d'incertitude : alors, c'est la représentation de Heisenberg, y compris les intégrales quadruples (66) à (76) qui s'impose.

2) Transitions induites par le champ perturbateur entre niveaux naturels de l'atome : alors c'est la représentation d'interaction qui s'impose.

Ceci nous conduit finalement à la généralisation maxima possible des précédentes idées. Un électron, par exemple, est plongé dans un champ électromagnétique arbitrairement variabke, et, en outre, il est en interaction avec le champ des photons libres. On demande les amplitudes d'émission ou d'absorption de photons des différentes fréquences et directions, induites par la présence du champ ambiant.

Les transitions de l'électron se font alors entre solutions orthogonales de l'équation des ondes (73) définies à la manière "éternelle" (72). L'application de la règle de Feynman [6,7] sous sa forme en k fournit directement la réponse cherchée

$$(86) \qquad B_\lambda \iiiint \bar{\zeta}^p(K)\gamma^\lambda \zeta^q(K + k)\, d\tau \quad ,$$

l'impulsion-énergie k du photon étant isotrope (et un facteur de normalisation étant négligé).

6.- Continuité entre les cas du corpuscule libre ou plongé dans un champ extérieur.

Cette continuité se démontre en deux temps.

6,1.- La remarque essentielle est la similitude de forme des seconds membres des formules (15) et (66) d'une part, (24) et (70) de l'autre.

Dans le cas du corpuscule libre, prenons 4 hypersurfaces du genre espace, σ_1 et σ_2 arbitrairement loin dans le passé, σ_3 et σ_4 arbitrairement loin dans le futur, et, par raison de symétrie, supposons que σ_1, σ_4 et σ_2, σ_3 soient respectivement deux hyperboloïdes à deux nappes centrés sur l'origine des coordonnées. Entre ces deux hyperboloïdes, introduisons, comme au n° 5,1 , une distribution de sources-puits du ψ , impaire dans l'espace-temps et isotrope dans l'espace. Il suit de là un étalement du spectre de la masse propre dans le 4-espace k , d'autant plus faible que σ_2 et σ_3 sont plus éloignées. σ_2 et σ_3 étant à distance finie, c'est la définition (70) de l'orthogonalité de deux ψ qui convient, mais, σ_2 et σ_3 étant repoussées à l'infini, c'est la définition (24) qui prend sa place. Dans le 4-espace k , il y a continuité entre les définitions (24) et (70) de l'orthogonalité, et il en va donc de même dans le 4-espace x .

6,2.- La transformation de Schwinger [12, paragraphe II] qui permet de passer de la représentation d'interaction à la représentation de Heisenberg est unitaire. Elle conserve donc l'orthogonalité de deux ψ' entendue au sens quadridimensionnel (70) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROGLIE (L. de) - L'électron magnétique (Théorie de Dirac) Paris, 1934.

[2] BROGLIE (L. de) - Théorie générale des particules à spin, Paris, 1942.

[3] BROGLIE (L. de) - Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, Paris, 1949.

[4] COSTA DE BEAUREGARD (O.) - La théorie de la Relativité restreinte, Paris, 1949.

[5] COSTA DE BEAUREGARD (O.) - C.R. Acad. Sci. 225, 1947, p.626 ; 232, 1951, p. 804 ; 237, 1953, p.1495 ; 238, 1954, p.50 et 1196.- Phys. Rev. 83, 1951, p.182.- Particules fondamentales et noyaux (Colloques internationaux du C.N.R.S.) 1953, p.207-216.- Journal de Physique, 15, 1954, décembre.

[6] DYSON (F. J.) - Phys. Rev. 75, 1949, p.486-502.

[7] FEYNMAN (R. P.) - Phys. Rev. 76, 1949, p.749-759 et 769-789.

[8] KEMMER (N.) - Proc. Roy. Soc. A 173, 1939, p.91-116.

[9] LEVY (M.) - Proc. Roy. Soc. A 204, 1950, p.149.

[10] NEUMANN (J. von) - Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique, Paris, 1946, Ch.III, par.5.

[11] RIESZ (M.) - Actes du 10ème Congrès des mathématiciens scandinaves, Copenhague, 1946, p.123-131.

[12] SCHWINGER (J.) - Phys. Rev. 74, 1948, p.1439-1461.

[13] SCHWINGER (J.) - Phys. Rev. 75, 1949, p.651-679.

[14] STUECKELBERG (E.C.G.) - Arch. Sci. phys. nat. Genève, 56, 1939, n° 1.

[15] TOMONAGA (S.I.) - Progress Theor. Phys. I, 1946, p. 27.