S. Deser

Propriétés asymptotiques du champ gravitationnel

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. n° 7, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A6_0>

23 février 1963

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DU CHAMP GRAVITATIONNEL (*)

par S. DESER

1. Introduction.

Les travaux dont nous allons parler ici ont été élaborés en collaboration avec R. ARNOWITT et C. W. MISNER. Des articles détaillés seront publiés ultérieurement ([1]). Les résultats principaux concernent les propriétés à l'infini spatial, des espaces d'Einstein asymptotiquement plats. Leur contenu physique peut se diviser en quatre parties :

1° La preuve qu'il existe un "front d'ondes" pour de tels espaces : c'est-à-dire qu'asymptotiquement, les amplitudes physiques du champ doivent s'annuler très rapidement (il n'y a pas de radiation à l'infini).

2° L'existence d'une limite newtonienne (limite de "correspondance") pour de tels systèmes (de suffisamment loin, ils resemblent à des masses newtonniennes). Cette limite est étroitement liée à la question suivante.

3° La définition correcte (et unique) du vecteur énergie-impulsion P_μ du système, et ses propriétés, sous des transformations de coordonnées, y compris les transformations de Lorentz.

4° Les propriétés de la radiation gravitationnelle dans la "zône d'ondes", où la notion de radiation (en contraste avec celle "d'ondes", toujours valable) est bien définie, et sa propagation, flux d'énergie, etc., prennent des formes particulièrement simples et directes.

(*) La préparation de ce rapport a bénéficié d'une subvention de TRECOM, US Army Research Office. Les travaux décrits ont eu l'aide de la N. S. F. et de l'O. S. R., US Air Force.

([1]) Voir aussi les rapports des auteurs à la "Conférence sur la Relativité" [1962, Varsovie], et : ARNOWITT (R.), DESER (S.) et MISNER (C. W.). - Wave zone in general relativity, Phys. Rev., t. 121, 1961, p. 1556-1566 ; Coordinate invariance and energy expressions in general relativity, Phys. Rev., t. 122, 1961, p. 997-1006.

Nos résultats ne dépendront pas directement du formalisme canonique [2], mais ont été suggérés par ses propriétés ; ainsi il seront énoncés sans recours à lui. De même, nous n'imploierons aucune hypothèse sur l'existence d'un système de coordonnées globales. Nous démontrerons, quand il le faudra, que certaines coordonnées peuvent êtres définies asymptotiquement jusqu'à un certain ordre, grâce aux équations d'Einstein.

Nous serons guidés, en physique, par les trois aspects différents du champ métrique :

1° La partie "newtonienne", qui généralise le potentiel de Newton, donnant les effets gravitationnels de l'énergie qui est présente ; cette partie du champ se comporte comme m/r, ou plutôt comme équivalent à P_μ/r vers l'infini. Les composantes newtoniennes sont actuellement les mieux connues (et les seules mesurées); mathématiquement, ce sont les variables en faveur desquelles on résoud les quatre équations de contrainte.

2° Les "ondes" : puisque le champ d'Einstein satisfait des équations hyperboliques, il peut avoir des excitations même en l'absence de sources ; ces excitations, qu'on appelle de façon générale, les "ondes", mais qu'on considère comme "radiations" loin des parties concentrées du système, n'ont pas encore été observées, mais sont nécessairement prédites par les équations du champ.

3° Les "coordonnées" : quatre parties de la métrique, dont la mesure n'est pas d'intérêt direct, mais qui fournissent la base de notre description du système, c'est-à-dire explicitent le choix de système intrinsèque de coordonnées, employé dans un problème donné.

Dans des régions où les champs sont assez faibles (et c'est le cas à l'infini), cette séparation en trois parties acquiert un sens invariant, et le comportement de chacune des parties peut être analysé. L'analogie électromagnétique est la division de ce champ en composantes :

a. coulombienne , b. transverse , c. fonction de jauge .

Dans des régions où le champ n'est pas faible, cette division, quoique moins univoque, peut toutefois être utile ; à l'infini elle sera d'importance capitale pour les théorèmes énoncés au début.

---

(2) Ce formalisme a été traité dans des conférences faites par l'auteur au Séminaire de BROGLIE (février 1963) ; ces conférences paraîtront dans les Cahiers de Physique. Voir aussi l'article publié dans "Recent advances in gravitation". - New York, J. Wiley and sons, 1963.

2. Systèmes asymptotiquement plats.

Nous considérons des espaces d'Einstein, à structure $E^3 \times \underset{\sim}{R}$, complets mais non-compacts, tels que, à chaque instant t, il existe des coordonnées x^μ au dehors de quelques R_0, dans lesquels la métrique se comporte de la façon suivante :

$$(1) \qquad h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(1/r) , \qquad \partial^n_{\alpha\beta\ldots} g_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(1/r)$$

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(1 , 1 , 1 , -1) ,$$

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} , \qquad \mu , \nu \ldots = 0 , 1 , 2 , 3 , \quad i , j \ldots = 1 , 2 , 3 .$$

Notons que les dérivées de la métrique ne doivent pas, a priori, s'annuler plus rapidement que l'écart de celle-ci de $\eta_{\mu\nu}$, ce qui permet l'existence d'"ondes" de coordonnées, ainsi que d'ondes physiques arbitraires, comme nous le verrons. Nous supposons qu'il existe une expension asymptotique de $g_{\mu\nu}$,

$$(2) \qquad g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}_{\mu\nu}(r)}{r^{\beta(n)}} , \qquad \beta(1) \geqslant 1 > \beta(n > 1)$$

où $A^{(n)} \sim \mathcal{O}(1)$ (ou $\sim \mathcal{O}$ (en r) pour $\beta(n) > 1$), et nous allons différencier et intégrer cette série, à l'infini.

Toutes transformations de coordonnées, $\bar{x}^\mu = x^\mu + \rho^\mu$ qui respectent ces propriétés peuvent s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad \rho^\mu = a^\mu_{\ \nu}\, x^\nu + a^\mu + \xi^\mu(x) , \qquad \xi^\mu_{\ ,\nu} \sim 1/r$$

où la partie $a^\mu_{\ \nu}$ représente les transformations de Lorentz homogènes, a^μ des translations, et ξ^μ un changement de "jauge". Des exemples de fonctions ζ^μ sont fournis par $\zeta^\mu \sim x^i/r$, en $\log r$, e^{ikx}/r, etc.

Les parties x^i/r et $a^\mu_{\ \nu}\, x^\nu$ ensembles forment le groupe de Bondi-Metzner généralisé, mais à la différence que, pour nous, l'analyse se fait sur une hyparsurface spatiale et non sur le cône caractéristique.

Des espaces pour lesquels on ne peut pas réduire la métrique en la forme (1), quoique intéressants, correspondent, du point de vue physique, à des états d'énergie infinie, ce qui nous prend hors du cadre normal de systèmes non-singuliers à extension effectivement finie, qu'on considère toujours dans le reste de la physique.

3. Le théorème d'existence d'un front d'ondes.

Ce théorème est le résultat fondamental pour discuter les propriétés physiques de nos systèmes. On démontre que les amplitudes du champ représentent la radiation, (et portant l'énergie radiative) doivent s'annuler non comme $1/r$, mais comme $1/r^{3/2+\varepsilon}$ vers l'infini spatial. Intuitivement, ceci est fort raisonnable, du point de vue de l'énergie, en approximation linéaire. Celle-ci est quadratique dans ces amplitudes, et ainsi nous donnerait une contribution divergente si leur comportement restait équivalent à $1/r$ à toute distance. En théorie maxwellienne d'ailleurs, on a le même fait, que si le champ lointain se comporte toujours comme équivalent à $1/r$, l'énergie totale est infinie. La différence est, qu'on peut envisager une telle infinité dans cette théorie sans contradiction directe ; mais, en relativité, l'énergie fait partie intégrale du champ lui-même, et ne peut être infinie si on a l'hypothèse (1).

Nous allons démontrer que (1) implique l'existence de coordonnées asymptotiques telles que dans celles-ci, les équations du champ soient le comportement :

$$g_{ij,k} \sim 1/r^{3/2+\varepsilon} \sim K_{ij} , \qquad r \to \infty \tag{4}$$

où K_{ij} est le coefficient de la seconde forme fondamentale (essentiellement $K_{ij} \approx \partial_0 \, g_{ij}$).

Puisque la partie newtonienne du champ contient l'énergie, ce sera l'équation de contrainte correspondante, $G_0{}^0 = 0$, qui nous servira comme base. Nous employons ici la notation qui sépare les quantités définies à $t = 0$ du reste, et toutes opérations désormais se feront dans le sous-espace $t = 0$ où la métrique est la partie covariante, g_{ij}, de la métrique quadridimensionnelle ${}^4g_{\mu\nu}$, et l'inverse g^{ij} de g_{ij} n'est pas égal à ${}^4g^{ij}$, bien entendu. La courbure ${}^3R$, la différentiation covariante "1", etc. sont toutes en termes de g_{ij}. Définissons

$$\pi_{ij} \equiv \sqrt{-{}^4g}\,(\Gamma^0_{ij} - g_{ij}\, \Gamma^0_{mu}\, {}^3g^{mu}) \tag{5}$$

qui est très proche de la seconde forme fondamentale

$$K_{ij} \equiv - \frac{\sqrt{-{}^4g}}{\sqrt{{}^3g}}\, \Gamma^0_{ij} \qquad ,$$

l'équation de contrainte s'écrit :

$${}^3R + \frac{1}{g}\left(-\frac{1}{2}\pi^2 + \pi^{ij}\, \pi_{ij}\right) = 0 \qquad .$$

Pour le raisonnement qui suit, il est très utile d'introduire la décomposition orthogonale d'un tenseur symétrique arbitraire (2) f_{ij}, s'annulant à l'infini spacial comme $\sim 1/r^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Cette décomposition correspond à celle qu'on fait pour un vecteur en coordonnées cartésiennes en espace plat,

$$V_i = V_i^T + V_i^L \qquad \text{où} \quad \nabla \times \vec{V}^L = 0 = \nabla . V^T \quad .$$

Elle est unique, et linéaire. Pour notre cas, on a

$$f_{ij} = f_{ij}^{TT} + f_{ij}^{T} + f_{i,j} + f_{j,i} \tag{7a}$$

$$f_{ij}^{T} \equiv \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{\nabla^2} \partial_{ij}^2\right) f^T \,, \qquad f_{ii}^T = f^T \tag{7b}$$

$$f_{ij,j}^{TT} = 0 = f_{ij,j}^{T} = f_{ii}^{TT} \tag{7c}$$

où $1/\nabla^2$ est l'opérateur intégral $\int dr'/|r - r'|$, s'annulant à l'infini, de l'équation de Poisson usuelle. La décomposition (7a) peut se faire de façon covariante, mais il nous faut ici celle qui est non-covariante, en termes de dérivées et $1/\nabla^2$ cartésiens. Chacune des parties dans (7a) est uniquement définie par f_{ij} , et ce qui est le plus essentiel est le fait que le comportement asymptotique est "filtré" par la décomposition : la partie $1/r^\beta$ de chaque composante orthogonale est déterminée <u>entièrement</u> par la partie $1/r^\beta$ de f_{ij} pour tout $\beta < 3$. Ceci se démontre en considérant l'opérateur $\Theta_{ij} \equiv 1/\nabla^2\, \partial_{ij}^2$ qui définit les projections de (7a). Cet opérateur préserve l'ordre asymptotique, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \Theta_{ij}\ 1/r^\beta \sim 1/r^\beta & 0 < \beta < 3 \\ \Theta_{ij}\ 1/r^{3+\varepsilon} \sim \text{en}\ r/r^3 & 0 \leq \varepsilon \end{cases} \quad . \tag{8}$$

Donc nous savons en particulier que $h^T \sim 1/r$ si $h_{ij} \sim 1/r$. Ceci est essentiel, car la partie linéaire de notre équation (6), qui est $g_{ij,ij} - g_{ii,jj}$ est précisément $-\nabla^2 h^T$. Il y a aussi des parties de ${}^3R$ non linéaires à dérivées secondes, mais nous nous débarrassons de celles-ci par une intégration en parties, au prix d'une divergence. L'équation (6) devient alors :

$$-\nabla^2 h^T = \left[\frac{1}{4} (h_{ij,m})^2 + (\pi^{ij})^2\right] + \partial_i D^i - \frac{1}{2}\left\{\pi^2 + (h_{ij,j})^2 + \frac{1}{2} h_{ij,j}\, h_{mm,i}\right\} + C \equiv T \quad . \tag{9}$$

Les D^i sont des expressions quadratiques ou plus hautes, et C représente le reste des termes, commençant par des termes cubiques de la forme générale $\sim h^n(\partial h)(\partial h)$ ou $h^n \pi H$.

Ainsi, $C \sim 1/r^3$ a priori, et les termes quadratiques sont équivalents à $1/r^2$. D'autre part, il faut que s/∇^{2T} se comporte comme $1/r$. Les résultats classiques de la théorie du potentiel nous fournissent les conditions correspondantes sur T. Il faut exiger que $T \sim 1/r^{3+\varepsilon}$ (le monopole doit exister), ou $T \sim \partial_i(1/r^2)$ [deux autres possibilités spéciales seront éliminées plus tard].

Le terme $\partial_i \gamma^i$ n'est donc pas en question, mais ni G ni les termes quadratiques $[\ ]$ et $\{\ \}$ ne peuvent se comporter comme $1/r^2$ ou $1/r^3$. Le terme $\{\ \}$ est composé de fonctions de coordonnées, et on peut démontrer qu'il existe des coordonnées telles que $\{\ \} \sim A/r^{3+\varepsilon}$ dans celles-ci. Il reste $[\ ]$ et C. Le terme quadratique $[\ ]$ doit donc, du plus lent, se comporter comme $1/r^3$ pour pouvoir s'annuler avec des parties $1/r^3$ de C ; $[\ ]$ étant positif-défini, $[\ ] \sim 1/r^3$ implique alors que

(10) $$h_{ij,m} \sim 1/r^{3/2} \sim \pi^{ij} \quad ,$$

mais dans ce cas, C se comporte, non comme $1/r^3$, mais comme $\sim 1/r^4$, tous ses termes ayant la forme $(\partial h)^2 h^n$ ou $\pi^2 h^n$. Dans ce cas, $[\ ]$ doit converger par soi-même sans cancellation avec C, c'est-à-dire $[\ ] \sim 1/r^{3+\varepsilon}$ ou

(11) $$h_{ij,m} \sim 1/r^{3/2+\varepsilon} \sim \pi^{ij}$$

ce qui était à démontrer.

Il existe deux autres comportements possibles pour $[\ ]$, tels que $A/\nabla^2[\ ] \sim 1/r$. Ceux-ci sont $[\ ] \sim Y^m_{e>0}/r^3$ ou $\sim e^{ikr}/r^{2+\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Mais à cause du fait que $[\ ]$ est une somme de carrés, s'il a de tels termes, il y en a nécessairement de "mauvais" de la forme Y_0/r^3 ou $1/r^{2+\varepsilon}$, ceux-ci étant les "moyennes" des carrés (en angle ou en fréquence). Puisque les "mauvais" sont exclus, les autres ne peuvent apparaître non plus.

Nous avons dit qu'on peut trouver des coordonnées pour lesquelles $\{\ \} \sim 1/r^{3+\varepsilon}$. On peut même en trouver pour lesquelles

(12) $$h_{ij,j} \sim 1/r^2 \ , \qquad \pi \sim 1/r^4$$

c'est-à-dire qu'une surface minimale existe asymptotiquement au moins jusqu'à $\sim 1/r^4$. Ces possibilités dépendent étroitement des équations d'Einstein, et ne sont probablement pas réalisables pour un espace riemannien général. La démonstration de (12) se fait par construction, en commençant par des coordonnées arbitraires satisfaisant (1) et trouvant des ξ^μ tels que (12) est satisfait pour les nouvelles coordonnées.

Notre démonstration ne dépend aucunement d'expansion de la théorie en approximations successives : le terme C est simplement la différence entre les expressions rigoureuses et leur parties quadratiques la preuve donnée ici généralise des résultats que nous avons trouvés antérieurement (1), et a aussi un rapport avec des considérations traitées par A. PAPAPETROU ([3]) d'un autre point de vue.

Les quantités h^{TT} et π^{TT} sont les modes de radiation du champ. On peut démontrer leur invariance jusqu'à l'ordre $1/r^{3/2+\varepsilon}$, ce qui met en évidence que ce sont bien les parties dynamiques du champ qui doivent s'annuler rapidement. Nous parlerons plus tard de leurs propriétés dans la "zône d'ondes" où elles se comportent comme $1/r$.

4. La limite newtonienne.

Nous avons dit que le théorème du front d'ondes, est basé sur la demande que l'énergie totale soit finie. Selon la formulation canonique de la théorie, cette énergie totale est le coefficient de $1/r$ dans h^T et nous avons essentiellement montré ici que ce coefficient ne dépend pas de l'angle. Plus précisément,

$$h^T \sim E/4\pi r \quad \text{en unités où} \quad 16\,\pi\gamma\, c^{-4} = 1 = c \quad . \tag{13}$$

L'énergie est donc l'intégrale de T dans tout l'espace, selon (9), et on démontre que c'est une constante dans le temps, on peut donner de nombreux arguments physiques pour que cette définition soit la "bonne". Nous en présentons un ici qui a une importance générale pour la théorie. Prenons une particule d'épreuve à l'infini, lente par rapport à quelque repère lorentzien. En physique newtonienne, la force sur cette particule est

$$d^2\, x^i/dt^2 = \partial_i\, \Phi \sim -\,\gamma m/r^2 \tag{14}$$

où Φ est le potentiel. En relativité générale, l'équation géodésique se réduit à :

$$d^2\, x^i/dt^2 \cong -\,\Gamma^i_{00} \cong -\,\frac{1}{2}\, h_{00,i} + [h_{0i,0} + h_{0\mu}(h_{0\mu,0}\, \frac{1}{2}\, h_{00,\mu}) + \dots] \quad . \tag{15}$$

Maintenant, de nos résultats du § 3, nous pouvons montrer qu'il existe toujours des coordonnées telles que

$$h_{0i,0} \sim 1/r^{2+\varepsilon}\,, \qquad h_{00,0} \sim 1/r^{1+\varepsilon'}\,, \qquad h_{00,i} \sim 1/r^2 \qquad (\varepsilon\,,\ \varepsilon' > 0) \tag{16}$$

([3]) PAPAPETROU (A.). - Über periodische Gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Phys., 7e série, t. 1, 1958, p. 186-197 ; Eine eingache Normalform des Gravitationsfeldes erster Näherung, Annalen der Phys., 7e série, t. 8, 1961, p. 260-269.

quand il y a un front d'ondes. Effectivement, le résultat (16) ainsi que ceux du § 3 prouvent qu'on peut démontrer que $\partial_\alpha g_{\mu\nu} \sim 1/r^{1+\varepsilon}$, en partant de (1).

L'équation (15) devient, en utilisant (16),

(17) $$d^2 x^i/d\varepsilon^2 \cong -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} + \mathcal{O}(1/r^{2+\varepsilon})$$

et, si nous écrivons

(18) $$\Phi_{,i} = \frac{1}{2} h_{00,i} \sim -\gamma E/r^2$$

dans les coordonnées (16), le paramètre E devrait être l'énergie totale du système, c'est-à-dire que E est le coefficient de $1/r$ dans h_{00} pour le repère (16). Mais dans (16) on peut démontrer que la métrique est asymptotiquement du type de Schwarzschild et par conséquence que $h_{00} \sim \frac{1}{2} h^T + \mathcal{O}(1/r^{1+\varepsilon})$ on trouve donc que

(19) $$\frac{1}{2} h_{00} \sim \frac{1}{4} h^T \sim E/16\pi r \sim \gamma E/r \quad ,$$

où E est notre définition de l'énergie, selon la formulation canonique. Cette définition est donc en accord avec le critère physique qu'elle doit s'accorder avec la masse, dans la loi newtonienne où cette dernière est valable. Notons bien que nous avons démontré, et non fait l'hypothèse, que tout système (1) possède un comportement asymptotique schwarzschildien, donc que la limite newtonienne se produit toujours dans des coordonnées appropriées qui, elles, existent asymptotiquement.

Naturellement, on peut modifier les termes en $1/r$ de h_{00} par une transformation de coordonnées respectant (1). Ceci veut dire qu'il n'est pas toujours possible de trouver E à partir de h_{00}, et parallèlement, que des termes non-newtoniens s'introduisent dans (17) sous de telles transformations. La définition fondamentale de E est justement basée sur h^T et non sur h_{00}.

5. Propriétés de P_μ sans transformations de "jauge", de Lorentz.

Nous démontrons maintenant que notre définition d'énergie, ou plus généralement du vecteur P_μ énergie-impulsion, possède une invariance plus étendue que h_{00} : qu'elle est invariante sous toutes transformations $\bar{x} = x^\mu + \zeta^\mu$, $\zeta^\mu_{,\nu} \sim 1/r$, et que les P_μ se transforment comme un vecteur minkowskien sous le groupe de Lorentz. L'invariance désirée se constate en démontrant que les termes en $\sim 1/r$ de h^T et π^i sont, non seulement scalaires, mais invariants sous toute transformation ζ^μ : $\zeta^\mu_{,\nu} \sim 1/r$. La preuve se fait le plus simplement, en passant du repère newtonien à un repère arbitraire, et en observant que h^T, par exemple, est numériquement invariant à l'ordre $1/r^{2-\varepsilon}$, ε arbitrairement petit. L'impulsion du système, P_i, est définie par la formule :

(20) $$\pi^i \sim \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{12}\left[5P^i + \frac{1}{2}\left(\frac{3x^i x^j}{r^2} - \delta_{ij}\right) P^j\right] .$$

Les définitions (13), et (20) se raccordent aux définitions usuelles (Landau-Lifschitz, Einstein, Papapetrou, Dirac) dans des coordonnées où ces dernières sont bien définies, c'est-à-dire que la définition

(21) $$E = -\int \nabla^2 g^T d^3 r = \oint g^T_{,j}\, dS_j \equiv \oint (g_{ii,j} - g_{ij,i})\, dS_j$$

est moins invariante que (13) ; le dernier membre de (21) est l'expression usuelle.

La covariance de P_μ sous une transformation de Lorentz se démontre explicitement en trouvant que les coefficients des $h^{T'}$, $\pi^{i'}$ dans le nouveau repère sont les $P'_\mu = a_\mu^{\ \nu} P_\nu$. Donc sous une transformation générale du type (3), les P_μ sont invariants par rapport à la partie non-Lorentzienne, et covariants sous les rotations de Lorentz. Ainsi notre définition (13), (20) de P_μ satisfait les critères physiques et se transforme correctement. Elle est unique, et nous estimons que c'est <u>la</u> définition correcte de ces grandeurs pour le champ d'Einstein.

6. Zône d'onde et radiation gravitationnelle.

Nous terminons avec une courte esquisse des propriétés de la radiation dans la région quasi-asymptotique où les amplitudes sont encore d'ordre $1/r$ et non encore $\sim 1/r^{3/2+\varepsilon}$ comme au "vrai" infini. La région intermédiaire entre le comportement asymptotique $1/r^{3/2+\varepsilon}$ et "l'intérieur" que nous ne voulons justement pas analyser, nous l'appelons "zône d'ondes", en analogie avec la terminologie classique. Dans cette région on peut analyser le champ métrique à un moment donné sans connaître les sources intérieures du champ.

En théorie linéaire, la zône est définie, pour des fréquences données, par le critère

(22) $$kr \gg 1 .$$

Pour notre théorie non-linéaire, il nous faut ajouter en plus

(23) $$h_{\mu\nu} \ll 1$$

ainsi qu'un autre critère,

$$(24) \qquad (\partial_\alpha h_{\mu\nu})^2 \ll \partial^2_{\alpha\beta} h_{\mu\nu}$$

qui élimine l'existence de composantes de trop haute fréquence dans des termes à amplitude appréciable. Ceci est actuellement un critère sur les vraies "ondes" et non sur les "ondes de coordonnées", comme on peut montrer.

Les trois critères (22)-(24) seraient aussi nécessaires dans toute autre théorie non-linéaire pour se débarrasser justement des non-linéarités. Si par exemple, on tenait compte des termes en $F^4_{\mu\nu}$, qui s'ajoutent à la théorie de Maxwell comme conséquence de la polarisation du vide (diffusion photon-photon), il n'y aurait superposition, que si des critères du genre (23)-(24) étaient satisfaits.

Ayant défini la zône d'onde, on peut analyser le comportement de la radiation gravitationnelle dans ce domaine. On démontre que les parties à haute fréquence des h^{TT} satisfont l'équation de d'Alembert de <u>l'espace **plat**</u> :

$$(25) \quad \Box^2 h^{TT}_{ij} \equiv (\nabla^2 - \partial^2_0)\, h^{TT}_{ij} = 0 \text{ d'ordre } 1/r \qquad \text{et} \quad \pi^{ijTT} = \frac{1}{2}\, \partial_0\, h^{TT}_{ij} \quad .$$

Il y a donc superposition des ondes, et toute l'analyse bien connue de l'équation de d'Alembert s'applique ici pour la région spatio-temporelle où (25) est valable. Cette région, on peut le montrer, est très grande par rapport à la longueur d'onde et à la fréquence des excitations. Ses limites sont dictées par le point où les termes non-linéaires négligés commencent à donner des contributions séculaires (de même fréquence) appréciables. En plus, on montre que les parties newtoniennes h^T et π^i n'ont pas de hautes fréquences et que les parties h_i, π^T (coordonnées) sont arbitraires. Par conséquent, les parties à haute fréquence du tenseur de Riemann sont déterminées entièrement h^{TT} et $\pi^{TT} = \partial_0 h^{TT}$, et l'on généralise la classification de Petrov : **si il** n'y a que des ondes "out going" on retombe sur le cas N ou [4] de Petrov pour $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. La région de validité de l'équation (25) est suffisamment grande pour pouvoir définir un vecteur de Poynting utile celui-ci est le même qu'en approximation linéaire, c'est-à-dire

$$(26) \qquad T^{i0}_{grav} = \pi^{TT\ell m}(2h^{TT}_{i\ell,m} - h^{TT}_{\ell m,i}) = 2\pi^{\ell m}\, T^i_{\ell m}$$

tandis qu'en présence de sources matérielles ou maxwelliennes,

$$(27) \qquad T^{i0}_{tot} = -2\pi^{ij}_{\ ,j} = T^{i0}_{grav} + T^{i0}_{matière}$$

(rappelons que les équations de contrainte sont $-2\pi^{ij}_{\ ,j} - 2\pi^{ij}_{\ ,j} - 2\pi^{\ell m}\, T^i_{\ell m} = T^{i0}_{matière}$)
De (26) on peut calculer le flux d'énergie (de haute fréquence) à travers un élément de surface spatiale. Le flux total à travers une surface fermée dans la zône d'onde est donc

(28) $$\Delta E_{grav} = \oint dS_i \, T^{i0}_{grav} \quad .$$

Ces définitions du vecteur de Poynting comprennent implicitement une moyenne spatio-temporelle jusqu'aux plus basses longueurs d'onde et de fréquence qu'on veut mesurer. Ceci n'est pas particulier à la gravitation, mais est aussi implicite en théorie maxwellienne par exemple, et est lié au fait qu'on ne peut effectivement absorber de l'énergie qu'avec un appareil de dimensions d'espace-temps plus grandes que les fréquences en question.

Les résultats mentionnés **ici ont** une validité invariante, car on peut démontrer que h^{TT}_{ij} et T^{i0} sont des <u>scalaires</u> pour toutes transformations ξ^μ telles que $\xi^\mu_{,\nu} \ll 1$ (mais pas nécessairement $\xi^\mu_{,\nu} \sim 1/r$), préservant nos conditions (22)-(24). Plus précisément, on montre que les parties à haute fréquence de h^{TT}_{ij} , π^{ijTT} , h^T et π^i sont invariantes à ordre $1/r$, et T^{i0} à ordre $1/r^2$. En allant suffisamment loin en r , on peut donc comprendre, dans la partie "haute fréquence", toute fréquence voulue. Pour d'autres résultats dans ce domaine, ainsi que pour comparaison avec d'autres traitements de la radiation gravitationnelle, nous renvoyons aux travaux qui seront publiés, ainsi qu'à [1].