Jean Kovalevsky

Perturbations séculaires et perturbations à longue période

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. nº 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A7_0>

PERTURBATIONS SÉCULAIRES ET PERTURBATIONS À LONGUE PÉRIODE

par Jean KOVALEVSKY

1. Introduction.

Le problème que nous traitons dans cet exposé est celui du calcul des variations des éléments des trajectoires des corps célestes, pour un temps grand mais fini. Ce problème se distingue des deux problèmes suivants :

1° Le calcul exact des trajectoires. - Nous avons vu dans un précédent séminaire [6], la forme des expressions non convergentes qu'on peut obtenir, et qui, tronquées, peuvent représenter aussi bien qu'on le veut le mouvement dans un intervalle de temps Δt fini. Ce calcul étant d'autant plus long et compliqué que Δt est grand, on n'a pas encore pu, pratiquement, étendre Δt à un intervalle supérieur à quelques centaines ou milliers d'années pour les satellites, ou les planètes.

2° L'aspect général du mouvement lorsque $t \to \pm \infty$. - Les travaux de ce type ont pour objet de classer le mouvement dans l'une des catégories prévues par J. CHAZY. Récemment, J. COLLEAU [3] avait fait ici-même un exposé complet sur l'état actuel de ces études. Celles-ci ont, en définitive, un but qualitatif : savoir si la distance de deux des corps est bornée, oscille sans être bornée, ou tend vers l'infini comme $t^{2/3}$ ou comme t. Bien que, grâce aux travaux de MERMAN en particulier, on puisse appliquer des critères numériques de capture ou d'évasion, on ne peut en déduire, pour le système planétaire de résultat précis.

Le problème des perturbations séculaires et des perturbations à longue période est en quelque sorte intermédiaire. Il s'agit d'étudier les variations de grande amplitude que peuvent subir les éléments des corps célestes pendant un laps de temps grand par rapport au Δt du 1° (pratiquement, pour le système solaire, de l'ordre de quelques millions d'années). Ce problème est donc une timide approche de celui de la stabilité générale du système planétaire, problème en fait quasiment inabordable pour des intervalles de temps, de l'ordre de l'âge du Soleil, par suite du fait que les actions non gravitationnelles (variations de la masse du Soleil, frottements du milieu) mal connues, peuvent avoir à la longue une importance prépondérante.

2. Position du problème.

Rappelons d'abord le résultat fondamental déjà démontré dans un cas particulier par DELAUNAY et TISSERAND, et dont de nombreuses démonstrations générale ont été données depuis (voir par exemple, les Méthodes nouvelles [10], chap. 9).

La solution formelle des équations du mouvement d'un nombre quelconque de planètes et de satellites peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \dots \\ y_i = w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \dots \end{cases}$$

Avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $2n$ étant l'ordre du système, pour un petit paramètre de l'ordre des perturbations. Les quantités :

x_i^0 sont des constantes

w_i sont des fonctions linéaires du temps .

x_i^j et y_i^j sont des fonctions quelconques des x_i^0 et des fonctions périodiques des w_i : les x^j sont paires (développables en séries de Fourier de cosinus de combinaisons linéaires à coefficients entiers des w_i) et les y^j sont impaires.

Le calcul de ces séries constitue la résolution du problème du calcul exact des trajectoires, énoncé au 1°.

Toutefois, la somme de calculs nécessaires pour constituer des expressions du type (1) valables pendant un temps Δt assez long est trop importante et n'a pu être menée à bien, que dans le cas des satellites perturbés par le Soleil (théorie de la Lune) avec l'hypothèse que l'inclinaison, l'excentricité et le rapport n/n' des moyens mouvements à celui du Soleil soient petits. Dans ce cas particulier, le problème des perturbations séculaires et à longue période est résolu en isolant, de cette solution, les quantités w_i (perturbations séculaires), les x_i^0 et les parties ξ_i^j et η_i^j des x_i^j et y_i^j développées en séries de Fourier des w_i et ne dépendant que de ceux des w_i dont le coefficient de t est de l'ordre de μ (termes à longue période).

Dans tous les autres cas, ces solutions n'ont pas été calculées. En particulier, pour la théorie des planètes, on n'a, jusqu'à présent, jamais mis une solution, même au premier ordre en μ , sous la forme (1). Les termes à longue période qui sont introduits par les calculs sont développés en série de Taylor du temps, et la solution se met sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_{ik}^j \mu^j t^k \\ y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} y_{ik}^j \mu^j t^k \end{cases} .$$

Dans une telle solution, les x_{ik}^j et y_{ik}^j ne sont fonctions périodiques que des arguments w_i de période courte.

Dans une telle solution, on peut séparer toutes les parties des fonctions x_{ik}^j et y_{ik}^j indépendantes des w_i explicites dans ces expressions. Ces parties se mettent donc sous la forme

$$(3) \qquad \overline{x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k ; \qquad \overline{y_i} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k$$

ayant la forme de perturbations séculaires, mais qui, en fait, ne sont donc que des développements en série entière des perturbations séculaires et à longue période mélangées ([1]).

Une telle représentation de par son caractère même, n'est donc pas susceptible d'une extension importante dans le temps. Contrairement au cas d'une théorie du type (1), qui peut s'étendre à un temps long par rapport aux périodes de tous les arguments w_i , elle ne peut représenter le mouvement que pour une petite fraction de la période de l'argument négligé, ayant la période la moins longue. Elle ne conduit donc aucunement à la solution du problème envisagé.

Remarquons que c'est pourtant bien dans le cadre d'une telle représentation que s'inscrit le théorème bien connu de Poisson sur l'invariabilité des grands axes et suivant lequel, dans les expressions (3), ceux des x_i représentant les grands axes, sont de l'ordre de μ^3 au moins, alors qu'ils sont de l'ordre de μ pour les autres variables.

On a d'ailleurs montré que cet ordre est effectivement 3 en μ , J. MEFFROY [8], en particulier, a donné l'expression d'un grand nombre de termes de cet ordre. Ce théorème prouve en fait qu'il n'y a pas de terme à longue période d'ordre 1 , mais qu'il y en a d'ordre 2 .

Le problème d'obtenir les parties séculaires et à longue période

---

([1]) En fait, dans les calculs, les développements sont faits uniquement en μ , mais par suite du fait que les coefficients de t dans les termes à longue période ont μ en facteur, le résultat est le même que si on développait par rapport à t .

$$(4)\qquad \begin{cases} x_i^1 = x_i^0 + \mu\xi_i^1 + \mu^2 \xi_i^2 + \dots \\ y_i^1 = w_i + \mu\eta_i^1 + \mu^2 \eta_i^2 + \dots \end{cases}$$

des développements (1) ne peut donc être traité de la même manière que celui du calcul exact des trajectoires pour les planètes et certains satellites. Pour résoudre ce problème dans ces cas, on peut choisir un des quatre groupes de méthodes dont nous allons donner brièvement le principe en allant des méthodes purement analytiques aux méthodes purement numériques.

3. Méthode analytique exacte.

La méthode qui serait la plus satisfaisante consisterait à établir les équations différentielles exactes dont les solutions sont les expressions (4). Il se trouve que les difficultés rencontrées dans l'établissement de telles équations sont à peu près du même ordre que celles qui se présentent dans le problème de la construction des séries (1) de la solution générale.

Une des méthodes possibles pour obtenir ces équations s'inspire de la méthode de Delaunay - von Zeipel d'élémination des variables et qui conduit, poussée jusqu'au bout, à la séparation complète des variables des équations de la dynamique, en utilisant la seule hypothèse que les seconds membres des équations sont développables par rapport à la petite quantité μ.

Après avoir écrit les équations du mouvement sous la forme canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} ; \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant p$$

on peut éliminer l'une après l'autre les variables angulaires à courte période, par des changements de variables canoniques dépendant de la fonction génératrice S. Les nouvelles variables ne diffèrent des anciennes que par une quantité d'ordre μ, ne contenant que des termes périodiques par rapport à la variable éliminée.

Ainsi, lorsque ce processus est effectué pour toutes les variables $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n$ tels que les w_i correspondants aient un coefficient de t fini, nous arrivons à un système d'équations canoniques par rapport à $2p$ variables nouvelles,

$$x_i^*, y_i^* : \qquad 1 \leqslant i \leqslant p$$

telles que

$$(5) \qquad \begin{cases} x_i^* = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k x_i^k \\ y_i^* = y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k y_i^k \end{cases}$$

où les x_i^k et y_i^k sont des fonctions purement périodiques des $y_{p+1} \cdots y_n$, sans terme indépendant de l'une au moins de ces variables.

Le nouveau hamiltonien F^*, ne dépend plus des $y_{p+1}^* \cdots y_n^*$ tout en restant identique à F. Il peut donc être calculé par substitution dans F des relations inverses des expressions (5).

Il reste alors à résoudre le système

$$\frac{dx_i^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i^*} ; \qquad \frac{dy_i^*}{dt} = - \frac{\partial F^*}{\partial x_i^*} ; \qquad 1 \leqslant i \leqslant p$$

et

$$\frac{dy_j^*}{dt} = - \frac{\partial F^*}{\partial x_j^*} ; \qquad p + 1 \leqslant j \leqslant n$$

pour résoudre complètement le problème donnant une solution de la forme (4).

Il n'a pas encore été trouvé de méthode qui permette d'effectuer de tels changements de variables dans les problèmes de mécanique céleste, sans introduire, dans le cours du calcul, des développements en série entière de la quantité $\frac{n'}{n}$ ou $\frac{n}{n'}$ où n est le moyen mouvement du corps étudié et n' celui du corps perturbateur. Or, ces développements ne convergent, en général, que très lentement, tant dans la fonction perturbatrice que dans les séries transformées qui se présentent en cours de calcul. C'est ainsi que, dans les problèmes du mouvement planétaire, cette difficulté a empêché la construction d'une théorie générale sous la forme (1) et il semble qu'elle ait le même effet sur ce problème.

Dans le cas du problème du mouvement d'une petite planète perturbée par Jupiter, cette méthode conduit à éliminer les deux anomalies moyennes ℓ et ℓ', et on a

$$(6) \qquad F^* = \frac{k^2}{2L^{*2}} + \frac{km'}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr' \cos S + r^2}} \, d\ell \, d\ell'$$

(r et r' distances respectives au Soleil et à Jupiter, S : angle des rayons vecteurs), pour la partie de F^* qui a $\mu = m'$ en facteur, car cette intégrale pour la partie complémentaire de la fonction perturbatrice est nulle.

Y. KOZAÏ [7] a récemment calculé F^* sans effectuer de développement par rapport à l'excentricité e et l'inclinaison i, ce qu'on peut faire contrairement à ce qui se passe pour la révolution complète du problème du mouvement, pour lequel il faut inverser les formules (5). Dans ce travail, les équations sont résolues en supposant l'excentricité de Jupiter nulle et en utilisant le théorème de l'élimination des noeuds, pour réduire le problème à l'étude d'un système de deux équations canoniques, la solution étant développée jusqu'aux termes d'ordre 3 de $(\frac{a}{a'})$.

Un autre cas particulier peut être résolu plus complètement, c'est celui de la Lune, à condition également que $\frac{n'}{n}$ ne soit pas trop grand. Je suis en train de faire ces calculs également pour e et i quelconques. Mais dans ce cas, la petite quantité par rapport à laquelle on développe est a/a' et par suite, on ne peut plus se contenter de la formule (6) pour exprimer le hamiltonien F^*, mais il faut continuer le calcul des termes d'ordres supérieurs dans la méthode de von ZEIPEL.

Ces deux calculs correspondent, semble-t-il, aux premiers essais de résolution rigoureuse par approximations successives du problème des perturbations à longue période. Dans les deux cas, il s'agit seulement du calcul des tout premiers termes d'un développement convergeant plus ou moins lentement.

De tels travaux ont pourtant un intérêt théorique très grand. Ces dernières années, le développement des machines électroniques a permis de calculer par intégration numérique un certain nombre d'orbites, en particulier à forte inclinaison et à forte excentricité. Ainsi par exemple, MOLTCHANOV et ses collaborateurs (communication non publiée) ont-ils montré que des satellites d'inclinaison voisine de 98° auraient des termes de longue période d'amplitude très forte. Or, il s'agit là de l'inclinaison des satellites d'Uranus. Ces calculs auraient montré que ces satellites s'écraseraient sur la planète en quelques années. Or, il n'en est rien, et les auteurs ont pu montrer numériquement que ce sont les perturbations dues au fort applatissement de la planète qui assurent la survie de ces astres sur une orbite extérieure à la surface de la planète. Il est certain qu'il est très intéressant de construire analytiquement ces zônes d'impossibilité et d'étudier l'influence d'autres perturbations sur de tels corps pour bien en comprendre le mécanisme.

4. Méthodes analytiques approchées.

Le problème des perturbations séculaires et à longue période se pose depuis longtemps et si la complication de la solution analytique générale a empêché de le résoudre, on s'est efforcé de résoudre des problèmes approchés dont la solution serait voisine.

Deux types de façons d'introduire cette simplification ont été proposés :

- soit simplifier à l'extrème les équations en conservant la forme de la solution : c'est ce qu'on peut eppeler une méthode analytique approchée ;

- soit changer les données du problème après leur analyse en montrant que les résultats des deux problèmes doivent coïncider.

On peut appeler cette deuxième méthode, méthode géométrique.

Dans la première catégorie se placent, la méthode de Lagrange et celles qui en découlent. Cette méthode peut s'appliquer à un nombre aussi grand qu'on le veut de planètes de masses comparables (et par conséquent en intéraction réciproque), mais à condition que leurs inclinaisons et leurs excentricités soient petites (pour un exposé complet, voir, par exemple, TISSERAND [13], chap. 26).

On ne garde de la fonction perturbatrice développée F^* que les termes jusqu'au deuxième degré en e et i. On sait, d'après le théorème sur l'invariabilité des grands axes, que dans ces conditions limitatives, il n'y a pas de perturbations de a. Pour la j-ième planète, les quatre autres variables e_j, i_j, Ω_j et ϖ_j, sont traités d'abord à l'aide du changement de variables, analogue à celui utilisé avec beaucoup de succès par POINCARÉ pour les problèmes de libration :

$$h_j = e_j \sin \varpi_j \; ; \qquad p_j = \operatorname{tg} i_j \sin \Omega_j \quad .$$
$$k_j = e_j \cos \varpi_j \; ; \qquad q_j = \operatorname{tg} i_j \cos \Omega_j \quad .$$

La fonction perturbatrice est alors réduite à un polynôme du second degré en h k p q et les équations différentielles

$$\frac{dh_j}{dt} = \frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k_j} \qquad \text{etc.} \tag{7}$$

sont linéaires.

Il s'agit donc ici d'une linéarisation du problème, où les termes à longue période sont traités comme des oscillations dans un problème de petits mouvements.

Les solutions de ces systèmes linéaires (il y en a autant que de planètes en cause) sont de la forme

$$\text{pour } h \text{ et } k : \quad \sum_j A_j \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (g_j\, t + \beta_j)$$

$$\text{pour } p \text{ et } q : \quad \sum_j D_j \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (f_j\, t + \gamma_j)$$

où les β_j et les γ_j sont des constantes d'intégration, les g_j et les h_j sont les pulsations des termes à longue période calculés à partir des coefficients des équations (7).

Ces formules permettent donc de donner des valeurs approchées des termes séculaires (arguments de ϖ et de Ω) et aussi des valeurs approchées des limites pouvant être atteintes pour e et i . Le travail le plus complet de ce type a été fait récemment par BROUWER [1] en résolvant numériquement ces équations par une méthode donnée par JACOBI. Il a ainsi déterminé ces perturbations pour l'ensemble des neuf grosses planètes. Mais de l'avis même de cet auteur, il est probable que, par suite des hypothèses simplificatrices, cette solution ne soit qu'un ordre de grandeur, et que les coefficients trouvés sont peut-être erronés de 50%. La principale difficulté en ce qui concerne la précision est due au fait qu'on doit remplacer les valeurs moyennes des éléments - innaccessibles aux observations - par des valeurs instantanées qui peuvent en différer beaucoup.

5. Méthodes géométriques.

Ce sont celles qui sont déduites de la méthode de Gauss. Contrairement aux précédentes, elles ne s'appliquent qu'aux perturbations d'une seule petite planète par une grosse planète se déplaçant sur une ellipse, ou d'un satellite par le Soleil ; il ne s'agit donc encore que de perturbations du premier ordre, mais cette fois d'un seul corps. Ces hypothèses, restrictives par rapport à celles de la méthode de Lagrange, sont compensées par le fait qu'on admet, ici, des valeurs d'inclinaison de a/a' et d'excentricité quelconques.

Le principe de la méthode est le suivant : on considère qu'en moyenne, sur un long intervalle de temps, l'action du corps perturbateur à partir d'un arc de son orbite est proportionnelle au temps qu'il met à la parcourir. On remplace donc la planète perturbatrice par un anneau elliptique infiniment mince, dans lequel la densité $d\mu$ d'un élément est proportionnelle à l'aire Σ' du secteur ayant l'élément pour base, et pour sommet le foyer de l'anneau. Gauss a montré que la solution de ce problème est équivalente au calcul des termes séculaires au premier ordre.

Cette méthode a été étudiée en particulier par HILL [5] et par HALPHEN ([4], chap. 8) qui ont chacun proposé une méthode de calcul de ces perturbations utilisant soit des développements trigonométriques, soit des fonctions elliptiques. Elles ramènent le calcul d'une intégrale compliquée et qu'on intègre par intégration numérique.

Le calcul a été fait par cette méthode dans de nombreux cas. Signalons, récemment, une application de cette méthode par MUSEN aux satellites artificiels de très forte excentricité perturbés par le Soleil ou la Lune [9]. Cet auteur indique comment les intégrations numériques auxquelles on arrive peuvent être aisément programmées sur des machines électroniques.

6. Méthodes purement numériques.

La méthode de Gauss, à l'origine géométrique, s'est donc transformée en méthode numérique au point qu'elle a été rendue susceptible de calculs par une machine électronique. Il n'y a qu'un pas à franchir pour se débarasser de l'interprétation géométrique et transformer le problème en un problème d'analyse numérique. C'est une tendance tout à fait nouvelle qui est encore peu étudiée, mais qui peut avoir un grand avenir [2], [11] et [12].

Sans entrer dans le détail de l'algorithme permettant le calcul, donnons-en le principe.

Supposons que la solution du système différentiel à étudier, puisse se mettre sous la forme de séries de Fourier dépendant d'un certain nombre d'arguments dont un a une période de beaucoup plus courte que les autres. Plus généralement, on peut supposer qu'un ensemble d'arguments a des périodes dont le plus petit commun multiple est petit par rapport aux autres (ce qui se produira dans un certain nombre de cas de résonnance). Soit T cette période. Les coefficients de ces séries peuvent très bien dépendre du temps, à condition d'avoir des variations lentes (variations faibles pendant un temps T).

Intégrons numériquement les équations pendant $N = n(q - 1)$ périodes T (n et q entiers). La méthode consiste à considérer que les valeurs des paramètres à des intervalles de temps égaux à nT sont des données à variation lente qu'on peut traiter par un processus analogue à celui de l'intégration numérique, mais avec un pas égal à nT, au lieu d'une petite fraction de T, comme cela est nécessaire dans l'intégration numérique ordinaire. Ayant ainsi q valeurs consécutives de ces paramètres, à variation lente, on les utilise comme point de départ pour une intégration numérique de pas nT, et on met ainsi en évidence, numériquement, les variations lentes qui ne sont autres que les termes séculaires et à longue période. Le procédé peut être en quelque sorte assimilé à un filtrage.

Cette méthode a été appliquée aux satellites artificiels [12], T étant la période du satellite, avec des valeurs de n égales à cinq. L'intégration à grand pas étant effectuée conjointement avec une intégration numérique ordinaire. Les résultats ont été très satisfaisants.

7. Conclusion.

La grande diversité des méthodes qui sont à notre disposition pour résoudre le problème des perturbations séculaires et à longue période permet d'envisager d'attaquer ces problèmes par plusieurs voies à la fois. On assiste actuellement à un grand renouveau d'intérêt pour ces problèmes qui, s'ils ne peuvent conduire, semble-t-il, à des réponses précises à des problèmes cosmogoniques, ont l'intérêt de nous donner l'espoir de voir l'explication d'un certain nombre de faits troublants présents dans le système solaire : nombre très important de résonnances dans les systèmes de satellites, zônes d'absence et familles d'astéroïdes, etc. Il est probable que ces phénomènes sont l'expression physique de stabilités plus ou moins grandes de certaines orbites ou encore l'image figée d'une certaine distribution des effets à longue période. Par exemple, lorsqu'on aura un moyen sûr de calculer des éléments réellement moyens sur un très grand intervalle de temps des astéroïdes, on comprendra mieux les raisons de la distribution particulière actuelle de leurs éléments instantanés. Nous sommes donc ici en présence d'un immense champ de recherches encore à peine défriché.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROUWER (D.) and VAN WOERKOM (A. J. J.). - The secular variations of the orbital elements of the principal planets, Astron. Pap. Amer. Epher., t. 13, 1950, p. 79.

[2] COHEN (C. J.) and HUBBARD (E. C.). - An algorithm applicable to numerical integration of orbits in multirevolution steps, Astron. J., t. 65, 1960, p. 454.

[3] COLLEAU (Jean). - Au sujet de l'allure extrême du mouvement de trois corps, Séminaire Janet : Mécanique analytique et mécanique céleste, t. 2, 1958/59, n° 9, 33 p.

[4] HALPHEN (G. H.). - Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Vol. 2. - Paris, Gauthier-Villars, 1888.

[5] HILL (G. W.). - On Gauss's method of computing secular perturbations, Month. Not., t. 27, 1867, p. 247.

[6] KOVALEVSKY (Jean). - Quasi-révolution des équations de la dynamique dans le système solaire, Séminaire Janet : Mecanique analytique et mécanique céleste, t. 3, 1959/60, n° 6, 14 p.

[7] KOSAI (Yoshihido). - Secular perturbations of sateroïds with high inclination ans eccentricity, Symposium sur l'utilisation des satellites artificiels en géodésie [1962. Washington].

[8] MEFFROY (Jean). - Contribution à l'étude de la stabilité du système solaire, Bull. astron., t. 19, 1955, p. 1-221 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

[9] MUSEN (Peter). - On the long-period lunisolar effect in the notion of the artificial satellite, J. géophys. Res. U. S. A., t. 66, 1961, p. 1659-1665.

[10] POINCARÉ (Henri). - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vol. 2. - Paris, Gauthier-Villars, 1893.

[11] TARATYNOVA (G. P.). - Mouvement d'un satellite artificiel dans un champ gravitationnel non central de la Terre, compte tenu du frottement atmosphérique [en russe], Uspekhi Fiz. Nauk, t. 63, 1957, p. 51-58.

[12] THOMAS (L. H.). - Numerical integration of ordinary differential equations at an interval which may be compared with some periods in the defining functions, Astron. J., t. 63, 1958, p. 459.

[13] TISSERAND (F.). - Traité de mécanique céleste, Vol. 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1889.