Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

G. N. Ward

Équations intrinsèques pour le mouvement des planètes

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. nº 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A8_0>

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
6e année, 1962/63, n° 12

25 mai 1963

ÉQUATIONS INTRINSÈQUES POUR LE MOUVEMENT DES PLANÈTES

par G. N. WARD

Introduction.

Le travail que je vais décrire aujourd'hui a été fait en collaboration avec M. ALLAN de la "Department of Space, Royal Aircraft Establishment, Farnborough", et il résulte de notre intérêt mutuel pour l'application des méthodes vectorielles à la résolution de quelques problèmes des orbites des satellites artificiels de la Terre. Avant de décrire ce travail, je crois qu'il faut indiquer brièvement ce qui pourrait s'appeler la méthode classique pour la résolution du problème des mouvements planétaires troublés. Comme vous le savez bien, ce problème est le calcul des déviations à partir des orbites planes et elliptiques qui résultent des forces gravitationnelles des autres planètes dans les cas où ces forces sont petites en comparaison de l'attraction du Soleil.

C'est l'usage habituel de décrire les orbites planétaires par les éléments elliptiques osculateurs, et, par exemple, un ensemble possible pour un orbite elliptique contient le demi-grand-axe a, l'excentricité e, l'inclinaison du plan orbital i, la longitude du noeud ascendant Ω, la longitude du périhélie ϖ, et soit τ le temps du passage au périhélie, soit ε la longitude de l'époque. Ces éléments sont les constantes des mouvements non troublés, mais, pour les mouvements troublés, ils varient lentement, et les équations de variation s'appellent les équations planétaires.

On connait deux formes équivalentes de ces équations planétaires : premièrement, nous avons la forme gaussienne dans laquelle les forces perturbatrices se présentent explicitement dans les équations pour les dérivées des éléments par rapport au temps, et lorsqu'une fonction potentiel existe, les dérivées de cette fonction sont prises par rapport aux coordonnées planétaires ; en second lieu, il y a la forme lagrangienne dans laquelle les dérivées de la fonction potentielle sont prises par rapport aux éléments aux-mêmes. C'est cette dernière forme, la forme lagrangienne, dont je vais parler aujourd'hui.

Les éléments i, Ω, ϖ, ε (l'inclinaison et les longitudes du noeud, du périhélie et de l'époque), dont j'ai déjà parlé, dépendent du choix d'un système particulier des axes de coordonnées, et bien que les équations planétaires pour ces éléments-ci soient covariants par rapport au changement de système des coordonnées, c'est plus commode pour quelques buts d'écrire ces équations dans une forme telle qu'elles ne dépendent pas des systèmes de coordonnées. L'implication est qu'il faut choisir les éléments qui sont intrinsèques à l'orbite. Par exemple, les éléments a et e (le demi-grand axe et l'excentricité) sont des éléments intrinsèques. On pourrait les appeler aussi les éléments naturels, car vous verrez bientôt que les éléments que je vais introduire sont aussi naturels dans le sens qu'ils se présentent naturellement comme les intégrales les plus simples des équations du mouvement non troublé. Mise à part l'utilité des équations planétaires en termes des éléments intrinsèques, il se trouve (presque par hasard) que leur dérivation est beaucoup plus facile que la dérivation des équations pour les éléments plus ordinaires.

La forme générale des équations planétaires.

Considérons une planète de masse m qui se meut sous l'attraction centrale du Soleil, la masse du Soleil étant m_0, et l'attraction des autres planètes.

Soit le vecteur $\underset{\sim}{q}$ égal au vecteur rayon héliocentrique, et soit le vecteur $\underset{\sim}{p}$ égal au vecteur vitesse de cette planète. C'est bien connu que $\underset{\sim}{q}$ et $\underset{\sim}{p}$ sont les variables canoniques, et que les équations canoniques du mouvement s'écrivent

$$(1) \qquad \frac{d\underset{\sim}{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}, \qquad \frac{d\underset{\sim}{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}} \quad .$$

La fonction hamiltonienne, H, s'exprime comme

$$(2) \qquad H = \frac{1}{2}\underset{\sim}{p}^2 - \frac{\mu}{q} - R, \qquad q = |\underset{\sim}{q}| \quad ,$$

où R est la fonction perturbatrice, qui est le potentiel newtonien des autres planètes, corrigé pour le mouvement du Soleil, $\mu = G(m_0 + m)$, et G est égale à la constante gravitationnelle.

Puis posons les fonctions c_i, fonctions de $\underset{\sim}{q}$, $\underset{\sim}{p}$ et du temps, qui peuvent être les éléments osculateurs, mais nous ne supposerons pas qu'elles soient des constantes du mouvement non troublé. Il est possible qu'il y ait plus de six fonctions c_i, mais en tout cas il faut que l'ensemble de ces fonctions-ci contienne six fonctions indépendantes.

On aura donc, en vertu des équations (1),

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial c_i}{\partial \underset{\sim}{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}} - \frac{\partial c_i}{\partial \underset{\sim}{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}} + \frac{\partial c_i}{\partial t} \quad ,$$

(le point indique le produit scalaire) qui peuvent s'écrire dans la forme alternative

$$(3) \qquad \frac{dc_i}{dt} = [c_i \,, H] + \frac{\partial c_i}{\partial t}$$

où $[c_i \,, H]$ sont les crochets de Poisson.

Maintenant nous supposons que la fonction hamiltonienne soit exprimée en fonction des c_i et du temps.

$$(4) \qquad H = H\{c_j(\underset{\sim}{q} \,, \underset{\sim}{p} \,, t) \; ; \; t\} \quad .$$

Remarquons que s'il y a des fonctions redondantes, il y aura de l'arbitraire dans l'expression fonctionnelle. Puis on a les formules

$$\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \underset{\sim}{q}} \,, \qquad \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \underset{\sim}{p}} \quad ,$$

et en substituant dans l'équation (3), on obtient la nouvelle équation

$$(5) \qquad \frac{dc_i}{dt} = \sum_j [c_i \,, c_j] \frac{\partial H}{\partial c_j} + \frac{\partial c_i}{\partial t} \quad .$$

Celles-ci sont les équations générales planétaires qui sont bien connues dans le cas où les rangs de i et j sont d'un à six. J'ai refait la dérivation pour montrer qu'il ne faut pas que le rang de i soit le même de celui de j, et que les deux rangs peuvent être choisis arbitrairement, excepté qu'il faut que le rang de j soit choisi en conformité avec l'expression fonctionnelle de H dans l'équation (4).

Les éléments intrinsèques.

Les équations (1) et (2) pour le mouvement non troublé, lorsque R est nul, admettent deux intégrales vecteurs constantes, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{q} \wedge \underset{\sim}{p} \quad ,$$

$$(7) \qquad \underset{\sim}{e} = -\frac{1}{q}\underset{\sim}{q} - \frac{1}{\mu}\underset{\sim}{h} \wedge \underset{\sim}{p}$$

où le "signe d'ommission" indique le produit vectoriel. Ici $\underset{\sim}{h}$ est l'intégrale des aires, et $\underset{\sim}{e}$ est l'intégrale de Hamilton, un vecteur en direction du périhélie dont la grandeur est égale à l'excentricité. Ces deux vecteurs décrivent la géométrie de l'orbite, mais ils ne sont pas indépendants, car les équations (6) et (7) nous permettent de voir qu'ils satisfont l'identité

$$\underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{e} = 0 \quad .$$

Une autre constante du mouvement non troublé est l'énergie, E , c'est-à-dire la fonction hamiltonienne non troublée. Elle ne dépend que de $\underset{\sim}{h}$ et $\underset{\sim}{e}$, comme nous pouvons voir en formant le carré de l'équation (7), et l'on a la formule suivante,

$$E = \frac{1}{2} \underset{\sim}{p}^2 - \frac{\mu}{q} = - \frac{\mu(1 - \underset{\sim}{e}^2)}{2\underset{\sim}{h}^2} \quad . \tag{8}$$

Nous pouvons obtenir aussi d'autres constantes utiles, fonctions de l'énergie, telles que

$$a = - \mu/2E = \underset{\sim}{h}^2/\mu(1 - \underset{\sim}{e}^2) = \text{demi-grand axe} \quad , \tag{9}$$

$$n = (\sqrt{\mu/a^3}) = \text{moyen mouvement} \quad . \tag{10}$$

Parce que c'est important plus tard, notons que toutes ces constantes-ci ne dépendent pas explicitement du temps ; elles ne sont fonctions que de $\underset{\sim}{q}$ et $\underset{\sim}{p}$.

Cependant nous n'avons que cinq fonctions scalaires indépendantes, et il faut introduire une autre fonction scalaire pour déterminer la position de la planète dans son orbite. Pour une orbite elliptique, l'anomalie excentrique, u , le fait, et nous prenons les relations suivantes de la théorie képlérienne :

$$\underset{\sim}{q} = a(1 - e \cos u) \quad , \tag{11}$$

$$\underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{p} = na^2 e \sin u \quad . \tag{12}$$

Mais l'anomalie excentrique n'est pas la fonction la plus commode dans ce cas, et nous faisons mieux d'introduire l'anomalie moyenne, ℓ , définie par l'équation de Kepler,

$$\ell = u - e \sin u \quad . \tag{13}$$

Ces définitions montrent que u et ℓ ne dépendent pas explicitement du temps, et ils ne sont fonctions que de $\underset{\sim}{q}$ et $\underset{\sim}{p}$. Ils ne sont pas des constantes des mouvements non troublés ; cependant, nous n'avons pas demandé que nos fonctions soient des constantes, et c'est commode d'utiliser l'anomalie moyenne pour la sixième fonction indépendante. Nous avons donc l'ensemble redondant $\underset{\sim}{h}$, $\underset{\sim}{e}$, E , et ℓ . Notons la relation $d\ell/dt = n$ en mouvement non troublé.

Ces fonctions-ci, définies pour les mouvements non troublés, sont définies aussi pour les mouvements troublés, parce qu'elles ne dépendent que des variables canoniques.

Parce que j'avais introduit les éléments vecteurs, il est commode d'introduire aussi les crochets vecteurs et tenseurs de Poisson ; ils s'écrivent par exemple

$$[\underset{\sim}{h}\, ,\, E] = -[E\, ,\, \underset{\sim}{h}] = \left(\frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{q}}\right)_c \cdot \frac{\partial E}{\partial \underset{\sim}{p}} - \left(\frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{p}}\right)_c \cdot \frac{\partial E}{\partial \underset{\sim}{q}} \tag{14}$$

$$[\underset{\sim}{h}\, ,\, \underset{\sim}{e}] = -[\underset{\sim}{e}\, ,\, \underset{\sim}{h}]_c = \left(\frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{q}}\right)_c \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{e}}{\partial \underset{\sim}{p}} - \left(\frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{p}}\right)_c \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{e}}{\partial \underset{\sim}{q}} \tag{15}$$

où $\partial \underset{\sim}{h}/\partial \underset{\sim}{q}$ est le tenseur avec les composantes rectangulaires

$$\left(\frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{q}}\right)_{ij} = \frac{\partial \underset{\sim}{h}_j}{\partial \underset{\sim}{q}_i} \quad ,$$

est l'indice c indique le transposé.

<u>Les crochets de Poisson par rapport à $\underset{\sim}{h}$ et E .</u>

Le calcul des crochets de Poisson par rapport à $\underset{\sim}{h}$ est une chose bien facile lorsque nous nous concernons avec les éléments intrinsèques. Il est bien connu que les composantes de l'intégrale des aires sont les fonctions génératrices des petites rotations des systèmes dynamiques, et on peut utiliser ce fait ; mais c'est plus facile et plus éclairant de faire les calculs directs.

D'abord, nous remarquons que nous avons les formules, dès la définition de $\underset{\sim}{h}$ dans l'équation (6),

$$\left(\frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{q}}\right)_c = -\underset{\sim}{I} \wedge \underset{\sim}{p} = -\underset{\sim}{p} \wedge \underset{\sim}{I}\, , \qquad \left(\frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{p}}\right)_c = \underset{\sim}{I} \wedge \underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{q} \wedge \underset{\sim}{I} \quad ,$$

où $\underset{\sim}{I}$ est le tenseur unité.

Maintenant, si à un système dynamique est donnée une rotation vecteur infinitésimale $\delta\underset{\sim}{\theta}$, le changement de quelque fonction scalaire ou vecteur, α , de $\underset{\sim}{q}$ et $\underset{\sim}{p}$ s'écrit comme suit,

$$\delta\alpha = \delta\underset{\sim}{q} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \underset{\sim}{q}} + \delta\underset{\sim}{p} + \frac{\partial \alpha}{\partial \underset{\sim}{p}} = \delta\underset{\sim}{\theta} \wedge \underset{\sim}{q} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \underset{\sim}{q}} + \delta\underset{\sim}{\theta} \wedge \underset{\sim}{p} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \underset{\sim}{p}}$$

$$= \delta\underset{\sim}{\theta} \cdot \left(\underset{\sim}{q} \wedge \underset{\sim}{I} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{p} \wedge \underset{\sim}{I} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \underset{\sim}{p}}\right) = -\delta\underset{\sim}{\theta} \cdot [\underset{\sim}{h}\, ,\, \alpha] \quad ,$$

en vertu des équations au-dessus et de la définition de $[\underset{\sim}{h}\, ,\, \alpha]$ donnée dans les équations (14) et (15).

Si la fonction α ne dépend pas des vecteurs fixes indépendamment de $\underset{\sim}{q}$ et $\underset{\sim}{p}$, alors, lorsque α est scalaire, $\delta\alpha$ s'annule, et parce que $\delta\underset{\sim}{\theta}$ est arbitraire, les crochets de Poisson s'annullent aussi.

(16) $$[\underset{\sim}{h}\ ,\ \alpha] = [\alpha\ ,\ \underset{\sim}{h}] = 0 \quad .$$

Mais lorsque α est un vecteur, son changement dû à la rotation s'écrit

$$\delta\underset{\sim}{\alpha} = \delta\underset{\sim}{\theta} \wedge \underset{\sim}{\alpha} = \delta\underset{\sim}{\theta}.\underset{\sim}{I} \wedge \underset{\sim}{\alpha} \quad ,$$

et encore parce que $\delta\underset{\sim}{\theta}$ est arbitraire, nous trouvons la formule

(17) $$[\underset{\sim}{h}\ ,\ \underset{\sim}{\alpha}] = [\underset{\sim}{\alpha}\ ,\ \underset{\sim}{h}] = -\ \underset{\sim}{I} \wedge \underset{\sim}{\alpha} = -\ \underset{\sim}{\alpha} \wedge \underset{\sim}{I} \quad .$$

Le calcul des crochets de Poisson par rapport à E est bien plus facile, parce que nous pouvons utiliser l'équation (3) pour le mouvement non troublé, c'est-à-dire lorsque H est remplacé par E. Alors pour quelque fonction scalaire ou vecteur qui ne dépende pas des vecteurs fixes, l'équation (3) nous donne

(18) $$[\underset{\sim}{\alpha}\ ,\ E] = -\ [E\ ,\ \alpha] = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\partial\alpha}{\partial t} \quad .$$

Ce résultat peut être obtenu en notant que H est la fonction génératrice pour les déplacements de quelque système dynamique.

Les crochets de Poisson par rapport à $\underset{\sim}{e}$ et ℓ.

M. ALIAN et moi, nous avons essayé de trouver les méthodes pour le calcul des crochets de Poisson par rapport à $\underset{\sim}{e}$ et ℓ qui seraient les analogues de celles pour $\underset{\sim}{h}$ et E, mais sans succès. Puis il a fallu retourner aux méthodes directes, et les évaluer en utilisant les définitions de $\underset{\sim}{e}$ et ℓ. Il ne reste plus qu'à évaluer les crochets $[\underset{\sim}{e}\ ,\ \underset{\sim}{e}]$ et $[\underset{\sim}{e}\ ,\ \ell]$: naturellement le crochet $[\ell\ ,\ \ell]$ s'annulle identiquement, et nous avons déjà évalué les crochets de $\underset{\sim}{h}$ et E avec $\underset{\sim}{e}$ et ℓ. Les calculs sont bien directs en utilisant les définitions de $\underset{\sim}{e}$, ℓ, et u dans les équations (7), (11), (12) et (13) ; ils n'ont pas grand intérêt, et je me contente de les citer. Ce sont

(19) $$[\underset{\sim}{e}\ ,\ \underset{\sim}{e}] = -\frac{1 - \underset{\sim}{e}^2}{\underset{\sim}{h}^2}\,\underset{\sim}{h} \wedge \underset{\sim}{I}$$

(20) $$[\ell\ ,\ \underset{\sim}{e}] = -\ [\underset{\sim}{e}\ ,\ \ell] = \frac{n\underset{\sim}{h}^2}{\mu^2\,\underset{\sim}{e}^2}\,\underset{\sim}{e} \quad .$$

Les équations planétaires pour $\underset{\sim}{h}$, $\underset{\sim}{e}$, ℓ , et E .

Supposons que H s'exprime de quelque façon comme fonction de $\underset{\sim}{h}$, $\underset{\sim}{e}$, ℓ , et E ; nous pouvons donc écrire immédiatement les équations planétaires en vertu des équations (5). En accord avec la notation ordinaire, nous écrivons la fonction hamiltonienne comme $-F$, pour que nous ayons la relation

$$(21) \qquad F = -E + R = \frac{\mu}{2a} + R \quad .$$

Les équations planétaires s'écrivent donc comme suit.

$$(22) \qquad \frac{d\underset{\sim}{h}}{dt} = \underset{\sim}{h} \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{h}} + \underset{\sim}{e} \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{e}} \quad ,$$

$$(23) \qquad \frac{d\underset{\sim}{e}}{dt} = \underset{\sim}{e} \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{h}} + \frac{1 - \underset{\sim}{e}^2}{\underset{\sim}{h}^2}\, \underset{\sim}{h} \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{h}} + \frac{n\underset{\sim}{h}^2}{\mu^2 \underset{\sim}{e}^2} \frac{\partial F}{\partial \ell}\, \underset{\sim}{e} \quad ,$$

$$(24) \qquad \frac{d\ell}{dt} = -\frac{n\underset{\sim}{h}^2}{\mu^2 \underset{\sim}{e}^2}\, \underset{\sim}{e} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{e}} - n \frac{\partial F}{\partial E} \quad ,$$

$$(25) \qquad \frac{dE}{dt} = n \frac{\partial F}{\partial \ell} \quad .$$

Naturellement, ces équations-ci ne sont pas indépendantes : en effet (25) peut se déduire de (22) et (23) ; aussi, en additionnant (22) multipliée scalairement par $\underset{\sim}{e}$ à (23) multipliée scalairement par $\underset{\sim}{h}$, nous voyons qu'elles ont l'intégrale $\underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{e} = 0$, qui est comme il faut.

Les éléments intrinsèques additionnels.

Le demi-grand axe, a , et le moyen mouvement, n , sont déjà définis dans les équations (9) et (10), et nous pouvons introduire des éléments additionnels,

$$(26) \qquad h = |\underset{\sim}{h}| \ , \quad e = |\underset{\sim}{e}| \ , \quad \underset{\sim}{n}_0 = \underset{\sim}{h}/h \ , \quad \underset{\sim}{a}_0 = \underset{\sim}{e}/e \ , \quad \underset{\sim}{b}_0 = \underset{\sim}{n}_0 \wedge \underset{\sim}{a}_0 \quad .$$

Tous sont des constantes des mouvements non troublés et ne dépendent pas du temps.

Aussi nous pouvons introduire le temps du passage au périhélie, τ , et l'anomalie moyenne à l'époque, σ , définis par les relations

$$(27) \qquad \ell = n(t - \tau) = nt + \sigma \quad .$$

Celles-ci sont encore des constantes des mouvements non troublés, mais dépendent explicitement du temps, et il faut se souvenir du terme $\partial c_i/\partial t$ dans l'équation (3) quand nous allons écrire les équations planétaires pour ces éléments-ci.

Les crochets de Poisson pour ces éléments les uns avec les autres peuvent être obtenus facilement à partir des crochets déjà trouvés ; cependant je ne vais pas les dériver, mais je vais signaler seulement que l'introduction des éléments additionnels peut simplifier l'emploi des équations planétaires.

Si la fonction F s'exprime en quelque façon commode comme fonction de tous les éléments intrinsèques définis jusqu'ici, nous trouvons donc que l'équation de $\underset{\sim}{h}$ s'écrit comme suit.

$$\frac{d\underset{\sim}{h}}{dt} = \underset{\sim}{h} \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{h}} + \underset{\sim}{e} \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{e}} + \underset{\sim}{n}_0 \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{n}_0} + \underset{\sim}{a}_0 \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{a}_0} + \underset{\sim}{b}_0 \wedge \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{b}_0} \quad . \tag{28}$$

Ainsi les éléments scalaires $\underset{\sim}{h}$, $\underset{\sim}{e}$, E , a , n , et ℓ ou τ ou σ peuvent être traités comme constantes dans la fonction F , et nous voyons qu'on devrait utiliser aussi peu des éléments vectoriels que possible.

Les équations pour les variations des autres éléments peuvent être écrites de façon semblable, et naturellement la fonction F peut être exprimée en quelque forme commode, qui soit différente pour les équations différentes, comme c'est convenable.

Une application aux mouvements des satellites.

Vous savez bien que les variations des éléments orbitaux peuvent être séparés en deux classes générales : la classe des variations séculaires ou des variations à longue période, et la classe des variations à courte période. Pour beaucoup de problèmes, c'est la première classe qui a l'intérêt le plus grand, et les équations pour les éléments intrinsèques me semblent tout à fait utiles pour le calcul des variations à longue période du premier ordre. Les équations pour les variations à longue période sont obtenues en moyennant par rapport aux anomalies moyennes, en ce cas-là les éléments ℓ , τ , ou σ disparaissent des équations.

Comme exemple intéressant, je vais vous donner les équations pour un satellite de la Terre dans le cas où l'on tient compte de l'effet de l'aplatissement de la Terre. La fonction perturbatrice a la forme suivante

$$R = \frac{J\mu R_0^2}{q^3} P_2(\sin \lambda) + O(J^2) \quad ,$$

où R_0 est le rayon équatorial, λ est la latitude, et J est une constante égale à $1{,}0825 \times 10^{-3}$. Cette fonction perturbatrice est particulièrement simple parce qu'elle ne dépend que de la position du satellite.

Soit $\underset{\sim}{k}$ le vecteur unitaire en direction de l'axe de la Terre. Soit aussi $\underset{\sim}{h}$, e , ℓ , et E les éléments de l'orbite moyenne. Alors on peut démontrer sans difficulté que les équations pour ces éléments moyens s'écrivent

$$(30) \qquad \frac{d\underset{\sim}{h}}{dt} = -2K \cos i \, \underset{\sim}{k} \wedge \underset{\sim}{h} + O(J^2) \quad ,$$

$$(31) \qquad \frac{d\underset{\sim}{e}}{dt} = -K\{(1 - 5\cos^2 i)\, \underset{\sim}{n}_0 + 2\cos i\, \underset{\sim}{k}\} \wedge \underset{\sim}{e} + O(J^2) \quad ,$$

$$(32) \qquad \frac{d\ell}{dt} = n + O(J) \quad ,$$

$$(33) \qquad \frac{dE}{dt} = O(J^2) \quad ,$$

où i est l'inclinaison du plan moyen de l'orbite relatif au plan équatorial, et K s'exprime

$$(34) \qquad K = 3JR_0^2\, n/4a^2(1 - e^2) \quad .$$

Les équations (30) à (34) montrent que h , e , et E sont constantes, puisque a et n sont constantes, et K est donc constante. Nous voyons finalement que les grandeurs de $\underset{\sim}{h}$ et $\underset{\sim}{e}$ sont constantes, et que ces vecteurs sont tournants, la vitesse angulaire de $\underset{\sim}{h}$ étant $-2K \cos i\, \underset{\sim}{k}$, et la vitesse angulaire de $\underset{\sim}{e}$, relative au plan orbital, étant $-K(1 - 5\cos^2 i)\, \underset{\sim}{n}_0$.

Vous pouvez voir que nos équations nous donnent la description complète du mouvement de l'orbite moyenne au premier ordre de J .

J'ai essayé d'indiquer que les équations intrinsèques ont des avantages, mais elles ont aussi des désavantages, dont le plus sérieux est qu'elle n'ont pas la forme canonique. Ainsi les méthodes élégantes des transformations canoniques dues à DELAUNAY, von ZEIPEL, BROWN et SHOOK ne peuvent pas être utilisées. Il y a peut être d'autres transformations pour ces équations, mais je ne le sais pas.