August Montserrat

Aberration et effet Döppler dans l'univers de Schwarzschild

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. nº 3, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A3_0>

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
6e année, 1962/63, n° 3

15 décembre 1962

ABERRATION ET EFFET DÖPPLER DANS L'UNIVERS DE SCHWARZSCHILD

par August MONTSERRAT

On sait que l'aberration et l'effet Döppler sont deux phénomènes qui se produisent quand, entre la source lumineuse et l'observateur, existe une vitesse relative. A priori, il y a deux méthodes différentes pour étudier quantitativement ces phénomènes. La première, qui fait intervenir une source lumineuse et un seul observateur, en mouvement par rapport à elle, consiste à considérer les variations de position et de fréquence apparentes de la source, mesurées par l'observateur au long de sa trajectoire. Remarquons que ceci correspond au cas réel d'un astronome qui est en train d'observer une étoile pendant une certaine période de temps. La deuxième méthode introduit, en plus, un observateur qui est en repos par rapport à la source. On suppose que cet observateur mesure la position et la fréquence réelles de la source. La comparaison des mesures de l'observateur en repos et de l'observateur en mouvement nous fournit la grandeur des phénomènes qui nous occupent.

En mécanique classique et en relativité restreinte, on étudie très aisément ces phénomènes en employant la deuxième méthode. Tout ce qu'on a à faire c'est munir chacun des deux observateurs d'un système de coordonnées auquel il puisse rapporter ses mesures, et se donner des transformations de coordonnées permettant le passage d'un observateur à l'autre ; c'est-à-dire, les transformations de Galilée et de Lorentz respectivement.

En relativité générale, la non-existence de transformations de coordonnées analogues à celles de Lorentz a conduit les physiciens à essayer de résoudre le problème de l'aberration par la première méthode. SYNGE [5] et deux de ses collaborateurs [2] se sont occupés de cette question et ils parviennent à obtenir une formule tensorielle donnant, en chaque point de la trajectoire de l'observateur, la direction selon laquelle il doit placer son télescope pour viser toujours une étoile déterminée. Pourtant, expliciter cette formule, même dans le cas plus simple d'un univers de Schwarzschild, présente des difficultés d'ordre mathématique très élevées.

Dans cet exposé, je me propose de traiter l'aberration, en relativité générale, en suivant d'aussi près que possible la deuxième méthode.

I

Par la suite je me bornerai au cas de l'univers de Schwarzschild représenté par la métrique

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{1}{\sigma^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 - \sigma^2 c^2 dt^2$$

où

$$\sigma^2 = 1 - \frac{2km}{c^2 r}$$

k étant la constante universelle de gravitation, c la vitesse de la lumière dans le vide et m la masse du corps central (Soleil).

Rappellons que, pour notre cas, les équations différentielles des géodésiques s'écrivent :

$$(2) \qquad \frac{d^2 r}{du^2} - \frac{\mu}{r^2}\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 - r\sigma^2\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 - r\sin^2\theta\,\sigma^2\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2}\sigma^2 c^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = 0$$

$$\left(\mu = \frac{km}{c^2}\right)$$

$$(3) \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{du}\frac{d\theta}{du} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = 0$$

$$(4) \qquad \frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{du}\frac{d\varphi}{du} + 2\cot g\,\theta\,\frac{d\varphi}{du}\frac{d\theta}{du} = 0$$

$$(5) \qquad \frac{d^2 t}{du^2} + \frac{2\mu}{r^2}\frac{1}{\sigma^2}\frac{dr}{du}\frac{dt}{du} = 0$$

et qu'on a aussi

$$(6) \qquad \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 - \sigma^2 c^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = -\eta$$

u est un paramètre affin, qui nous permet de traiter à la fois les géodésiques de genre espace, de genre temps et isotropes, les valeurs de η étant -1 , $+1$ et 0 respectivement.

Si initiallement $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{du} = 0$, on a, d'après (2), $\frac{d^2\theta}{du^2} = 0$, c'est-à-dire que la géodésique reste dans ce plan, et on a constamment :

$$\frac{d\theta}{du} = 0 \quad . \tag{7}$$

Avec cette hypothèse, les équations (4) et (5) nous fournissent tout de suite les intégrales premières

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{C_1}{r^2} \tag{8}$$

$$\frac{c\ dt}{du} = \frac{C_2}{\sigma^2} \tag{9}$$

et, en tenant compte de (6), on obtient

$$\frac{dr}{du} = \sqrt{C_2^2 - \sigma^2\left(\eta + \frac{C_1^2}{r^2}\right)} \quad . \tag{10}$$

Par définition, on appellera vitesse relative d' une particule le vecteur d'espace

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \qquad (x^1 = r \ ; \ \ x^2 = \theta \ ; \ \ x^3 = \varphi \ ; \ \ x^4 = ct) \tag{11}$$

et son carré

$$v^2 = g_{\alpha\beta}\, v^\alpha\, v^\beta \quad . \tag{12}$$

Dans nos notations α , β et tout indice grec prend les valeurs 1 , 2 , 3 ; i , j et tout indice latin prend les valeurs 1 , 2 , 3 , 4 .

Pour une ligne du genre temps on a

$$- ds^2 = g_{\alpha\alpha}(dx^\alpha)^2 + g_{44}(dx^4)^2$$

en divisant par dx^4 et en tenant compte des définitions (11) et (12), on obtient

(13) $$\frac{c\ dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2km}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{1}{\Omega} \quad .$$

Considérons la Terre comme étant une particule d'épreuve décrivant une géodésique contenue dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$. Supposons, en plus, que cette géodésique soit "circulaire" ; c'est-à-dire qu'on a constamment $r = a = Cte$. Le quadri-vecteur vitesse unitaire $(V^i = \frac{dx^i}{ds})$ en un point quelconque de cette géodésique est

(14) $$V^i \begin{cases} \frac{dr}{ds} = 0 \\ \frac{d\theta}{ds} = 0 \\ \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\omega}{c}\frac{1}{\Omega} & (\omega = \frac{d\varphi}{dt}) \\ \frac{c\ dt}{ds} = \frac{1}{\Omega} & (\Omega = \sqrt{1 - \frac{2km}{c^2 a} - \frac{v^2}{c^2}}) \end{cases} \quad .$$

De (12) et (14) on déduit

(15) $$v^2 = a^2\ \omega^2$$

et de (2), (14) et (15) il vient

(16) $$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\mu}{a} \quad .$$

On a donc le mouvement de la Terre bien déterminé.

II

Supposons maintenant l'existence d'un observateur lié à la Terre. Nous devons lui assigner un système de référence auquel il puisse rapporter toutes ses mesures. Nous choisirons ce système de référence comme étant le repère constitué par le quadrivecteur vitesse unitaire V^i et par trois quadrivecteurs orientés vers l'espace, unitaires, orthogonaux entre eux et orthogonaux à V^i. On exigera, en plus, que ce repère se déplace par parallélisme le long de la géodésique circulaire. Nous noterons par $\lambda^i_{(j)}$ ce repère orthonormé, les indices entre parenthèses caractérisant les vecteurs, les autres indices désignant les composantes de chaque vecteur. Les équations du transport parallèle pour les vecteurs de ce repère s'écrivent :

$$\frac{d\lambda^1_{(j)}}{d\varphi} - a\sigma^2 \lambda^3_{(j)} + \frac{\mu}{a}\frac{c}{v}\sigma^2 \lambda^4_{(j)} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{d\lambda^2_{(j)}}{d\varphi} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{d\lambda^3_{(j)}}{d\varphi} + \frac{1}{a}\lambda^1_{(j)} = 0 \qquad \left(\sigma = \sqrt{1 - \frac{2km}{c^2 a}}\right) \tag{19}$$

$$\frac{d\lambda^4_{(j)}}{d\varphi} + \frac{\mu}{a}\frac{c}{v}\frac{1}{\sigma^2}\lambda^1_{(j)} = 0 \tag{20}$$

L'intégration de (18) donne :

$$\lambda^2_{(j)} = c_j \tag{21}$$

Pour intégrer les trois autres équations on peut dériver (17) par rapport à φ et substituer les valeurs de $\frac{d\lambda^3_{(j)}}{d\varphi}$ et $\frac{d\lambda^4_{(j)}}{d\varphi}$ obtenues de (19) et (20). On trouve, compte tenu de (16),

$$\frac{d^2 \lambda^1_{(j)}}{d\varphi^2} + \Omega^2 \lambda^1_{(j)} = 0 \tag{22}$$

dont l'intégrale générale est de la forme

$$\lambda^1_{(j)} = A_j \cos \Omega\varphi + B_j \sin \Omega\varphi \quad . \tag{23}$$

En substituant (23) dans (19) et en intégrant, on trouve

$$\lambda^3_{(j)} = \frac{A_j}{a}\frac{1}{\Omega} \sin \Omega\varphi + \frac{B_j}{a}\frac{1}{\Omega} \cos \Omega\varphi + D_j \tag{24}$$

et (17) donne alors

$$\lambda^4_{(j)} = -\frac{v}{c}\frac{A_j}{\Omega\sigma^2} \sin \Omega\varphi + \frac{v}{c}\frac{B_j}{\Omega\sigma^2} \cos \Omega\varphi + \frac{a^2}{\mu}\frac{v}{c} D_j \quad . \tag{25}$$

Nous prendrons comme valeurs initiales de $\lambda^i_{(j)}$ au point $(a , \frac{\pi}{2} , 0 , t_0)$ les suivants

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(1)} &= \sigma \\ \lambda^2_{(1)} &= 0 \\ \lambda^3_{(1)} &= 0 \\ \lambda^4_{(1)} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(2)} &= 0 \\ \lambda^2_{(2)} &= \frac{1}{a} \\ \lambda^3_{(2)} &= 0 \\ \lambda^4_{(2)} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(3)} &= 0 \\ \lambda^2_{(3)} &= 0 \\ \lambda^3_{(3)} &= \frac{\sigma}{a\Omega} \\ \lambda^4_{(3)} &= \frac{v}{c}\frac{1}{\sigma\Omega} \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(4)} &= 0 \\ \lambda^2_{(4)} &= 0 \\ \lambda^3_{(4)} &= \frac{1}{a}\frac{v}{c}\frac{1}{\Omega} \\ \lambda^4_{(4)} &= \frac{1}{\Omega} \end{aligned}\right. \quad . \tag{26}$$

Ces valeurs sont tout à fait compatibles, si $a \neq 3\mu$, et reviennent à dire qu'au moment initial $\lambda^i_{(1)}$ et $\lambda^i_{(2)}$ sont dirigés vers les directions r et θ respectivement. On peut trouver alors les valeurs des constantes d'intégration A_j , B_j , C_j , D_j . Les vecteurs $\lambda^i_{(j)}$ de notre repère, en un point $(a , \frac{\pi}{2} , \varphi , t)$, ont l'expression suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(1)} &= \sigma \cos \Omega\varphi \\ \lambda^2_{(1)} &= 0 \\ \lambda^3_{(1)} &= -\frac{1}{a}\frac{\sigma}{\Omega} \sin \Omega\varphi \\ \lambda^4_{(1)} &= -\frac{v}{c}\frac{1}{\sigma\Omega} \sin \Omega\varphi \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(2)} &= 0 \\ \lambda^2_{(2)} &= \frac{1}{a} \\ \lambda^3_{(2)} &= 0 \\ \lambda^4_{(2)} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(3)} &= \sigma \sin \Omega\varphi \\ \lambda^2_{(3)} &= 0 \\ \lambda^3_{(3)} &= \frac{1}{a}\frac{\sigma}{\Omega} \cos \Omega\varphi \\ \lambda^4_{(3)} &= \frac{v}{c}\frac{1}{\sigma\Omega} \cos \Omega\varphi \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \lambda^1_{(4)} &= 0 \\ \lambda^2_{(4)} &= 0 \\ \lambda^3_{(4)} &= \frac{1}{a}\frac{v}{c}\frac{1}{\Omega} \\ \lambda^4_{(4)} &= \frac{1}{\Omega} \end{aligned}\right. \quad . \tag{27}$$

On voit que les vecteurs $\vec{\lambda}_{(1)}$ et $\vec{\lambda}_{(3)}$ subissent un changement séculaire de direction au fur et à mesure des différentes révolutions autour du Soleil. C'est la précession géodésique ou l'effet de Sitter-Fokker. Cette précession est due au couple exercé par le corps central sur le système de référence inertial d'un corps se déplaçant autour du centre [4].

Jusqu'ici nous avons étudié la détermination du système de référence "physique" de l'observateur en mouvement. Il nous faut maintenant définir un observateur en repos par rapport aux étoiles fixes.

Les lignes de temps (lignes x^4 variables) de l'univers de Schwarzschild peuvent être considérées comme lignes d'univers d'observateurs en repos par rapport au Soleil et aux étoiles fixes. Le transport de Fermi au long d'une de ces lignes conserve les directions coordonnées ; autrement dit, un observateur qui a pour ligne d'univers une ligne de temps voit toujours les étoiles fixes selon les mêmes directions et pour lui il n'y a pas d'aberration.

Par chaque point de la ligne géodésique décrite par la Terre passe une ligne de temps. D'après ce que nous venons de dire, on peut considérer en chaque point de la trajectoire terrestre l'existence de deux observateurs : l'un en mouvement par rapport à la source, qui est lié à la Terre, et l'autre en repos par rapport à la source.

Il nous reste maintenant à définir un système de référence "physique" pour chaque observateur en repos. Remarquons qu'en mécanique classique et en relativité restreinte on peut obtenir, en un certain sens, le système de coordonnées de l'observateur en repos à partir de celui de l'observateur en mouvement en faisant $v = 0$. Pour notre cas, on agira de la même façon, c'est-à-dire, on déduira le repère de l'observateur en repos au point $(a , \frac{\pi}{2} , \varphi , t)$ en faisant $v = 0$ dans (27). On a alors

$$(28) \quad \left\{\begin{aligned} \gamma^1_{(1)} &= \sigma \cos \sigma\varphi \\ \gamma^2_{(1)} &= 0 \\ \gamma^3_{(1)} &= -\frac{1}{a} \sin \sigma\varphi \\ \gamma^4_{(1)} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma^1_{(2)} &= 0 \\ \gamma^2_{(2)} &= \frac{1}{a} \\ \gamma^3_{(2)} &= 0 \\ \gamma^4_{(2)} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma^1_{(3)} &= \sigma \sin \sigma\varphi \\ \gamma^2_{(3)} &= 0 \\ \gamma^3_{(3)} &= \frac{1}{a} \cos \sigma\varphi \\ \gamma^4_{(3)} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma^1_{(4)} &= 0 \\ \gamma^2_{(4)} &= 0 \\ \gamma^3_{(4)} &= 0 \\ \gamma^4_{(4)} &= \frac{1}{\sigma} \end{aligned}\right. .$$

Ces quatre vecteurs sont orthonormés et $\vec{\gamma}_{(4)}$ est tangent à la ligne de temps correspondante. On s'aperçoit que $\vec{\gamma}_{(1)}$ et $\vec{\gamma}_{(3)}$ ont encore une certaine précession. C'est la précession de Sitter-Fokker moins la précession de Thomas de la relativité restreinte [6] et elle est due purement au champ de gravitation. Comme on n'est pas intéressé à étudier ces effets on prendra désormais comme systèmes de référence les suivants :

$$(29)\quad \begin{cases} \gamma^1_{(1)} = \sigma \cos \varphi \\ \gamma^2_{(1)} = 0 \\ \gamma^3_{(1)} = -\frac{1}{a} \sin \varphi \\ \gamma^4_{(1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^1_{(2)} = 0 \\ \gamma^2_{(2)} = \frac{1}{a} \\ \gamma^3_{(2)} = 0 \\ \gamma^4_{(2)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^1_{(3)} = \sigma \sin \varphi \\ \gamma^2_{(3)} = 0 \\ \gamma^3_{(3)} = \frac{1}{a} \cos \varphi \\ \gamma^4_{(3)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^1_{(4)} = 0 \\ \gamma^2_{(4)} = 0 \\ \gamma^3_{(4)} = 0 \\ \gamma^4_{(4)} = \frac{1}{\sigma} \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} \lambda^1_{(1)} = \sigma \cos \varphi \\ \lambda^2_{(1)} = 0 \\ \lambda^3_{(1)} = -\frac{1}{a}\frac{\sigma}{\Omega} \sin \varphi \\ \lambda^4_{(1)} = -\frac{v}{c}\frac{1}{\sigma\Omega} \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^1_{(2)} = 0 \\ \lambda^2_{(2)} = \frac{1}{a} \\ \lambda^3_{(2)} = 0 \\ \lambda^4_{(2)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^1_{(3)} = \sigma \sin \varphi \\ \lambda^2_{(3)} = 0 \\ \lambda^3_{(3)} = \frac{1}{a}\frac{\sigma}{\Omega} \cos \varphi \\ \lambda^4_{(3)} = \frac{v}{c}\frac{1}{\sigma\Omega} \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^1_{(4)} = 0 \\ \lambda^2_{(4)} = 0 \\ \lambda^3_{(4)} = \frac{1}{a}\frac{v}{c}\frac{1}{\Omega} \\ \lambda^4_{(4)} = \frac{1}{\Omega} \end{cases} .$$

III

Nous avons déjà tous les éléments nécessaires pour aborder le problème de l'aberration. Supposons d'abord que tous les observateurs en repos ont leurs télescopes dirigés selon leurs axes $\vec{\gamma}_{(1)}$ et calculons la direction selon laquelle l'observateur en mouvement doit placer son télescope pour viser, en chaque point, la même étoile que l'observateur en repos.

Le vecteur isotrope correspondant a la direction $\vec{\gamma}_{(1)}$, c'est-à-dire, le vecteur isotrope ayant la même projection d'espace, dans l'espace associé à $\vec{\gamma}_{(4)}$, que le vecteur $\vec{\gamma}_{(1)}$ est :

$$\vec{U}\begin{cases} U^1 = \nu\sigma\cos\varphi \\ U^2 = 0 \\ U^3 = -\dfrac{\nu}{a}\sin\varphi \\ U^4 = \dfrac{\nu}{\sigma} \end{cases} \tag{31}$$

où ν est la fréquence des ondes émises par l'étoile mesurée selon son temps propre. Projetons ce vecteur sur le repère $\gamma^i_{(j)}$:

$$A_{(1)} = U_i\,\gamma^i_{(1)} = \nu \tag{32}$$

$$A_{(2)} = U_i\,\gamma^i_{(2)} = 0 \tag{33}$$

$$A_{(3)} = U_i\,\gamma^i_{(3)} = 0 \tag{34}$$

$$A_{(4)} = U_i\,\gamma^i_{(4)} = -\nu \quad . \tag{35}$$

Les cosinus directeurs du télescope par rapport à $\gamma^i_{(j)}$ sont :

$$\cos\alpha \equiv \ell_{(1)} = \frac{A_{(1)}}{A_{(4)}} = -1 \tag{36}$$

$$\ell_{(2)} = \frac{A_{(2)}}{A_{(4)}} = 0 \tag{37}$$

$$\sin\alpha \equiv \ell_{(3)} = \frac{A_{(3)}}{A_{(4)}} = 0 \quad . \tag{38}$$

La projection de U^i sur $\lambda^i_{(j)}$ donne :

$$B_{(1)} = U_i\,\lambda^i_{(1)} = \nu\cos^2\varphi + \nu\frac{\sigma}{\Omega}\sin^2\varphi + \nu\frac{v}{c}\frac{1}{\Omega}\sin\varphi \tag{39}$$

(40) $$B_{(2)} = U_i \lambda^i_{(2)} = 0$$

(41) $$B_{(3)} = U_i \lambda^i_{(3)} = \nu \sin\varphi \cos\varphi - \nu \frac{\sigma}{\Omega} \sin\varphi \cos\varphi - \nu \frac{v}{c} \frac{1}{\Omega} \cos\varphi$$

(42) $$B_{(4)} = U_i \lambda^i_{(4)} = - \nu \frac{v}{c} \frac{1}{\Omega} \sin\varphi - \nu \frac{\sigma}{\Omega}$$

et les cosinus directeurs sont dans ce cas :

(43) $$\cos\alpha' \equiv \ell'_{(1)} = \frac{B_{(1)}}{B_{(4)}} = - \frac{\Omega \cos^2\varphi + \sigma \sin^2\varphi + \frac{v}{c} \sin\varphi}{\frac{v}{c} \sin\varphi + \sigma}$$

(44) $$\ell'_{(2)} = \frac{B_{(2)}}{B_{(4)}} = 0$$

(45) $$\sin\alpha' \equiv \ell'_{(3)} = \frac{B_{(3)}}{B_{(4)}} = - \frac{(\Omega - \sigma) \sin\varphi \cos\varphi - \cos\varphi \frac{v}{c}}{\frac{v}{c} \sin\varphi + \sigma} .$$

D'après (36), (38), (43) et (45) on a

(46) $$\mathrm{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{(\Omega - \sigma) \sin\varphi \cos\varphi - \frac{v}{c} \cos\varphi}{\Omega \cos^2\varphi + \sigma \sin^2\varphi + \frac{v}{c} \sin\varphi}$$

où $(\alpha' - \alpha)$ est l'angle d'aberration au point $(a , \frac{\pi}{2} , \varphi , t)$. La constante de l'aberration vient de (46) pour $\varphi = 0$:

(47) $$K = \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2km}{c^2 a} - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Si on suppose $\Omega \simeq \sigma \simeq 1$, l'équation (46) devient la formule classique de l'aberration

$$\mathrm{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{- v/c \cos\varphi}{1 + v/c \sin\varphi} .$$

On doit, toutefois, tenir compte qu'ici l'étoile reste fixe et c'est la vitesse de l'observateur qui change de direction.

De la comparaison de (35) et (42) on déduit

$$(48) \qquad \nu' = \frac{\nu}{\Omega}\left(\sigma + \frac{v}{c}\sin\varphi\right) \qquad (\nu' \equiv B_{(4)}) \quad .$$

Si on suppose l'espace plat, $(k = 0)$, l'équation précédente devient l'expression de l'effet Döppler donné par la relativité restreinte.

Remarquons qu'on aurait pu considérer, au lieu des définitions (11) et (12), la définition de vitesse relative standard donnée par CATTANEO [1] :

$$v^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{dT}$$

où

$$dT = -\frac{1}{c}\,\gamma_i\,dx^i \qquad \left(\gamma_i = \frac{g_{i4}}{\sqrt{-g_{44}}}\right) \quad .$$

Les formules (46) et (48) s'écrivent alors :

$$(49) \qquad \mathrm{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{(\delta - 1)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\delta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \frac{v}{c}\sin\varphi} \qquad \left(\delta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$(50) \qquad \nu' = \frac{\nu}{\delta}\left(1 + \frac{v}{c}\sin\varphi\right) \quad .$$

IV

Les formules de l'aberration et de l'effet Döppler qu'on vient d'obtenir ont été calculées en supposant que tous les observateurs en repos avaient leurs télescopes dirigés selon leurs axes $\vec{\gamma}_{(1)}$. Etant donné que l'espace-temps est courbe on peut se demander si tous ces observateurs sont en train de regarder la même étoile. Pour répondre à cette question, signalons d'abord que deux directions coordonnées peuvent être considérées comme étant la même si les deux géodésiques isotropes correspondantes coupent, à l'infini, une même ligne de temps.

Intégrons les équations des géodésiques isotropes. De (8) et (10) il vient (maintenant $\eta = 0$)

(51) $$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{C_2^2}{C_1^2} - (1 - 2\mu\rho)\,\rho^2} \qquad (\rho = \frac{1}{r})$$

et son intégration donne ([3], p. 353)

(52) $$\varphi_\infty - \varphi = \text{arc sin}\,\frac{C_1}{C_2}\frac{\sigma}{r} + 2\mu\,\frac{C_2}{C_1} - 2\mu\,\frac{C_2}{C_1}\sqrt{1 - \frac{C_1^2\,\sigma^2}{C_2^2\,r^2}}$$

où φ_∞ est la valeur de φ pour $r \to \infty$.

La comparaison de (8) et (9) avec (31) nous fournit les valeurs des constantes C_1 et C_2 pour notre cas, au point $(a\ ,\frac{\pi}{2}\ ,\varphi\ ,t)$:

(53) $$C_1 = -\nu a \sin\varphi$$

(54) $$C_2 = \nu\sigma$$

et (52) donne alors

(55) $$\varphi_\infty \simeq -\frac{2\mu}{a}\sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}} \qquad .$$

On voit bien que φ_∞ dépend de φ ; pour $\varphi = 0$ on a $\varphi_\infty = 0$, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on a $\varphi_\infty = -\frac{2\mu}{a}$. Le cas $\varphi = \pi$ n'a pas de sens physique. La déviation maximum vient pour $\sin\varphi \simeq \frac{r_0}{a}$ (r_0 étant le rayon du Soleil) et on a alors $\varphi_\infty \cong -\frac{4\mu}{r_0}$, c'est-à-dire on retrouve la valeur de la déflexion de la relativité générale. On voit donc que, pour le cas qui nous occupe, tous les observateurs en repos visent la même étoile au phénomène de la déflexion près.

V

Si on veut étudier l'aberration et l'effet Döppler d'une étoile quelconque en un point quelconque de l'orbite terrestre, on doit faire les raisonnements suivants :

a. On détermine l'équation de la géodésique isotrope unissant la ligne de temps de l'étoile qu'on veut étudier avec le point P_0 $(a, \frac{\pi}{2}, \varphi_0, t_0)$, où se trouve l'observateur. Soit $\chi^i = \chi^i(a)$ l'équation de cette géodésique isotrope.

b. On calcule le vecteur isotrope tangent à la géodésique au point P_0. Soit ce vecteur

$$(56) \qquad \vec{U} \begin{cases} U^1 = \nu_0 (\frac{dr}{du})_{P_0} = \nu_0 \sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \\ U^2 = \nu_0 (\frac{d\theta}{du})_{P_0} = 0 \\ U^3 = \nu_0 (\frac{d\varphi}{du})_{P_0} = \nu_0 \frac{C_1}{a^2} \\ U^4 = \nu_0 (\frac{c\, dt}{du})_{P_0} = \nu_0 \frac{C_2}{\sigma^2} \end{cases}$$

où C_1 et C_2 dépendent du point P_0 et de l'étoile qu'on considère. Ici on a supposé l'étoile sur l'écliptique pour simplifier les calculs, mais nos raisonnements sont aussi valables pour le cas général. ν_0 est la fréquence des ondes lumineuses émises par l'étoile mesurée selon son temps propre.

c. On projette U^i sur le repère $\gamma^i_{(j)}$:

$$(57) \qquad A_{(1)} = U_i \gamma^i_{(1)} = \frac{\nu_0}{\sigma} \sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \cos \varphi_0 - \nu_0 \frac{C_1}{a} \sin \varphi_0$$

$$(58) \qquad A_{(2)} = U_i \gamma^i_{(2)} = 0$$

$$(59) \qquad A_{(3)} = U_i \gamma^i_{(3)} = \frac{\nu_0}{\sigma} \sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \sin \varphi_0 + \nu_0 \frac{C_1}{a} \cos \varphi_0$$

$$(60) \qquad A_{(4)} = U_i \gamma^i_{(4)} = - \nu_0 \frac{C_2}{\sigma}$$

et on calcule les cosinus directeurs du télescope par rapport à $\gamma^{i}_{(j)}$ comme on l'a fait auparavant. Après calcul, on trouve :

$$\text{(61)} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \sin \varphi_0 + \frac{\sigma C_1}{a} \cos \varphi_0}{\sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \cos \varphi_0 - \frac{\sigma C_1}{a} \sin \varphi_0} \; .$$

d. On projette U^{i} sur le repère $\lambda^{i}_{(j)}$:

$$\text{(62)} \quad B_{(1)} = U_i \, \lambda^{i}_{(1)} = \frac{\nu_0}{\sigma} \sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \cos \varphi_0 - \nu_0 \frac{\sigma}{\Omega} \frac{C_1}{a} \sin \varphi_0 + \nu_0 \frac{C_2}{\sigma\Omega} \frac{v}{c} \sin \varphi_0$$

$$\text{(63)} \quad B_{(2)} = U_i \, \lambda^{i}_{(2)} = 0$$

$$\text{(64)} \quad B_{(3)} = U_i \, \lambda^{i}_{(3)} = \frac{\nu_0}{\sigma} \sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \sin \varphi_0 + \nu_0 \frac{\sigma}{\Omega} \frac{C_1}{a} \cos \varphi_0 - \nu_0 \frac{C_2}{\sigma\Omega} \frac{v}{c} \cos \nu_0$$

$$\text{(65)} \quad B_{(4)} = U_i \, \lambda^{i}_{(4)} = - \nu_0 \frac{C_2}{\Omega} + \nu_0 \frac{v}{c} \frac{C_1}{a} \frac{1}{\Omega}$$

et après calcul des cosinus directeurs, on obtient :

$$\text{(66)} \qquad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Omega \sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \sin \varphi_0 + \sigma^2 \frac{C_1}{a} \cos \varphi_0 - C_2 \frac{v}{c} \cos \varphi_0}{\Omega \sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \cos \varphi_0 - \sigma^2 \frac{C_1}{a} \sin \varphi_0 + C_2 \frac{v}{c} \sin \varphi_0} \; .$$

On en déduit la formule pour l'aberration à partir de (61) et (66)

$$\text{(67)} \qquad \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\sqrt{1 - D^2 \frac{\sigma^2}{a^2}} \left(- \Omega \frac{\sigma}{a} + \frac{\sigma^2}{a} - \frac{1}{D} \frac{v}{c}\right)}{\Omega\left(\frac{1}{D} - D \frac{\sigma^2}{a^2}\right) + D \frac{\sigma^3}{a^2} - \frac{\sigma}{a} \frac{v}{c}} \qquad \left(D = \frac{C_1}{C_2}\right)$$

Si on appelle $A_{(4)} \equiv \nu$ et $B_{(4)} \equiv \nu'$ les fréquences mesurées par l'observateur en repos et en mouvement respectivement, la comparaison de (60) et (65) fournit la formule de l'effet Döppler :

$$\nu' = \frac{\nu}{\Omega}\left(\sigma - \frac{\sigma}{a}\frac{v}{c}D\right) \qquad \left(D = \frac{C_1}{C_2}\right) \quad . \tag{68}$$

Evidemment si on substitue les valeurs de C_1 et C_2 données par (53) et (54) dans les formules (67) et (68), on retrouve les expressions (46) et (48).

VI

Soient C la ligne géodésique décrite par la Terre et P un événement quelconque dans l'espace-temps. Considérons la géodésique isotrope qui passe par P et coupe C, et appelons P_0 ce point d'intersection. On peut définir un paramètre affin u sur la géodésique isotrope tel qu'au point P_0 soit $u = 0$ et au point P soit $u = \rho$. Si, pour simplifier les calculs, on considère le point P contenu dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, le vecteur tangent en P_0 à la géodésique isotrope sera de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
U^1 &= \left(\frac{dr}{du}\right)_{P_0} = \sqrt{C_2^2 - \sigma^2\frac{C_1^2}{a^2}} \\
U^2 &= \left(\frac{d\theta}{du}\right)_{P_0} = 0 \\
U^3 &= \left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{P_0} = \frac{C_1}{a^2} \\
U^4 &= \left(\frac{c\,dt}{du}\right)_{P_0} = \frac{C_2}{\sigma^2}
\end{aligned}\right. \tag{69}$$

où C_1 et C_2 dépendent maintenant de P_0 et P .

Au point P_0 on peut considérer l'existence de deux observateurs : l'un en repos par rapport au Soleil et muni du repère $\gamma^i_{(j)}$, l'autre lié à la Terre et muni du repère $\lambda^i_{(j)}$.

Appelons par définition

$$X^{(\alpha)} = X_{(\alpha)} = \rho g_{ij}\,\gamma^i_{(\alpha)}\left(\frac{dx^j}{du}\right)_{P_0} \tag{70}$$

$$X^{(4)} = - X_{(4)} = \rho g_{ij} \gamma^i_{(4)} \left(\frac{dx^j}{du}\right)_{P_0} \tag{71}$$

les coordonnées de P par rapport à l'observateur en repos. On a :

$$\left\{\begin{aligned} X_{(1)} &= \rho \frac{1}{\sigma}\sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \cos \varphi - \rho \frac{C_1}{a} \sin \varphi \\ X_{(2)} &= 0 \\ X_{(3)} &= \rho \frac{1}{\sigma}\sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \sin \varphi + \rho \frac{C_1}{a} \cos \varphi \\ X_{(4)} &= \rho \frac{C_2}{\sigma} \end{aligned}\right. \tag{72}$$

Les coordonnées de P par rapport à l'observateur en mouvement sont

$$X'^{(\alpha)} = X'_{(\alpha)} = \rho g_{ij} \lambda^i_{(\alpha)} \left(\frac{dx^j}{du}\right)_{P_0} \tag{73}$$

$$X'^{(4)} = - X'_{(4)} = \rho g_{ij} \lambda^i_{(4)} \left(\frac{dx^j}{du}\right)_{P_0} \tag{74}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} X'_{(1)} &= \rho \frac{1}{\sigma}\sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \cos \varphi - \rho \frac{\sigma}{\Omega} \frac{C_1}{a} \sin \varphi + \rho \frac{C_2}{\sigma\Omega} \frac{v}{c} \sin \varphi \\ X'_{(2)} &= 0 \\ X'_{(3)} &= \rho \frac{1}{\sigma}\sqrt{C_2^2 - \sigma^2 \frac{C_1^2}{a^2}} \sin \varphi + \rho \frac{\sigma}{\Omega} \frac{C_1}{a} \cos \varphi - \rho \frac{C_2}{\sigma\Omega} \frac{v}{c} \cos \varphi \\ X'_{(4)} &= \rho \frac{C_2}{\Omega} - \rho \frac{v}{c} \frac{C_1}{a} \frac{1}{\Omega} \end{aligned} \tag{75}$$

La comparaison de (72) et (75) pour $\varphi = 0$ nous donne

$$X'_{(1)} = X_{(1)} \qquad X'_{(3)} = \frac{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}}\,X_{(3)} - \frac{v}{c}X_{(4)}}{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(76)

$$X'_{(2)} = X_{(2)} \qquad X'_{(4)} = \frac{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}}\,X_{(4)} - \frac{v}{c}X_{(3)}}{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}-\frac{v^2}{c^2}}}$$

et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$X'_{(1)} = \frac{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}}\,X_{(1)} + \frac{v}{c}X_{(4)}}{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad X'_{(3)} = X_{(3)}$$

(77)

$$X'_{(2)} = X_{(2)} \qquad X'_{(4)} = \frac{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}}\,X_{(4)} + \frac{v}{c}X_{(1)}}{\sqrt{1-\frac{2\mu}{a}-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .$$

On voit que ces trandformations de coordonnées se réduisent à celles de Lorentz de la relativité restreinte quand on suppose l'espace plat $(k = 0)$.

VII

En théorie classique et en relativité restreinte, quand on dit qu'une étoile fixe E ne présente pas d'aberration ni d'effet Döppler par rapport à un certain observateur O (pendant une certaine période de temps $t_1 - t_0$) on présuppose deux choses :

1° L'observateur O voit E selon sa position réelle (pendant $t_1 - t_0$)..

2° L'observateur O est en repos par rapport à E (pendant $t_1 - t_0$).

Un observateur O' , en mouvement par rapport à E , mesure (à l'instant t_2 , $t_1 \geqslant t_2 \geqslant t_0$) une position de cette étoile fixe qu'on appelle position apparente. On appelle Aberration de E par rapport à O' (à l'instant t_2) la différence entre la position de E mesurée par O et la position de E mesurée par O' , et on dit que ce phénomène est dû uniquement à la vitesse relative entre E et O' .

En relativité générale si on veut continuer à nommer Aberration le même phénomène qu'auparavant, on devrait en donner la définition suivante :

L'aberration d'une étoile fixe E , par rapport à un observateur O' (en mouvement par rapport à E), est la différence entre les positions de E mesurées par O' et par un observateur en repos par rapport à E , placé au même point que O' .

On nomme alors Déflexion des rayons lumineux la différence entre la position réelle de E et la position de E mesurée par un observateur en repos par rapport à E .

La déflexion de la lumière est un phénomène dû, exclusivement, au champ de gravitation et on pourrait même dire qu'un observateur (muni d'un télescope) pourrait mesurer l'intensité du champ de gravitation en se plaçant en différents points de ce champ (en repos par rapport aux étoiles fixes) et en considérant les variations de direction qu'il doit donner à son télescope pour pouvoir viser de tous ces points une étoile fixe déterminée.

A mon avis, il ne faut donc pas que tous les observateurs en repos (placés au long de la trajectoire terrestre et dont je vous ai parrlé) aient leurs systèmes de référence "physiques" orientés de façon à ce qu'ils visent tous la même étoile lorsque leurs télescopes sont dirigés selon leurs axes $\vec{\gamma}_{(1)}$. Au contraire, je pense que les systèmes de référence "physiques" des observateurs en repos (par rapport aux étoiles fixes) doivent être tels qu'ils permettent d'observer la déflexion de la lumière (lorsqu'on compare les mesures effectuées par des observateurs en repos placés en différents points de l'orbite terrestre).

En tous cas, nous avons traité l'aberration en suivant la définition donnée plus haut, et les systèmes de référence "physiques" que nous avons assignés aux observateurs en repos satisfont la condition précédente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CATTANEO (C.). - General relativity, Relative standard mass, momentum, energy and gravitational field in a general system of reference, Nuovo Cimento, 10e série, t. 10, 1958, p. 318-337.

[2] MAST (C. B.) and STRATHDEE (J.). - On the relativistic interpretation of astronomical observation, Proc. Royal Soc. London, Series A, t. 252, 1959, p. 476-487.

[3] MØLLER (C.). - The theory of relativity, 2nd edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1960.

[4] PIRANI (F. A. E.). - On the physical significance of the Riemann tensor, Acta phys. Polon., t. 15, 1956, p. 389-405.

[5] SYNGE (J. L.). - Relativity, the general theory. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1960.

[6] THOMAS (L, H.). - The kinematics of an electron with an axis, Phil. Mag., t. 3, 1927, p. 1-22.