SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

PIERRE V. GROSJEAN

Considérations sur les variétés bimétriques et semi-métriques

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. n° 6, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A5_0>

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
6e année, 1962/63, n° 6

9 février 1963

CONSIDÉRATIONS SUR LES VARIÉTÉS BIMÉTRIQUES ET SEMI-MÉTRIQUES

par Pierre V. GROSJEAN

I. Préliminaires algébriques.

1. Espaces vectoriels bimétriques.

1.1. Espaces vectoriels associés. - Soit $A \equiv \|A_i^{r'}\|$ une matrice réelle régulière à $n \times n$ éléments ; il lui correspond trois matrices associées : sa transposée $\tilde{A}$, son inverse $\bar{A} \equiv A^{-1}$ et son adjointe $\hat{A} = \tilde{A}^{-1}$. Cette association est une simple conséquence de l'existence des quatre automomorphismes extérieurs dans l'ensemble des matrices régulières.

Soit alors $\mathcal{E}$ et $\bar{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ et $\hat{\mathcal{E}}$, quatre espaces vectoriels de n-uples espaces groupés deux par deux par des relations de dualité. Leurs éléments généraux seront

$$(1.1\text{-}1) \qquad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{lll} \text{une colonne} & \text{contravariante} & x \in \mathcal{E} \\ \text{une ligne} & \text{covariante} & \bar{a} \in \bar{\mathcal{E}} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{lll} \text{une ligne} & \text{contravariante} & \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{E}} \\ \text{une colonne} & \text{covariante} & \hat{b} \in \hat{\mathcal{E}} \end{array} \right. \end{cases} .$$

Ces espaces seront eux-mêmes "associés" si leurs substitutions linéaires simultanées se correspondent par les automorphismes matriciels ci-avant. On aura ainsi, pour les substitutions des éléments-types (1.1-1) :

$$(1.1\text{-}2) \qquad x' = Ax \qquad \bar{a}' = \bar{a}\bar{A} \qquad \tilde{y}' = \tilde{y}\tilde{A} \qquad \hat{b}' = \hat{A}\hat{b} \quad .$$

Désignons par ξ, α, η, β, des formes linéaires prises sur ces éléments-types au moyen d'éléments des espaces duals voulus. On aura ainsi les formes

$$(1.1\text{-}3) \qquad \alpha = \bar{a}x = \xi \qquad \eta = \tilde{y}\hat{b} = \beta$$

lesquelles sont évidemment invariantes pour les substitutions linéaires (1.1-2).

D'autre part, les quatre espaces associés sont évidemment isomorphes, et c'est en essayant de préciser ces isomorphismes que nous arriverons aux notions d'espaces vectoriels bimétriques, métriques et semi-métriques.

1.2. Espaces vectoriels bimétriques et métriques. - Choisissons alors, sous réserve, deux matrices régulières :

$$G = \|g_{ij}\| \text{ , dite "semi-métrique"} \tag{1.2-1}$$

$$F = \|f_i{}^j\| \; : \quad T \equiv I - F \quad \text{étant dite "antimétrique"} \quad .$$

G définira un isomorphisme hétérographique, c'est-à-dire avec changement de variance, conçu de façon non seulement à laisser invariantes les formes (1.1-3), mais aussi à les égaliser. Pour cela, il faudra que :

$$\hat{b} = Gx \qquad \tilde{y} = \overline{aG} \quad . \tag{1.2-2}$$

F définira un isomorphisme homographique, c'est-à-dire avec conservation de variance, conçu dans les mêmes conditions. Pareil isomorphisme impliquera toujours une transposition préalable à l'application par F. Appelant $\tilde{x}$ le transposé de x, et $\hat{a}$ celui de $\overline{a}$, on aura

$$\tilde{x} = \tilde{y}F \qquad \hat{b} = F\hat{a} \quad . \tag{1.2-3}$$

Le troisième isomorphisme sera le produit des deux précédents, et ainsi prendra-t-il le type hétérographique. Mais notons qu'on a les relations

$$Gx = \hat{b} = F\hat{a} = F\tilde{G}y = F\widetilde{G\hat{F}}x \;, \quad \forall \; x \tag{1.2-4}$$

et d'autres relations similaires conduisant toutes à

$$G = F\,\tilde{G}\,\hat{F} \quad . \tag{1.2-5}$$

Le choix de G et de F ne peut donc être entièrement arbitraire, et la liaison traduite par (1.2-5) s'exprime aussi par l'apparition de deux matrices régulières symétriques

$$P \equiv \overline{F}G = \widetilde{G\hat{F}} \equiv \tilde{P} \qquad Q \equiv F\tilde{G} = \tilde{G}F \equiv \tilde{Q} \quad . \tag{1.2-6}$$

L'ensemble des deux matrices métriques P, Q, définira le 3e isomorphisme, obéissant aux mêmes critères que les précédents :

$$\overline{a} = \tilde{x}P \qquad \hat{b} = Qy \quad . \tag{1.2-7}$$

Un ensemble de 4n-uples, ainsi mis en correspondance, sera un vecteur bimétrique, et l'ensemble de ces vecteurs sera un espace vectoriel bimétrique. Un élément général sera noté x, et la même lettre d'appui servira à désigner n'importe laquelle des composantes des 4n-uples.

L'espace devient métrique si le second isomorphisme se réduit à la simple transposition ; alors la matrice antimétrique s'annule, et il vient

$$F = I \implies G = \tilde{G} = P = Q \quad . \tag{1.2-8}$$

Le vecteur n'a plus que deux jeux de composantes. Une ultime dégénérescence est l'espace pythagoricien, où toutes les matrices caractéristiques valent I, et où, ainsi, les vecteurs ne disposent plus que d'un seul jeu de composantes.

On peut dire aussi qu'un espace bimétrique résulte de la mise en application, par la matrice F, de deux espaces métriques. Les deux matrices métriques sont congruentes, comme cela résulte de (1.2-6) :

$$Q = FP\tilde{F} \tag{1.2-9}$$

et ainsi possèdent-elles la même signature. Notons aussi que l'on a :

$$P = \tilde{G}QG \quad . \tag{1.2-10}$$

1.3. Notation bimétrique. – Appelons "oeil" toute caractéristique permettant de distinguer deux indices de même valeur numérique ; ainsi i et i', i_+ et i_-, i et $\hat{i}$, sont des paires d'indices d'oeils différents. Nous dirons que les indices figurant dans $\|A_i^{r'}\|$ sont affectés de deux "oeils affines" différents ; la transposition de ces oeils, inverse la matrice. Et nous introduirons des oeils métriques pour distinguer les indices des matrices fondamentales et de leurs associées. On posera, par exemple :

$$P = \|g_{\underset{--}{ij}}\| \qquad \bar{P} = \|g^{\overset{--}{ij}}\| \qquad Q = \|g_{\underset{++}{ij}}\| \qquad \bar{Q} = \|g^{\overset{++}{ij}}\| \tag{1.3-1}$$

en remarquant qu'une seule lettre d'appui suffit pour désigner les composantes de toutes les matrices fondamentales. On aura alors

$$\left\{\begin{array}{llll} & F = \|g_{\underset{+}{i}}{}^{\overset{-}{j}}\| & \bar{F} = \|g_{\underset{-}{i}}{}^{\overset{+}{j}}\| & \\ G = \|g_{\underset{+-}{ij}}\| & G = \|g_{\underset{-+}{ij}}\| & \bar{G} = \|g^{\overset{-+}{ij}}\| & \hat{G} = \|g^{\overset{+-}{ij}}\| \end{array}\right. \quad . \tag{1.3-2}$$

La matrice-unité, tout comme les matrices de substitution linéaire, n'a pas d'oeil métrique déterminé ; nous dirons qu'elles sont affectées de l'oeil neutre. Quant aux composantes des vecteurs-types associés (1.1-1), elles se noteront maintenant :

$$x^i = x^{\overset{-}{i}} \qquad y^i = x^{\overset{+}{i}} \qquad a_i = x_{\underset{-}{i}} \qquad b_i = x_{\underset{+}{i}} \quad . \tag{1.3-3}$$

En définitive, la distinction (+) – (–) aura remplacé la distinction ligne-colonne dont nous étions partis, Et les formes linéaires égalisées (1.1-3) s'écriront de multiples manières, dont notamment :

$$\langle y|x\rangle = y^{\overset{\pm}{i}}\, x_{\underset{\pm}{i}} = y_{\underset{\pm}{i}}\, x^{\overset{\pm}{i}} = y^{\overset{+}{i}}\, g_{\underset{+-}{ij}}\, x^{\overset{-}{j}} = \dots = \langle x|y\rangle \quad . \tag{1.3-4}$$

1.4. <u>Déterminants, densités et capacités, indicateurs</u>. – Nous désignerons les déterminants par la lettre d'appui de la matrice, mais affectée des oeils des indices ; l'oeil neutre, tout comme l'absence de signe spécial (ce qui est d'ailleurs un oeil), seront désignés par $(\bullet)$. Donc :

$$\text{dét}\|A^{r'}_{i}\| = \overset{\prime}{\underset{\bullet}{A}} \qquad ; \qquad \text{dét}\|\underset{+-}{g_{ij}}\| = \underset{+-}{g}$$

(1.4-1)

$$\text{dét}\|A^{r}_{i'}\| = \overset{\bullet}{\underset{\prime}{A}} = (\overset{\prime}{\underset{\bullet}{A}})^{-1} \; ; \qquad \text{dét}\|\underset{-+}{g_{ij}}\| = \underset{-+}{g} = \underset{+-}{g} = \underset{\bullet\bullet}{g} \qquad .$$

La notation $\underset{\bullet\bullet}{g}$ rappelle que ce déterminant, invariant de transposition matricielle, est un invariant pour le passage de l'espace métrique $(+)$ à l'espace métrique $(-)$.

Une grandeur ainsi affectée de p oeils supérieurs, et/ou de q oeils inférieurs sera une capacité d'ordre p et/ou une densité d'ordre q ; si $p = q$, les oeils étant métriques ou neutres, la grandeur est un simple invariant. Ce dernier cas sera celui de

(1.4-2) $$\overset{-}{\underset{+}{g}} = \text{dét } F = (\overset{+}{\underset{-}{g}})^{-1} \qquad .$$

On posera

(1.4-3) $$\underset{+}{g} = \sqrt{\underset{++}{g}} \qquad \underset{-}{g} = \sqrt{\underset{--}{g}} \qquad \underset{\bullet}{g} = \sqrt{\underset{\bullet\bullet}{g}}$$

sans s'inquiéter de ce que ces grandeurs (densités) puissent éventuellement être des imaginaires purs. La question des déterminations des racines carrées peut être laissée dans l'ombre, étant entendu toutefois que ces déterminations seront telles que l'on ait

(1.4-4) $$\underset{+}{g}\overset{+}{g} = \underset{-}{g}\overset{-}{g} = \underset{\bullet}{g}\overset{\bullet}{g} = +\,1$$

si $\overset{\bullet}{g} = \sqrt{\overset{\bullet\bullet}{g}}$, etc.

D'autre part,

(1.4-5) $$G = Q\hat{G}P \implies \underset{\bullet\bullet}{g}^{2} = \underset{++}{g}\;\underset{--}{g} \implies \underset{\bullet\bullet}{g} = \underset{+}{g}\underset{-}{g}$$

la dernière relation étant donnée à une détermination près. On aura de même, toujours à une détermination près :

$$Q = FP\tilde{F} \implies (\overset{-}{\underset{+}{g}})^{2} = \underset{++}{g}\;\overset{--}{g} \implies \overset{-}{\underset{+}{g}} = \underset{+}{g}\overset{-}{g}$$

(1.4-6)

$$\implies \sqrt{\overset{-}{g}} = \overset{\bullet}{g}g = \overset{-}{g}g = \overset{-}{g} = \overset{\bullet}{g} = (\overset{\bullet}{g})^{-1} = (\overset{+}{g})^{-1} = (\overset{+}{g})^{-(1/2)} \qquad .$$

L'indicateur tensoriel de permutation générale étant noté

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n}$$

on définira les indicateurs orientés par les notations

(1.4-7) $$\underset{\bullet}{\varepsilon}^{i_1 \dots i_n} \qquad \overset{\bullet}{\varepsilon}_{j_1 \dots j_n}$$

où l'oeil neutre (.) remplace ici la configuration-repère des indices (en général, celle-ci est l'ordre naturel des nombres). Les indicateurs tensoriels seront déduits des précédents par multiplication par $\overset{\bullet}{g}$ ou par $\underset{\bullet}{g}$, respectivement. On définira semblablement, au besoin, les indicateurs $\underset{+}{\varepsilon}^{i_1 \dots i_n}$, $\underset{+}{\overset{\bullet}{\varepsilon}}_{i_1 \dots i_n}$, etc. Dans ces derniers calculs on aura suivi les règles très simple d'"addition des oeils" (par exemple : $\underset{\bullet +}{\alpha\beta} = \underset{\bullet +}{\gamma}$, $\underset{+}{\overset{\bullet\bullet}{\alpha\beta}} = \underset{+}{\overset{\bullet\bullet}{\gamma}}$, $\underset{\bullet +}{\overset{\bullet}{\alpha\beta}} = \underset{\bullet +}{\overset{\bullet}{\gamma}}$, etc), et de "contraction des oeils" (par exemple : $\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\alpha\beta}} = \gamma$, $\underset{++}{\overset{+}{\alpha\beta}} = \underset{+}{\gamma}$, etc).

2. Espaces vectoriels semi-métriques.

2.1. Contra- et co-espaces semi-métriques.

– Revenons aux espaces vectoriels initiaux (1.1-1) ; nous allons maintenant nous contenter d'isomorphismes beaucoup moins ambitieux en ce qui concerne les formes (1.1-3).

Le premier isomorphisme (hétérographique) sera défini comme en (1.2-1), au moyen d'une matrice régulière asymétrique notée maintenant $\underset{(+)}{G} = \| \underset{(+)}{g_{ij}} \|$. Explicitement, on aura donc :

(2.1-1) $$b_i = \underset{(+)}{g_{ij}}\, x^j \qquad a_j = \underset{(+)}{g_{ij}}\, y^i \quad .$$

Le second isomorphisme se limitera à la simple transposition $\tilde{x} = \tilde{y}$ en ce qui concerne les espaces $\mathcal{E}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$, tandis qu'entre des éléments b_i et a_j correspondant au même x^j, il n'y aura d'autre relation que (2.1-1). D'ailleurs, tenant compte de (1.3-3), cette relation s'écrira

(2.1-2) $$\underset{+}{x_i} = \underset{(+)}{g_{ij}}\, x^j \qquad \underset{-}{x_j} = \underset{(+)}{g_{ij}}\, x^j \quad .$$

Désignons maintenant par a^i un autre vecteur contravariant, "neutre" tout comme x^i. Les formes linéaires (1.1-3) deviennent alors, moyennant un léger changement de notation sur ξ et sur α, les formes bilinéaires

(2.1-3)
$$\left\{\begin{aligned} \underset{(+)}{\alpha} &\equiv a_{\underset{+}{i}}\, x^i = \underset{(+)}{g_{ij}}\, x^i a^j = x_{\underset{-}{j}}\, a^j \equiv \underset{(-)}{\xi} \\ \underset{(-)}{\alpha} &\equiv a_{\underset{-}{j}}\, x^j = \underset{(+)}{g_{ij}}\, a^i x^j = x_{\underset{+}{i}}\, a^i \equiv \underset{(+)}{\xi} \end{aligned}\right. .$$

Cette fois, ces deux formes ne seront plus égales en général. Toutefois elles le deviendront nécessairement lorsqu'on les rendra quadratiques, en posant $x^i = a^i$; et en outre, elles seront "neutres", puisque $\underset{(+)}{\xi} = \underset{(-)}{\xi} = \xi$, avec :

(2.1-4)
$$\xi = h_{ij}\, x^i x^j \quad .$$

La matrice $H \equiv \|h_{ij}\|$, partie symétrique de $\underset{(+)}{G}$, sera toujours supposée régulière.

Il sera bon d'employer, à l'occasion, un nouvel oeil neutre $(_o)$ pour caractériser les indices abaissés par H. Ainsi, le n-uple contravariant x^j se verra-t-il accompagné de trois n-uples covariants :

(2.1-5)
$$x_{\underset{o}{i}} = h_{\underset{o}{i}j}\, x^j \quad \text{et} \quad x_{\underset{\pm}{i}} = x_{\underset{o}{i}} \pm k_{ij}\, x^j$$

où la matrice $K = \|k_{ij}\|$ est la partie antisymétrique de $\underset{(+)}{G}$.

Pareil ensemble de 4n-uples constituera un "contra-vecteur semi-métrique", et l'ensemble de ces vecteurs, un "contra-espace semi-métrique".

Revenons à nouveau aux espaces primitifs, mais établissons cette fois entre les deux espaces d'éléments covariants, l'isomorphisme de simple transposition ; autrement dit, posons $\hat{b} = \hat{a}$ dans (1.1-1). Le premier isomorphisme sera pareillement réalisé par une matrice régulière notée ici $\underset{(-)}{\overline{G}} = \|\underset{(-)}{g^{ij}}\|$. Les considérations précédentes vont se répéter, mais en permutant partout les mots "covariant" et "contravariant". Les formes quadratiques seront

(2.1-6)
$$\beta = \ell^{ij}\, b_i\, b_j$$

où $\overline{L} = \|\ell^{ij}\|$, est la partie symétrique, supposée régulière, de la matrice $\underset{(-)}{\overline{G}}$.

Ici aussi, il sera bon d'employer, éventuellement, un nouvel oeil neutre $(\times)$, pour désigner les indices relevés par $\overline{L}$. Le n-uple covariant b_j est associé à trois n-uples

(2.1-7)
$$b^{\overset{\times}{i}} = \overset{\times}{\ell}{}^{ij}\, b_j \qquad b^{\overset{\pm}{i}} = b^{\overset{\times}{i}} \pm m^{ij}\, b_j$$

où la matrice $\overline{M} = \|m^{ij}\|$ est la partie antisymétrique de $\underset{(-)}{\overline{G}}$ (en spécifiant que que la notation $\overline{M}$ n'implique en rien l'existence nécessaire d'une matrice M, inverse de $\overline{M}$).

Si maintenant, disposant d'un espace $\mathcal{E}$ de n-uples ainsi que de son dual $\overline{\mathcal{E}}$, on attache au premier une matrice $\underset{(+)}{G} = \|\underset{(+)}{g_{ij}}\|$, et au second une matrice $\underset{(-)}{\overline{G}} = \|\underset{(-)}{g^{ij}}\|$, on définit un espace semi-métrique. On dira alors que les deux matrices $\underset{(+)}{G}$ et $\underset{(-)}{G}$ seront images l'une de l'autre ; il en ira de même, bien entendu pour les matrices $\underset{(+)}{G}$ et $\underset{(-)}{G}$.

2.2. Espaces semi-métriques einsteiniques. - Nous réserverons ce nom aux espaces où l'on aura

$$(2.2\text{-}1)\qquad \underset{(+)}{G} = \underset{(-)}{\widetilde{G}} \iff \underset{(+)}{g_{ij}} = \underset{(-)}{g_{ji}} .$$

Nous dirons aussi que $\underset{(+)}{g_{ij}}$ est alors un tenseur einsteinique, et la propriété d'"einsteinicité" ainsi introduite est connue en littérature sous le nom de "pseudo-hermiticité" (encore qu'on ne la signale qu'à propos des équations du champ unitaire, et non pas à propos du tenseur g_{ij} lui-même).

Bien entendu, si g_{ij} est symétrique, la distinction entre les oeils $(_+)$, $(_-)$, $(_\circ)$, $(_\times)$ disparaît d'elle-même, et l'espace semi-métrique dégénère en un espace métrique tout-à-fait banal.

La propriété d'einsteinicité a une conséquence importante : les formes linéaires du type $x^j\, b_j$ prennent plusieurs écritures "semi-métriques" remarquablement simples :

$$(2.2\text{-}2)\qquad x^j\, b_j = \underset{+}{x_i}\, \underset{(+)}{g^{ij}}\, \underset{(+)}{g_{kj}}\, \overset{+}{b}{}^k \equiv \underset{+}{x_i}\, \overset{+}{b}{}^i = \underset{-}{x_k}\, \overset{-}{b}{}^k .$$

Toutes ces écritures respectent la règle de "contraction des oeils". Cependant ces dernières formes conservent malgré tout un certain caractère affine : il n'existe aucun moyen d'abaisser l'indice de x^j, ou de relever celui de b_j, sans changer d'oeil. Nous donnerons les noms de matrices pseudo-métriques, de Hlavaty et de Lichnerowicz respectivement, aux matrices H et $L = \|\ell_{ij}\|$.

Il est cependant remarquable que ces deux matrices possèdent les propriétés des matrices métriques P et Q d'un espace bimétrique. En effet, des relations d'inversion existant entre $\underset{(\pm)}{G}$ et $\underset{(\pm)}{\overline{G}}$, on déduit immédiatement :

$$(2.2\text{-}3)\qquad H\overline{L} - K\overline{M} = I \qquad H\overline{M} - K\overline{L} = 0 .$$

De ces relations, on déduit :

$$(2.2\text{-}4)\qquad T \equiv L\overline{M} = K\overline{H} \qquad K = L\overline{M}H = H\overline{M}L$$

(2.2-5) $$L = H - K\overline{H}K \qquad \overline{H} = \overline{L} - \overline{M}L\overline{M} \quad .$$

Introduisons alors les deux matrices régulières

(2.2-6) $$\underset{\pm}{F} \equiv I \pm T = \begin{cases} L(\overline{L} \pm \overline{M}) = L\underset{\pm}{\hat{G}} \\ (H \pm K)\,\overline{H} = \underset{\pm}{G}\overline{H} \end{cases} \quad .$$

Il vient :

(2.2-7) $$L = \underset{\pm}{F} H \underset{\pm}{\tilde{F}}$$

et

(2.2-8) $$L = \underset{\pm}{G}\overline{H}\underset{\pm}{\tilde{G}} \qquad H = \underset{\pm}{G}\overline{L}\underset{\pm}{\tilde{G}} \quad .$$

Par conséquent, <u>chacune</u> des deux matrices $\underset{(+)}{F}$ et $\underset{(-)}{F}$ joue le rôle de la matrice F caractéristique des espaces bimétriques. Les deux matrices $\pm T$ sont donc "antimétriques" (en ce sens que c'est leur existence qui empêche l'espace d'être métrique). D'autre part, chacune des matrices $\underset{(+)}{G}$ et $\underset{(-)}{G}$ peut jouer le rôle de la matrice semi-métrique. De cette dualité résulte que H et L sont invariants pour le passage aux images, ce qui n'était nullement le cas des matrices P et Q. Donc H et L peuvent jouer le rôle de P et de Q, indifférement selon les modalités suivantes :

(2.2-9)
$$\text{pour } F = \underset{(+)}{F}\text{, on a } H = P \text{ et } L = Q$$
$$\text{pour } F = \underset{(-)}{F}\text{, on a } H = Q \text{ et } L = P \quad .$$

En ce qui concerne les notations des capacités et des déterminants, on posera tout naturellement :

(2.2-10) $$\underset{\bullet\bullet}{g} = \text{dét } \underset{(\pm)}{G} = \underset{\bullet}{g}^2 \; ; \quad \underset{\circ\circ}{h} = \text{dét } H = \underset{\circ}{h}^2 \; ; \quad \underset{\times\times}{\ell} = \text{dét } L = \underset{\times}{\ell}^2 \; ;$$
$$\overset{\circ}{\underset{\times}{f}} = \text{dét } \underset{(\pm)}{F} = \overset{\times}{\underset{\circ}{f}}{}^{-1}$$

et on aura, comme dans les espaces bimétriques :

(2.2-11) $$\underset{\bullet\bullet}{g} = \underset{\circ\times}{h\ell} \; ; \quad \overset{\circ}{\underset{\times}{f}} = \overset{\circ}{\underset{\times}{\ell h}} \; ; \quad \sqrt{\overset{\circ}{\underset{\times}{f}}} = \overset{\bullet}{\underset{\times}{g\ell}} = \overset{\circ}{\underset{\bullet}{gh}} = \overset{\bullet}{\underset{\times}{f}} = \overset{\circ}{\underset{\bullet}{f}}$$

ainsi que les formules inverses ($\overset{\bullet\bullet}{g} = \overset{\circ\times}{h\ell}$, etc), les déterminations des racines carrées étant laissées dans l'ombre.

2.3. Tenseurs surfaciques de rang 2. – Ces tenseurs, appelés de ce nom par PAULI – et appelés "doubles-2-formes" par LICHNEROWICZ – ont, par définition, toutes les symétries du tenseur de Riemann-Christoffel dans une variété métrique. Si $g_{k\ell}$ est le tenseur métrique (symétrique) d'une telle variété, et si $\varepsilon^{ij}_{k\ell}$ désigne l'indicateur de rang 2 de permutation partielle, le tenseur

(2.3-1) $$g_{ij.k\ell} \equiv g_{ir}\, g_{js}\, \varepsilon^{rs}_{k\ell}$$

est une double-2-forme. Ses éléments sont ceux de la matrice à $C^2_n \times C^2_n$ éléments que l'algèbre extérieure associe naturellement à la matrice métrique G. Et cette matrice joue pour les 2-formes le rôle que G joue pour les 1-formes (n-uples):

(2.3-2) $$H_{ij} \equiv H_{[ij]} = \frac{1}{2}\, g_{ij.k\ell}\, H^{k\ell} \qquad (H^{k\ell} = H^{[k\ell]}) \quad .$$

Si $g_{ij} \neq g_{ji}$ est semi-métrique, on a encore

(2.3-3) $$g_{ij.k\ell} = g_{[ij].[k\ell]} \qquad g_{i[j.k\ell]} = 0$$

mais on a :

$$g_{ij.k\ell} \neq g_{k\ell.ij} \quad .$$

Il y a ainsi eu chute dans le nombre des symétries, et on n'aura pas défini, en toute rigueur, une double-2-forme.

Plus intéressants seront alors les tenseurs ci-après :

1°

(2.3-4) $$\underset{+-}{g_{ij.k\ell}} = \underset{(+)}{g_{ir}}\; \underset{(-)}{g_{js}}\; \varepsilon^{rs}_{k\ell}$$

qui est anti-symétrique sur les indices neutres, et anti-einsteinique sur les indices $(+-)$:

(2.3-5) $$\underset{+-}{g_{ij.k\ell}} + \underset{-+}{g_{ji.k\ell}} = 0 \quad .$$

Ces symétries sont celles du tenseur de Riemann-Christoffel des variétés semi-métriques ; et une telle variété sera dite "de Schrödinger" si l'on a :

(2.3-6) $$\underset{+-}{R_{ij.k\ell}} + \alpha \underset{+-}{g_{ij.k\ell}} = 0 \implies \underset{-}{R_{i\ell}} + (n-1)\, \alpha\, \underset{(-)}{g_{i\ell}} = 0 \quad .$$

2° Soient h_{ij} et ℓ_{ij} les deux tenseurs métriques d'une variété bimétrique, ou les deux tenseurs pseudo-métriques d'une variété semi-métrique einsteinique ; le tenseur ci-après, symétrique sur h et sur ℓ, est une double-2-forme :

(2.3-7) $$\gamma_{ij.k\ell} \equiv \frac{1}{2}\,(\ell_{ik}\, h_{j\ell} + h_{ik}\, \ell_{j\ell} - \ell_{i\ell}\, h_{jk} - h_{i\ell}\, \ell_{jk})$$

et ce tenseur apparaît implicitement dans (2.2-4). On définirait de même le tenseur $\gamma^{ij.k\ell}$.

3° En fait, dans (2.2-4) apparaît le tenseur plus modeste

$$\overset{\times\circ}{\gamma}{}^{ij.k\ell} \equiv \ell^{ir}\, h^{js}\, \varepsilon^{k\ell}_{rs} \tag{2.3-8}$$

qui n'est pas un double-2-forme, et ne possède que les symétries de (2.3-4) ; la même relation (2.2-4) peut s'écrire en employant $\overset{\circ\times}{\gamma}{}^{ij.k\ell}$, conjugué einsteinique de $\overset{\times\circ}{\gamma}{}^{ij.k\ell}$ (conjugaison sur les oeils $_\circ$ et $_\times$). C'est là une propriété très particulière des tenseurs k_{ij} et m^{ij}, que de pouvoir être déduits l'un de l'autre indifféremment par l'un quelconque des tenseurs γ qu'on vient de définir:

$$m^{ij} = \frac{1}{2}\,\gamma^{ij.k\ell}\, k_{k\ell} = \frac{1}{2}\,\overset{\circ\times}{\gamma}{}^{ij.k\ell}\, k_{k\ell} = \frac{1}{2}\,\overset{\times\circ}{\gamma}{}^{ij.k\ell}\, k_{k\ell} \quad . \tag{2.3-9}$$

II. Schémas électromagnétiques.

1. Schéma affine.

1.1. Préliminaires. Notations. - Soit V_4 une variété différentielle dont la structure ne sera pas précisée pour le moment ; les calculs se feront donc d'abord en employant les dérivations partielles ordinaires, avec les notations $f_{,\rho} = \partial_\rho f$. Si la variété admet des tenseurs métriques ou pseudo-métriques, ceux-ci seront supposés réguliers et de signature hyperbolique normale $(---+)$; ainsi les densités $\underset{\circ}{h}$ et $\underset{\times}{\ell}$ seront-elles des imaginaires pures.

Les densités duales contravariantes des tenseurs linéaires covariants seront définies par

$$(1.1\text{-}1)\quad \underset{\bullet}{{}^*X}{}^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{1!}\,\underset{\bullet}{\varepsilon}{}^{\rho\lambda\mu\nu}\, X_\rho \qquad \underset{\bullet}{{}^*Z}{}^{\rho} = \frac{1}{2!}\,\underset{\bullet}{\varepsilon}{}^{\rho\lambda\mu\nu}\, Z_{\lambda\mu\nu}$$

$$\underset{\bullet}{{}^*Y}{}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2!}\,\underset{\bullet}{\varepsilon}{}^{\rho\sigma\lambda\mu}\, Y_{\rho\sigma} = \frac{1}{2!}\,\underset{\bullet}{\varepsilon}{}^{\lambda\mu\rho\sigma}\, Y_{\rho\sigma} \quad .$$

Dans les "schémas électromagnétiques", nous nous inspirerons ces notations de O. COSTA de BEAUREGARD, appelant "inductions" deux tenseurs covariants $B_{\lambda\mu}$ et $D_{\lambda\mu}$, et "champs" leurs densités duales respectives : $\underset{\bullet}{E}{}^{\lambda\mu} \equiv \underset{\bullet}{{}^*B}{}^{\lambda\mu}$ et $\underset{\bullet}{H}{}^{\lambda\mu} \equiv \underset{\bullet}{{}^*D}{}^{\lambda\mu}$.

1.2. Electromagnétisme affine. - Il est aisé de définir un schéma purement affine de l'électromagnétisme. Pour cela il suffit d'introduire :

1° Une 2-forme fermée $B_{\alpha\beta}$

$$B_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0 \iff \underset{\bullet}{E}{}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{1.2-1}$$

et par conséquent une 1-forme locale ouverte, définie à un gradient près, le potentiel A_α , tel que

(1.2-2) $$B_{\alpha\beta} = - 2A_{[\alpha,\beta]} \quad .$$

2° Une 2-forme ouverte $D_{\alpha\beta}$, dont la source est ${}^*Z_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$

(1.2-3) $$D_{[\alpha\beta,\gamma]} = \frac{1}{3}\, {}^*Z_{\alpha\beta\gamma} \iff \underset{\bullet}{H}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \underset{\bullet}{Z}^{\alpha}$$

ce qui conduit à l'équation de conservation de la source

(1.2-3) $$\underset{\bullet}{Z}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad .$$

3° Une densité tensorielle mixte, dite de Maxwell-Minkowski :

(1.2-4) $$\underset{\bullet}{M}_{\beta}{}^{\alpha} = D_{\rho\beta}\, \underset{\bullet}{E}^{\rho\alpha} - \frac{1}{4}\, \delta_{\beta}^{\alpha}\, \underset{\bullet}{C} = \frac{1}{4}\, \delta_{\beta}^{\cdot\alpha}\, \underset{\bullet}{C} - B_{\rho\beta}\, \underset{\bullet}{H}^{\rho\alpha}$$

avec

(1.2-5) $$\underset{\bullet}{C}_{\beta}{}^{\alpha} \equiv D_{\rho\beta}\, \underset{\bullet}{E}^{\rho\alpha} \qquad \underset{\bullet}{C} \equiv D_{\rho\sigma}\, \underset{\bullet}{E}^{\rho\sigma} = B_{\rho\sigma}\, \underset{\bullet}{H}^{\rho\sigma}$$

qui est de trace nulle : $\underset{\bullet}{M}_{\alpha}{}^{\alpha} = 0$.

4° Une densité tensorielle qui sera dite "cousine" de la précédente.

(1.2-6) $$\underset{\bullet}{N}_{\beta}{}^{\alpha} = \underset{\bullet}{M}_{\beta}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}\, \delta_{\beta}^{\alpha}\, \underset{\bullet}{C} = \underset{\bullet}{C}_{\beta}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\, \delta_{\beta}^{\alpha}\, \underset{\bullet}{C} = - B_{\rho\beta}\, \underset{\bullet}{H}^{\rho\alpha}$$

et dont la trace est $\underset{\bullet}{N}_{\alpha}{}^{\alpha} = - \underset{\bullet}{C}$.

5° Une densité vectorielle dite "de force de Lorentz"

(1.2-7) $$\underset{\bullet}{K}_{\beta} \equiv B_{\beta\rho}\, Z^{\rho} = - \frac{1}{2}\, \underset{\bullet}{E}^{\rho\sigma}\, {}^*Z_{\rho\sigma\beta} \quad .$$

Un calcul simple montre que l'on a :

(1.2-8) $$\underset{\bullet}{K}_{\beta} = \begin{cases} \underset{\bullet}{M}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{1}{4}\, (D_{\rho\sigma}\, \underset{\bullet}{E}^{\rho\sigma}{}_{,\beta} - \underset{\bullet}{E}^{\lambda\mu}\, D_{\lambda\mu,\beta}) \\ \underset{\bullet}{N}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{1}{2}\, D_{\rho\sigma}\, \underset{\bullet}{E}^{\rho\sigma}{}_{,\beta} = \underset{\bullet}{N}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{1}{2}\, \underset{\bullet}{H}^{\rho\sigma}\, B_{\rho\sigma,\beta} \end{cases} \quad .$$

6° Une quelconque équation de liaison entre les deux formes fondamentales. Nous n'aurons ici à prendre en considération que des liaisons du type suivant :

(1.2-9) $$\underset{\bullet}{E}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\, \underset{\bullet}{\gamma}^{\lambda\mu\cdot\rho\sigma}\, D_{\rho\sigma} - \underset{\bullet}{P}^{\lambda\mu}$$

où $\underset{\bullet}{\gamma}^{\lambda\mu\cdot\nu\rho}$ est une densité tensorielle (double-2-forme). Et $\underset{\bullet}{P}^{\lambda\mu}$ une densité tensorielle appelée la polarisation. De cette équation il résulte que :

(1.2-10) $$\underset{\bullet}{C} = \frac{1}{2}\, \gamma^{\lambda\mu\cdot\rho\sigma}\, D_{\lambda\mu}\, D_{\rho\sigma} - \underset{\bullet}{P}^{\alpha\beta}\, D_{\alpha\beta} \quad .$$

C'est le choix de $\gamma^{\lambda\mu\nu\rho}_{\bullet}$ qui fera sortir le schéma électromagnétique du stade affine, et qui conduira au stade bimétrique, semi-métrique ou métrique. Nous nous limiterons ici au schéma semi-métrique, tel qu'on peut le dégager de la théorie unitaire d'Einstein.

2. Schéma semi-métrique.

2.1. Variété semi-métrique. - Une telle variété admet donc en tout point un espace plat local semi-métrique, c'est-à-dire l'ensemble d'un co-espace et d'un contra-espace semi-métriques, dont les tenseurs semi-métriques sont reliés par la relation d'"einsteinicité" :

(2.1-1)
$$\underset{+}{g}_{\alpha\beta} = \underset{-}{g}_{\beta\alpha} \quad .$$

Le présent alinéa et le suivant ne seront qu'un condensé des résultats essentiels de la théorie unitaire ; mais on insistera spécialement sur les relations d'einsteinicité. La structure d'une variété semi-métrique est donnée par deux connexions "images", elles-mêmes en conjugaison einsteinique :

(2.1-2)
$$\underset{+}{L}^{\rho}{}_{\alpha\beta} = \underset{-}{L}^{\rho}{}_{\beta\alpha} \quad .$$

Ces connexions sont déterminées par les équations de champ d'Einstein :

(2.1-3)
$$\underset{\pm}{g}_{\alpha\beta;\mu} \equiv \underset{\pm}{g}_{\alpha\beta,\mu} - \underset{\pm}{g}_{\alpha\rho}\, \underset{\mp}{L}^{\rho}{}_{\beta\mu} - \underset{\pm}{g}_{\sigma\beta}\, \underset{\pm}{L}^{\sigma}{}_{\alpha\mu} = 0 \quad .$$

Les dérivées absolues $(;)$ sont ici définies de telle sorte que la relation d'einsteinicité de $g_{\alpha\beta}$ soit stable pour cette opération ; ces dérivées absolues sont ainsi "mitoyennes" en ce sens qu'elles utilisent simultanément les deux connexions-images.

Les connexions $\underset{\pm}{L}^{\rho}{}_{\alpha\beta}$ sont dépourvues de vecteur de torsion, par hypothèse ; mais les connexions-images non einsteiniques ci-après :

(2.1-4)
$$\underset{\pm}{\Gamma}^{\rho}{}_{\alpha\beta} \equiv \underset{\pm}{L}^{\rho}{}_{\alpha\beta} \mp \varkappa \delta_{\alpha}{}^{\rho}\, \varphi_{\beta}$$

où $\varkappa$ est une constante, possèdent un vecteur de torsion non nul. Non seulement elles conservent les géodésiques définies par $\underset{\pm}{L}^{\rho}{}_{(\alpha\beta)}$, mais en outre elles vérifient aussi les relations (2.1-3).

Les deux anciennes connexions $\underset{\pm}{L}$ et les deux nouvelles $\underset{\pm}{\Gamma}$ définissent des tenseurs de courbure notés $P^{\mu}{}_{\alpha\cdot\nu\beta}$ et $R^{\mu}{}_{\alpha\cdot\nu\beta}$, respectivement. Les indices supérieurs peuvent être abaissés par contraction avec $\underset{+}{g}_{\alpha\beta}$; les tenseurs ainsi obtenus

(2.1-5) $$\underset{\pm}{R}_{\lambda\alpha\cdot\nu\beta} = \underset{\pm}{P}_{\lambda\alpha\cdot\nu\beta} \pm \varkappa \underset{\pm}{g}_{\lambda\alpha} \cdot F_{\nu\beta} \,, \quad F_{\nu\beta} \equiv - 2\varphi_{[\nu,\beta]}$$

vérifient sur leurs deux premiers indices, des relations d'anti-einsteinicité" :

(2.1-6) $$\underset{\pm}{R}_{\lambda\alpha\cdot\nu\beta} + \underset{\mp}{R}_{\alpha\lambda\cdot\nu\beta} = 0 \quad .$$

Les tenseurs-images de Ricci, définis par la contraction $\binom{\mu}{\nu}$, seront donc :

(2.1-7) $$\underset{\pm}{P}_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \underset{\pm}{R}_{\alpha\beta} = \underset{\pm}{P}_{\alpha\beta} \pm \varkappa F_{\alpha\beta}$$

ils sont einsteiniquement conjugués :

(2.1-8) $$\underset{+}{P}_{\alpha\beta} = \underset{-}{P}_{\beta\alpha} \implies \underset{+}{R}_{\alpha\beta} = \underset{-}{R}_{\beta\alpha} \quad .$$

Les tenseurs mixtes correspondants s'obtiennent par relèvement au moyen de $\underset{\pm}{g}^{\lambda\mu}$ (contraction sur les seconds indices), ce qui conserve les relations d'einsteinicité ; dès lors, il n'y a qu'un seul invariant de courbure, "neutre" :

(2.1-9) $$\underset{\pm}{g}^{\alpha\beta} \underset{\pm}{R}_{\alpha\beta} = R = P + \varkappa F \;; \qquad F \equiv m^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad .$$

Il va de soi que si l'on supprime la distinction entre les (+) et les (-) , la variété devient métrique et l'on retrouve le formalisme de la relativité générale.

2.2. <u>Tenseurs conservatifs</u>. - Les identités de Bianchi conduisent aux identités :

(2.2-1) $$\underset{+}{P}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} + \underset{-}{P}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} - P_{,\alpha} = 0$$

(2.2-2) $$\underset{+}{R}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{:\beta} + \underset{-}{R}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{:\beta} - R_{,\alpha} = 0 \quad .$$

Le signe (:) représente la dérivation absolue par rapport aux nouvelles connexions $\underset{\pm}{\Gamma}$; mais pour les tenseurs mixtes, les dérivations (;)(:) conduisent au même résultat. De cette remarque et des identités ci-dessus, il résulte que :

(2.2-3) $$\underset{+}{F}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} + \underset{-}{F}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} - F_{,\alpha} = 0 \quad .$$

Tout tenseur einsteinique $\underset{+}{X}_{\alpha\beta} = \underset{-}{X}_{\beta\alpha}$, obéissant à la relation (2.2-3) sera dit "semi-métriquement conservatif". Seront donc de cette sorte :

a. les tenseurs de Ricci $\underset{\pm}{P}_{\alpha\beta}$ et $\underset{\pm}{R}_{\alpha\beta}$;

b. toute 2-forme fermée, c'est-à-dire tout rotationnel : $\underset{+}{F}_{\alpha\beta} = \underset{-}{F}_{\beta\alpha} = - \underset{+}{F}_{\beta\alpha}$;

c. le tenseur semi-métrique lui-même pour lequel (2.2-3) se réduit à l'identité $0 = 0$.

En résumé, sera donc semi-métriquement conservatif tout tenseur einsteinique de la forme :

(2.2-4) $$\underset{\pm}{X}_{\alpha\beta} \equiv \underset{\pm}{P}_{\alpha\beta} + \varkappa \underset{\pm}{F}_{\alpha\beta} - \lambda \underset{\pm}{g}_{\alpha\beta} \quad .$$

$X = \underset{\pm}{g}^{\alpha\beta} \underset{\pm}{X}_{\alpha\beta}$ étant la trace de $\underset{\pm}{X}_{\alpha\beta}$, on appellera "tenseur conjoint" le tenseur einsteinique :

(2.2-5) $$'\underset{\pm}{X}_{\alpha\beta} \equiv \underset{\pm}{X}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \underset{\pm}{g}_{\alpha\beta} X \implies 'X = - X \quad .$$

Si $\underset{\pm}{X}_{\alpha\beta}$ est semi-métriquement conservatif, on a la relation très remarquable :

(2.2-6) $$'\underset{+}{X}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} + '\underset{-}{X}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad .$$

On peut enfin introduire le tenseur mixte "neutre" :

(2.2-7) $$'X_{\alpha}{}^{\beta} \equiv \frac{1}{2} (\underset{+}{X}_{\alpha}{}^{\beta} + \underset{-}{X}_{\alpha}{}^{\beta}) - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}{}^{\beta} X$$

et vérifier que les relations de conservations s'écrivent aussi :

(2.2-8) $$'\underset{\bullet}{X}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} + \frac{1}{2} \underset{\pm}{X}_{\rho\sigma} \underset{\bullet}{g}^{\rho\sigma}{}_{,\alpha} = 0 \quad .$$

En particulier, pour tout rotationnel, comme $F_{\alpha}^{\beta} = F_{\alpha\rho} m^{\beta\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}{}^{\beta} F$ on aura :

(2.2-9) $$'\underset{\bullet}{F}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} + \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} \underset{\bullet}{m}^{\rho\sigma}{}_{,\alpha} = 0 \quad .$$

Par contre, une 2-forme ouverte $D_{\alpha\beta}$ n'est <u>jamais</u> conservative, et un calcul simple donne :

(2.2-10) $$'\underset{\bullet}{D}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} + \frac{1}{2} D_{\rho\sigma} \underset{\bullet}{m}^{\rho\sigma}{}_{,\beta} = {}^{*}m_{\alpha\nu} \, {}^{*}\underset{\bullet}{Z}^{\nu} \quad .$$

Cette dernière remarque conduit directement à un schéma électromagnétique dans une variété semi-métrique. Signalons en terminant que la relation (2.2-10) tenait compte de l'équation de champ d'Einstein :

(2.2-11) $$\underset{\bullet}{m}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \quad .$$

2.3. <u>Electromagnétisme semi-métrique</u>. - On peut donc appliquer au tenseur $\underset{\pm}{g}_{\alpha\beta}$ la relation (2.2-3), laquelle n'est alors encore une fois qu'une identité banale (relative à $\text{dét}\|g_{\alpha\beta}\|$) :

(2.3-1) $$0 = \partial_{\beta}(g_{\rho\alpha} \underset{\bullet}{g}^{\rho\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}{}^{\beta} g_{\lambda\mu} \underset{\bullet}{g}^{\lambda\mu}) + \frac{1}{2} g_{\nu\sigma} \partial_{\beta} \underset{\bullet}{g}^{\nu\sigma} \quad .$$

Introduisons maintenant une constante η et posons :

(2.3-2) $$k_{\alpha\beta} = \eta D_{\alpha\beta} \implies \underset{\bullet}{g}m^{\alpha\beta} = \eta \underset{\bullet}{E}^{\alpha\beta} \quad .$$

Cette constante se retrouvera dans tous les termes non métriques en coefficient à la première puissance si le terme est anti-symétrique, et à la seconde puissance si le terme est symétrique.

Posons maintenant : $h_\alpha{}^\beta = h_{\alpha\rho}\,\ell^{\beta\rho}$ et

(2.3-3) $${}^{\times}h_\alpha{}^\beta = h_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2}\,\delta_\alpha{}^\beta\, h$$

${}^{\times}h_\alpha{}^\beta$ est en quelque sorte le conjoint de $h_{\alpha\beta}$ <u>selon la métrique</u> $\ell_{\alpha\beta}$; puis réintroduisons le tenseur-cousin de Maxwell-Minkowski (1.2-6). D'après (2.3-1), on a :

(2.3-4) $$h + \eta^2\, C = 4$$

(2.3-5) $${}^{\times}h_\alpha{}^\beta + \eta^2\, N_\alpha{}^\beta = -\,\delta_\alpha{}^\beta \quad .$$

D'où immédiatement :

(2.3-6) $$-\underset{\bullet}{V}_\alpha \equiv -\left({}^{\times}\underset{\bullet}{h}_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} + \frac{1}{2}\, h_{\rho\sigma}\,\underset{\bullet}{\ell}^{\rho\sigma}{}_{,\alpha}\right) = \eta^2\left(\underset{\bullet}{N}_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} + \frac{1}{2}\, D_{\rho\sigma}\,\underset{\bullet}{E}^{\rho\sigma}{}_{,\alpha}\right) \equiv \eta^2\, \underset{\bullet}{K}_\alpha$$

c'est-à-dire

(2.3-7) $$\underset{\bullet}{V}_\alpha + \eta^2\, \underset{\bullet}{K}_\alpha = \underset{\bullet}{0} \quad .$$

En d'autres termes, la conservation de $g_{\alpha\beta}$ se traduit par l'équilibre de deux forces d'origine gravifique et électromagnétique respectivement, dans l'hypothèse où les grandeurs symétriques seraient en relation avec la gravitation, tandis que les grandeurs anti-symétriques décriraient le champ électromagnétique (ce qui reste à prouver, bien entendu!).

2.4. <u>Remarques diverses.</u>

1° Si $\ell_{\alpha\beta}$ est considéré comme tenseur métrique, alors on peut définir :

(2.4-1) $$M_{\alpha\beta} = \overset{\bullet}{g}\,\underset{\bullet}{M}{}_\alpha^\rho\, \ell_{\rho\beta} \quad .$$

Une vérification directe montre que ce tenseur est symétrique :

(2.4-2) $$M_{\alpha\beta} = h^{\rho\sigma}\, D_{\rho\alpha}\, D_{\sigma\beta} - \frac{1}{4}\, C\ell_{\alpha\beta} \equiv C_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\, C\ell_{\alpha\beta}$$

(2.4-3) $$C \equiv h^{\rho\sigma}\, \ell^{\alpha\beta}\, D_{\rho\alpha}\, D_{\sigma\beta} \quad .$$

Rappelons ici qu'en électromagnétisme classique, le tenseur de Maxwell-Minkowski est généralement asymétrique.

2° Si $\ell_{\alpha\beta}$ est considéré comme "vrai" tenseur métrique, on doit alors employer la densité $\underset{\times}{\ell}$, racine carrée du déterminant de ce tenseur. On définira alors $\underset{\times}{V'}_{\alpha}$ et $\underset{\times}{K'}_{\alpha}$ par des formules analogues à (2.3-6), mais où $\underset{\bullet}{g}$ aurait été remplacée par $\underset{\times}{\ell}$. En se rappelant que :

(2.4-4) $$\underset{\bullet}{g} = \underset{\bullet}{\overset{\times}{f}}\,\underset{\times}{\ell}$$

on arrive à :

(2.4-5) $$\underset{\times}{V'}_{\alpha} + \eta^2 \underset{\times}{K'}_{\alpha} + \underset{\times}{\ell}\partial_\alpha \log \overset{\times}{\underset{\bullet}{f}} = 0 \quad .$$

Donc $\overset{\times}{\underset{\bullet}{f}}$ apparaît comme un indice de fluide holonome. Il faut toutefois noter qu'en général $\underset{\times}{E}^{\rho\sigma}{}_{,\sigma}$ sera différente de zéro, et qu'ainsi la force de Lorentz contiendra un terme supplémentaire.

3° Le tenseur de torsion $S^\rho{}_{\alpha\beta}$, défini ici par :

(2.4-6) $$\underset{\pm}{L}^\rho{}_{\alpha\beta} = L^\rho{}_{(\alpha\beta)} \pm \eta S^\rho{}_{\alpha\beta}$$

est en relation avec la source $\underset{\bullet}{Z}^\alpha$ selon une formule classique de la théorie unitaire :

(2.4-7) $$^*Z_{\alpha\beta\gamma} = 3!\, S^\rho{}_{[\alpha\beta}\, h_{\gamma]\rho} \quad .$$

2.5. Interprétation physique. Signification de la constante η. – Soit $r_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci que définit le tenseur métrique $\ell_{\alpha\beta}$. La partie symétrique de $P_{\alpha\beta}$ présente la décomposition suivante :

(2.5-1) $$P_{(\alpha\beta)} = r_{\alpha\beta} - \eta^2\, t_{\alpha\beta}$$

où $t_{\alpha\beta}$ est un tenseur d'expression assez compliquée. Si la variété semi-métrique est "schrödingerienne", en ce sens que l'on a :

(2.5-2) $$\underset{\pm}{P}_{\alpha\beta} + \lambda \underset{\pm}{g}_{\alpha\beta} = 0$$

il vient :

(2.5-3) $$r_{\alpha\beta} - \eta^2\, t_{\alpha\beta} = -\lambda h_{\alpha\beta} = -\lambda \ell_{\alpha\beta} + \lambda\eta^2\, C \quad .$$

Rappelons que la constante λ, dite cosmologique, est l'inverse d'un carré de longueur : $\lambda = a^{-2}$.

Prenons alors la trace de (2.5-3) au moyen de $g^{\alpha\beta}$, c'est-à-dire, vu la symétrie de l'expression, au moyen de l'adjoint $\ell^{\alpha\beta}$ du tenseur métrique adopté. On a ainsi :

(2.5-4) $$r = \eta^2\, t - 4\lambda + \lambda\eta^2\, C \quad .$$

D'où immédiatement

(2.5-5) $$r_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} r\ell_{\alpha\beta} - \lambda\ell_{\alpha\beta} = \chi[N_{\alpha\beta} + a^2(t_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} t\ell_{\alpha\beta})]$$

avec

(2.5-6) $$\chi \equiv \lambda\eta^2 \implies \eta = \pm a\sqrt{\chi} \quad .$$

Si l'on suppose que $h_{\alpha\beta}$ et $\ell^{\alpha\beta}$ sont sans dimensions physiques, tandis que D et $E^{\alpha\beta}$ ont les dimensions d'un champ électrique, alors $N_{\alpha\beta}$ possède celles d'une densité d'énergie. Dès lors, η^2 aura les dimensions inverses de $N_{\alpha\beta}$, et χ aura celles de la constante de gravitation d'Einstein. Nous assimilerons notre χ à cette constante - ainsi que le suggère la relation (2.5-5) - et ceci fournit une interprétation remarquable de notre constante η, avec des conséquences dont nous parlerons dans un moment.

Appelons L-univers la variété métrique relativiste admettant comme métrique celle de Lichnerowicz $\ell_{\alpha\beta}$. La relation (2.5-5) traduit donc un "cas intérieur" du L-univers, et ainsi le tenseur $\chi N_{\alpha\beta} + \eta^2(\ldots)$ est L-métriquement conservatif ; en d'autres termes, la divergence absolue, selon les crochets de Christoffel associés à $\ell_{\alpha\beta}$, du tenseur-cousin de Maxwell-Minkowski - apparu dans (2.5-5) - est opposée à celle du tenseur $a^2(t_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} t\ell_{\alpha\beta})$, inconnu des théories relativistes métriques classiques. Donc, de l'une ou l'autre manière, les forces de Lorentz dans un L-univers sont équilibrées par des tensions d'origine "semi-métrique", autrement dit "unitaire".

Au tenseur $C_{\alpha\beta}$ correspond le tenseur de Maxwell-Minkowski de trace nulle ; de même, à $t_{\alpha\beta}$, nous ferons correspondre

(2.5-1.1) $$T_{\alpha\beta} \equiv t_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} t\ell_{\alpha\beta} \quad .$$

D'autre part, dans un L-univers "vide", c'est-à-dire dans le cas extérieur, on a

(2.5-1.2) $$r = r_0 \equiv -4\lambda \implies r - r_0 = \chi(C + a^2 t) \quad .$$

Ceci permet d'écrire (2.5-5) sous les formes équivalentes

(2.5-5') $$\begin{aligned} r_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} r\ell_{\alpha\beta} &\equiv {}^{\times}r_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} r\ell_{\alpha\beta} = \chi(M_{\alpha\beta} + a^2\, T_{\alpha\beta}) \\ {}^{\times}r_{\alpha\beta} - \lambda\ell_{\alpha\beta} &\equiv {}^{\times}r_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} r_0\, \ell_{\alpha\beta} = \chi[(M_{\alpha\beta} - \frac{r - r_0}{4r}\, \ell_{\alpha\beta}) + a^2\, t_{\alpha\beta}] \quad . \\ &\equiv \chi U_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Nous dirons que nous sommes dans un cas <u>quasi-métrique</u> lorsque les termes en η^2 sont négligeables ; alors, $\ell_{\alpha\beta} \cong h_{\alpha\beta}$, et $M_{\alpha\beta}$ s'identifie à un tenseur de Maxwell. Dans l'hypothèse où χ est la constante d'Einstein, la longueur a ne peut donc pas être trop grande. Les termes en a^2 étant ainsi négligés, les relations (2.5-5') s'identifient à celles proposées par EINSTEIN en 1919 dans un essai de théorie relative à la structure des particules élémentaires. EINSTEIN partait de l'hypothèse que la stabilité de ces particules était assurée grâce à un équilibre entre les forces électriques répulsives et des forces gravitationnelles attractives. C'est effectivement ce qu'on peut déduire de (2.5-5') en négligeant les termes en a^2 : la force de Lorentz est équilibrée par une pression gravitationnelle selon la relation

(2.5-1.3) $$\chi K_\alpha - r_{,\alpha} = 0 \quad .$$

On sait que pareille théorie se heurtera toujours à la grave objection que constitue l'énorme disproportion des forces électriques et gravitationnelles dans le monde des atomes et des particules élémentaires que connait la physique. Mais dans un L-univers associé à une variété semi-métrique, il n'est pas exclu a priori que cette disproportion soit compensée par le jeu des tensions unitaires que mesure $t_{\alpha\beta}$.

Enfin, on sait que les équations à terme cosmologique admettent comme solution un univers à densité constante et stationnaire d'énergie, ρc^2 , valeur de la trace U de $U_{\alpha\beta}$. Or, $U = - C$ d'après (2.5-12) ; donc

(2.5-1.4) $$D_{\alpha\beta}\, E^{\alpha\beta} = - \rho c^2 \quad .$$

Assimilons le L-univers à un univers spacialement sphérique d'Einstein. On a alors $r = - 6\lambda$, et la trace t s'annule, ceci tenant compte de la valeur de λ et de celle de η^2 qui en découle immédiatement :

(2.5-1.5) $$\lambda = \frac{4\pi\, k\rho}{c^2} = \frac{\chi}{2}\,\rho c^2 \implies \eta^2 = \frac{\chi}{\lambda} = \frac{2}{\rho c^2}$$

où k est la constante de Newton. Appelant M la masse du L-univers et V son volume, on a $\rho = M/V$, et comme (2.5-15) fait de kM un petit multiple de ac^2 , η^{-1} apparaît comme un petit multiple de $\sqrt{kM/a^2}$, ce qui est également très remarquable. Avec les ordres de grandeur 10^{-27} pour ρ et 10^{27} pour a , η serait de l'ordre de grandeur de 10^3 C. G. S.

Ces expressions physiques de η donnent un sens physique à l'einteinicité des équations du champ : celles-ci doivent être invariables pour les changements de détermination de la racine carrée de la constante de Newton ; en ce sens, la loi classique de l'attraction newtonienne possède elle aussi la propriété d'einsteinicité. Selon EINSTEIN, cette particularité - qu'il appelait la pseudo-hermiticité ou l'invariance de transposition - "corresponds, disait-il, to the requirement that positive and negative electricity enter symmetrically into the laws of physics" Il semblerait plutôt vu la présence de $\sqrt{k}$ dans η , que cette symétrie des équations correspondo à celle qui existerait entre un L-univers et un "anti-univers" dont les particules chargées, images l'une de l'autre, se correspondraient par changement de signe du rapport caractéristique $e/\sqrt{km}$. D'ailleurs, les équations de conservation (2.2-6) évoquent l'idée de forces de matière et d'anti-matière mises en équilibre.

Dans ces conditions, on peut aussi se demander si les termes anti-symétriques $P_{[\rho\sigma]}$ et $D_{\rho\sigma}$ sont bien en relation avec le champ électromagnétique, et s'ils ne correspondraient pas plutôt à une polarisation d'origine gravitationnelle. Cette polarisation pourrait néanmoins se composer avec des grandeurs électriques, ce qui serait extrêmement satisfaisant au point de vue de l'hypothèse "unitaire", qui a conduit à l'introduction des variétés semi-métriques.

2.6. Champ unitaire électrique ou mésique. – Rappelons maintenant que tout tenseur de la forme (2.2-4) est semi-métriquement conservatif. Dans une variété de Schrödinger il existe un tenseur nul de cette forme ; la nullité de sa partie anti-symétrique fournit la relation

(2.6-1) $$\varkappa F_{\alpha\beta} = \lambda\eta\, D_{\alpha\beta} - \eta P_{[\alpha\beta]} \quad .$$

Dans l'alinéa précédent nous avions implicitement supposé que $\varkappa$ était identiquement nulle. Si on donne à φ_α, potentiel de $F_{\alpha\beta}$, les dimensions d'un potentiel électrique, la constante $\varkappa$ prend les dimensions d'une charge électrique. Posons alors $\varkappa = \eta/b^2$, b ayant une longueur constante ; posons ensuite $\varepsilon = b^2/a^2$. La relation (2.6-1) prend alors la forme familière

(2.6-2) $$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\gamma_{\alpha\beta\cdot\rho\sigma}\, E^{\rho\sigma} - b^2\, P_{[\alpha\beta]} \quad .$$

Ainsi, F jouerait le rôle d'une induction (fermée), $E^{\rho\sigma}$ celui d'un champ électrique, avec ε comme constante diélectrique ; la partie antisymétrique du tenseur de Ricci apparaît donc comme une polarisation.

D'après cette dernière hypothèse, on ne peut donc plus voir dans $\underset{\bullet}{Z}^{\alpha}$, source de $D_{\alpha\beta}$, la densité de courant électrique, ainsi que nous l'avions admis sous réserve jusqu'ici. Cette grandeur est plutôt un courant de polarisation, ce qui est conforme à la relation (2.4-7) qui la relie au tenseur de torsion. D'autre part, $P_{[\alpha\beta]}$ est elle-même reliée à ce tenseur par les identités de Bianchi :

(2.6-3) $$P_{[\alpha\beta]} = - S^{\rho}{}_{\alpha\beta;\rho} \quad .$$

En résumé, l'univers semi-métrique serait le siège de polarisation d'origine gravitationnelle, ce qui, encore une fois, est assez satisfaisant comme hypothèse, vu les analogies existant entre la torsion et le spin.

Si maintenant $E^{\rho\sigma}$ ne s'interprète plus comme le dual d'une induction fermée, mais comme un champ électrique, il faudra qu'en général sa divergence soit différente de zéro. Ceci peut se faire en ajoutant un terme de source au hamiltonien ou, peut-être, d'une façon plus intéressante encore : On sait en effet que si $\underset{+}{g}^{\alpha\beta}{}_{;\rho} = 0$ est calculée au moyen d'une connexion einsteinique à vecteur de torsion $(-\varkappa S)$ non nul, on a alors l'équation de champ

(2.6-4) $$\underset{\bullet}{E}^{\rho\sigma}{}_{,\sigma} = - \frac{1}{b^2}\, \underset{\bullet}{\ell}^{\rho\tau}\, S_{\tau} \quad .$$

Cette équation est typique des champs de Yukawa en physique nucléaire ; b y représente la "portée" des forces nucléaires dues à un champ associé à une particule de masse propre non nulle. Dans le cas statique ce champ est caractérisé par un potentiel

$$\Phi = \text{Cte} \times \frac{1}{r} \times e^{-r/b} \quad . \qquad (2.6\text{-}5)$$

Or, le même potentiel se présente en relativité générale lorsqu'on introduit la constante cosmologique. Dans l'un comme dans l'autre cas, on assiste à l'action de forces de portée finie dans un univers limité.

Par ailleurs, l'équation (2.6-4) peut très bien convenir pour une théorie ondulatoire du photon, à condition d'admettre justement, pour la constante b, une valeur comparable à celle du rayon d'univers ; ceci donne au photon une masse de l'ordre de 10^{-64}, ce qui est physiquement admissible. Cette supposition donnerait à ε une valeur voisine de 1, ou même probablement égale à 1. Dès lors, $\varkappa^{-1}$ serait de l'ordre de 10^{+51}, c'est-à-dire de l'ordre de $\sqrt{kM}$; pareille grandeur possède les dimensions physiques d'une charge électrique, mais n'en a pas du tout la nature, et tout au plus pourrait-on l'appeler la "charge gravifique" de l'univers.

Toutes ces interprétations des constantes sont donc basées sur l'assimilation de notre χ à la constante d'Einstein, assimilation qui semble bien imposée par les analogies existant entre le cas extérieur de la variété semi-métrique et le cas intérieur du L-univers métrique correspondant, cette variété et cet univers se caractérisant par une constante cosmologique non nulle. Si l'on adopte le schéma mérique plutôt que le schéma électromagnétique, le champ unifié apparaît donc comme dépendant, dans le cas statique, de potentiels à portée finie, la même sans doute pour le champ gravifique et pour le champ électromagnétique.

BIBLIOGRAPHIE

Pour le chapitre I, consulter :

GROSJEAN (Pierre V.). - Les principes de la géométrie semi-métrique et leur application à la mécanique nucléaire, Bull. Soc. royale Sc. Liège, t. 31, 1962, p. 209-232 et 336-363 ;

en particulier, pour le paragraphe 2.2, voir le chapitre I de :

TONNELAT (Marie-Antoinette). - La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements. - Paris, Gauthier-Villars, 1955 (Les grands Problèmes des Sciences, 4),

et l'article suivant :

GROSJEAN (Pierre V.). - Fondements algébriques de l'analyse tensorielle et synthèse en géométrie semi-métrique de quelques travaux de l'école Lichnerowicz, Riv. Mat. Univ. Parma, 2e série, t. 1, 1960, p. 45-91.

Pour le chapitre II, consulter :

GROSJEAN (Pierre V.). - Les principes de la géométrie semi-métrique et leur application à la mécanique nucléaire, Bull. Soc. royale Sc. Liège, t. 31, 1962, p. 209-232 et 336-363 ;

en particulier, pour le paragraphe 1.2 :

COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - La théorie de la relativité restreinte. - Paris, Masson, 1949 (Collection d'Ouvrages à l'Usage des Physiciens),

et pour le paragraphe 2.1, le chapitre V de la 2e partie de :

LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens),

ainsi que :

TONNELAT (Marie-Antoinette). - La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements. - Paris, Gauthier-Villars, 1955 (Les grands Problèmes des Sciences, 4).

GROSJEAN (Pierre V.). - Les variétés semi-métriques et la théorie unitaire des champs (Thèse Sc. Math. Liège. 1958)[multigraphiée et épuisée].

Pour le paragraphe 2.5, voir le chapitre V de :

PAULI (W.). - Theory of relativity.-London, New York, Paris, Pergamon Press, 1958.

Enfin pour le paragraphe 2.6, consulter les chapitres VII et XI de :

de BROGLIE (Louis). - Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion), 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954.