Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Marie-Antoinette Tonnelat

Théories euclidiennes de la gravitation et vérifications expérimentales

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 10, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A9_0>

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
5e année, 1961/62, n° 10

24 février 1962

THÉORIES EUCLIDIENNES DE LA GRAVITATION ET VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

par Mme Marie-Antoinette TONNELAT

1. Théories de la gravitation. Principe d'équivalence et représentations non-euclidiennes.

On dit souvent que la Relativité générale est basée sur le principe d'équivalence, - ce qui est indéniable. On ajoute que deux au moins des trois tests classiques (le décalage vers le rouge et la déviation des rayons lumineux dans un champ de gravitation) constituent une "preuve" du principe d'équivalence mais ne peuvent néanmoins témoigner de la validité de la Relativité générale en tant que théorie non-euclidienne du champ de gravitation.

Une opinion de ce genre est, notamment, reprise par L. SCHIFF [1]. Elle est diffusée par de nombreux expérimentateurs à propos de la portée des vérifications par effet Mössbauer. Or il est impossible d'argumenter raisonnablement sur les théories de la gravitation - fussent-elles archaïques - dans l'espace plat sans discuter en quelques mots cette opinion.

Elle suppose une illusoire construction à trois étages (forces d'inertie dans l'espace euclidien, forces de gravitation issues de structures non-euclidiennes, les deux types de forces unies par le principe d'équivalence), et cette illusion a probablement des racines historiques :

On sait qu'EINSTEIN, bien avant l'édification de la Relativité générale, parvint à prévoir correctement le décalage gravitationnel en utilisant le seul Principe d'équivalence. On oublie que le raisonnement d'EINSTEIN, purement heuristique, s'appliquait très mal aux mouvements accélérés. C'est pourquoi EINSTEIN, conscient de ces difficultés, devait chercher à formuler un Principe de Relativité généralisé et se trouver contraint, pour y parvenir, d'introduire un espace-temps non-euclidien. En eux-mêmes, et Principe d'équivalence mis à part, les phénomènes de gravitation n'avaient rien à faire avec une représentation de ce genre.

Le Principe d'équivalence postule - on le sait - une identité locale entre les phénomènes de gravitation et les phénomènes d'inertie.

Or les premiers (gravitation), introduits dans la physique au moyen d'une loi de force, peuvent s'y maintenir théoriquement par le même procédé. De même que l'électrostatique de Coulomb est un cas particulier de l'électrodynamique de Maxwell, de même on peut édifier - au moins théoriquement - une gravitodynamique, relativiste au sens restreint, dans un espace-temps de MINKOWSKI. En supposant cette théorie réalisée et expérimentalement vérifiée, les phénomènes de gravitation seront décrits par un champ phénoménologique dans l'espace plat. Ce champ est tout-à-fait analogue à un champ de Maxwell mais, en représentation corpusculaire, il correspond à un spin supérieur.

D'autre part, on peut toujours, bien entendu, décrire un mouvement accéléré dans un espace plat mais, si cette description doit bénéficier d'un principe de Relativité généralisée, les forces d'inertie ne pourront être absorbées que dans une structure non-euclidienne. Autrement dit, on peut toujours, en chaque point, se limiter au système d'inertie en coïncidence instantanée avec l'observateur accéléré. Mais le raccord de ces divers systèmes locaux ne peut s'opérer qu'en introduisant globalement un espace-temps non-euclidien auquel seront tangentes les diverses cartes locales.

Il résulte de ces conclusions qu'un principe de Relativité généralisé suppose l'introduction d'un espace-temps non-euclidien. Toutefois cette introduction découle d'un principe de relativité du mouvement : ce sont donc les effets d'inertie - et non les effets de gravitation - qui introduisent "naturellement" le non-euclidien en physique.

Si maintenant - et a posteriori - nous formulons un principe d'équivalence, les phénomènes de gravitation, comme les effets d'inertie, s'intégreront à la structure même de l'espace : les potentiels de gravitation s'identifieront alors à la métrique.

Par contre, en l'absence de tout principe d'équivalence, le champ de gravitation comme le champ de Maxwell pourrait fort bien bénéficier d'une description phénoménologique, linéaire ou non linéaire, dans un espace euclidien ou non-euclidien. Il resterait de toute façon étranger à sa structure. Dans ces conditions, l'équivalence masse grave - masse inerte serait évidemment une circonstance fortuite et approximative.

Nous retiendrons de ce qui précède la conclusion suivante :

Bien loin de permettre une interprétation euclidienne des phénomènes de gravitation (c'est-à-dire de les réduire à des effets d'inertie essentiellement euclidiens), c'est le Principe d'équivalence qui exige une interprétation non-euclidienne des phénomènes de gravitation en les assimilant à des effets d'inertie bénéficiaires d'une Relativité généralisée.

Nous aurons ainsi le choix - au moins de principe - entre deux attitudes :

a. Ou bien admettre le principe d'équivalence et, dans ce cas, construire une théorie non-euclidienne des phénomènes de gravitation : Une Relativité généralisée conduit alors à la Relativité générale.

b. Ou bien donner à cette équivalence une signification purement expérimentale et approchée. On construira alors des théories phénoménologiques de la gravitation dans un espace euclidien ou non-euclidien suivant le principe de relativité restreint ou généralisé que l'on adopte : Les potentiels de gravitation seront $\psi_{\mu\nu}$ toujours dissociés de la métrique $g_{\mu\nu}$ (ou $h_{\mu\nu}$).

Je me bornerai aux théories phénoménologiques des champs tensoriels, écartant ainsi toutes les approximations de la Relativité générale [1]. Bien entendu chacune de ces approximations peut être considérée comme une retranscription des équations relatives à un champ faible dans un espace minkowskien. Néanmoins il s'agit de versions approchées dont l'intelligence suppose la donnée de la Relativité générale. Les théories dont je parlerai ici sont, au contraire, des théories rigoureuses dans l'espace de Minkowski.

Je me limiterai aux théories "archaïques" et, par ce terme, je désignerai les théories qui ne déduisent pas le mouvement des particules de la donnée d'une énergie gravitationnelle. Elles s'échelonneront en général entre 1939 et 1945.

Enfin je me limiterai ici à l'aspect classique de la situation : la quantification du champ, l'application à une interaction photon-graviton, la déduction d'une énergie propre du photon (gupta) seront exposées ultérieurement.

---

[1] J'écarterai aussi les théories qui considèrent l'espace plat rapporté à une métrique $\gamma_{\mu\nu}$ comme une "distorsion d'un espace courbe muni de la métrique $g_{\mu\nu}$. Cf. ROSEN (N.). - General relativity and flat space, I., II., Phys. Rev., 2e série, t. 57, 1940, p. 147-153 ; et BELINFANTE (Frederick J.). - Use of the flat-space metric in Einstein's curved universe and the "Swiss-Cheese" model of space, Phys. Rev., 2e série, t. 98, 1955, p. 793-800.

2. Théories minkowskiennes des champs tensoriels. Lien avec les bosons de spin quelconque.

Les premières théories minkowskiennes du champ de gravitation ont été, en quelque sorte, les sous-produits d'une tentative plus générale : la construction de théories générales des champs tensoriels (et spinoriels) en liaison avec les représentations corpusculaires au moyen de bosons (ou de fermions).

Des recherches de ce type avaient été entreprises dès 1938 par W. PAULI et M. FIERZ [2], [3], [4]. Elles consistaient à généraliser les équations du champ relatives à des potentiels scalaire (spin zéro) et vectoriel (spin 1 en unités $\hbar$). Ces champs

(1) $$\Phi_\mu = \partial_\mu \Phi$$ (1)' $$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu$$

satisfont, dans le cas du vide

(2) $$\partial_\mu \Phi = k_0^2 \Phi_\mu$$ (2)' $$\partial_\mu \varphi^{\mu\nu} = k_0^2 \varphi^\nu$$

$k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}$ étant un terme de masse.

W. PAULI et M. FIERZ définissent d'une manière analogue, à partir d'un potentiel $A_{\nu\rho\ldots\sigma}$ à q indices, les q champs

(3) $$B^{(1)}_{[\mu\nu]\rho\ldots\sigma} \equiv \partial_\mu A_{\nu\rho\ldots\sigma} - \partial_\nu A_{\mu\rho\ldots\sigma}$$

(4) $$B^{(2)}_{[\mu\nu][\rho\lambda]\ldots\sigma} = \partial_\mu B^{(1)}_{[\rho\lambda]\nu\ldots\sigma} - \partial_\nu B^{(1)}_{[\rho\lambda]\mu\ldots\sigma} \qquad \text{etc.}$$

satisfaisant aux conditions

(5) $$\partial^\mu B^{(1)}_{[\mu\nu]\rho\ldots\sigma} = k_0^2 A_{\nu\rho\ldots\sigma}$$

(6) $$\partial^\mu B^{(2)}_{[\mu\nu][\rho\lambda]\ldots\sigma} = k_0^2 B^{(1)}_{[\rho\lambda]\nu\ldots\sigma} \qquad \text{etc.}$$

D'une manière générale, le q-ième champ défini par

(7) $$B^{(q)}_{\ldots[\mu\nu]} = \partial_\mu B^{(q-1)}_{\nu\ldots} - \partial_\nu B^{(q-1)}_{\mu\ldots}$$

est tel que

(8) $$\sum_q B^{(q)}_{[\rho\mu][\rho\nu]} = k_0^2 B^{(q-2)}_{\mu\nu}$$

et satisfait

(9) $$\partial^\mu B^{(q)}_{[\mu\nu]\ldots} = k_0^2 B^{(q-1)}_{\nu\ldots} .$$

On peut alors définir q tenseurs d'impulsion-énergie

$$(10)\quad T^{q}_{\mu\nu} =$$
$$= [\tfrac{1}{2}(B^{(q)*}_{[\mu\rho][\sigma\zeta]\ldots\lambda}\, B_{[\nu}{}^{\rho][\sigma\zeta]\ldots\lambda} + \text{conj}) - \tfrac{1}{4}\,\eta_{\mu\nu}\, B^{*}_{[\rho\sigma][\pi\zeta]\ldots\lambda}\, B^{[\rho\sigma][\pi\zeta]\ldots\lambda}]$$
$$+ k_0^2[\tfrac{1}{2}\,(B^{(q-1)*}_{[\mu\rho]\sigma\ldots\lambda}\, B_{[\nu}{}^{\rho]\sigma\ldots\lambda} + \text{conj}) - \tfrac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\, B^{*}_{[\rho\sigma]\lambda\ldots\zeta}\, B^{\rho\sigma]\lambda\ldots\zeta}] \, .$$

On constate aisément que les conditions

$$(11)\qquad \partial^{\mu}\, T^{(q)}_{\mu\nu} = 0$$

sont réalisées si les équations du champ sont satisfaites.

D'autre part, vers la même époque, G. PETIAU et moi, développions une représentation des champs tensoriels basée sur la méthode dite "de fusion" de Louis de BROGLIE [5]. Cette méthode gagne a être présentée avec un formalisme allégé, formalisme que j'ai exposé dans ma thèse - et qui est le suivant :

Considérons une équation de Dirac et son adjointe

$$(12)\quad (\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - k_0)\,\psi = 0 \qquad\qquad (12)'\quad \partial_{\mu}\,\chi\gamma^{\mu} + k_0\,\chi = 0$$

admettant, non pas des solutions spinorielles ψ et χ , mais des solutions tensorielles issues de la représentation de $\psi = \chi$ comme des matrices quelconques à quatre lignes et à quatre colonnes

$$(13)\quad \partial_{\mu}\,|\gamma^{\mu}|\,|\psi| - k_0|\psi| = 0 \qquad\qquad (13)'\quad \partial_{\mu}\,|\psi|\,|\gamma^{\mu}| + k_0|\psi| = 0 \, .$$

Ces matrices quelconques sont susceptibles d'un développement suivant le système de base complet formé par les seize matrices de Dirac

$$(14)\quad |\psi| = \gamma^{0}\,\varphi_0 + \gamma^{\mu}\,\varphi_{\mu} + \tfrac{1}{2}\,\gamma^{\mu}\,\gamma^{\nu}\,\varphi_{\mu\nu} + \tfrac{1}{6}\,\gamma^{\mu}\,\gamma^{\nu}\,\gamma^{\rho}\,\varphi_{\mu\nu\rho} + \tfrac{1}{24}\,\gamma^{\mu}\,\gamma^{\nu}\,\gamma^{\rho}\,\gamma^{\sigma}\,\varphi_{\mu\nu\rho\sigma}$$

En substituant dans (13) on obtient les équations classiques relatives aux potentiels vectoriel et pseudo-scalaire

$$(15)\qquad \partial_{\mu}\,\varphi^{\mu\nu} = k_0^2\,\varphi^{\nu} \qquad\quad \partial_{[\mu}\,\varphi_{\nu\rho\sigma]} = k_0^2\,\varphi_{\mu\nu\rho\sigma} \, .$$

Cette méthode offre l'avantage de se prêter aisément aux généralisations [6] : En utilisant une fonction d'onde matricielle à seize lignes et à seize colonnes $|\Psi|$, on peut la développer en fonction du système complet formé par des matrices de même type $|\Gamma| = |\gamma + \gamma'|$, matrices qui correspondent au spin immédiatement inférieur c'est-à-dire au spin 1 . On obtient alors cinq groupes d'équations irréductibles et je ne retiendrai ici que celui qui se rapporte au spin maximum

$$(16)\qquad \psi_{\mu\nu,\rho} = \partial_{\mu}\,\psi_{\nu\rho} - \partial_{\nu}\,\psi_{\mu\rho}$$

$$(17)\quad \partial^{\mu}\,\psi_{\mu\nu,\rho} = k_0^2\,\psi_{\nu\rho} \qquad\qquad \partial^{\nu}\,\psi_{\nu\rho} = 0 \;\; \text{si} \;\; k_0^2 = 0 \, .$$

Il est facile de constater qu'en posant

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^{(2)}_{\mu\nu} + \psi^{0}_{\mu\nu} \qquad \psi^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\, \eta_{\mu\nu}(\eta^{\alpha\beta}\, \psi_{\alpha\beta})$$

les équations (16) et (17) peuvent se séparer en deux groupes irréductibles : l'un relatif au spin 2 pur dépend du potentiel $\psi^{(2)}_{\mu\nu}$ $(\psi^{(2)} = \eta^{\mu\nu}\, \psi^{(2)}_{\mu\nu} = 0)$, l'autre relatif au spin zéro dépend uniquement de $\psi = \eta^{\mu\nu}\, \psi_{\mu\nu}$. Il n'est pas nécessaire, pour cela, d'annuler la trace $\eta^{\mu\nu}\, \psi_{\mu\nu}$ correspondant au spin <u>total</u>.

A cette époque, G. PETIAU avait formulé les relations dites de DUFFIN-KEMMER [7]. Il était donc facile de mettre en évidence les relations entre les matrices caractérisant le spin 2 . J'ai alors montré que les équations ci-dessus correspondaient à une retranscription de la Relativité générale : la particule de spin 2 représentait donc un graviton [6].

Par une méthode analogue, G. PETIAU devait généraliser ces résultats à la représentation des particules de spins entier et demi-entier [7]. Les résultats acquis étaient évidemment analogues à ceux qu'avaient obtenus W. PAULI et M. FIERZ par une voie plus formelle, mais évidemment plus courte.

Quoi qu'il en soit, on peut montrer qu'il est toujours possible de définir trois tenseurs d'impulsion-énergie [5], [6].

a. Un tenseur $t_{\mu\nu}$ qui généralise le tenseur de Dirac. On l'a qualifié d'"impulsion-énergie corpusculaire".

(18) $$t_{\mu\nu} = \psi^{*}\, P_{\mu}(\overrightarrow{\partial_\nu} + \overleftarrow{\partial_\nu}) + \text{sym}_{\mu,\nu}\, \psi \quad .$$

b. Deux tenseurs qui généralisent le formalisme de Maxwell :

(19) $$m^{(1)}_{\mu\nu} = \sum_{i\neq j} \psi^{*}\, P^{(i)}_{\mu}\, P^{(j)}_{\nu} + \text{sym}_{\mu,\nu}\, \psi$$

(20) $$m^{(2)}_{\mu\nu} = \sum_{i\neq j\neq \ell} \psi^{*}\, P^{(i)}_{\mu}\, P^{(j)}_{\nu}\, P^{(\ell)}_{\rho}\, P^{\rho(\ell)} + \text{sym}_{\mu,\nu}\, \psi \quad .$$

En passant aux champs réels, on obtient ainsi

a. Pour l'énergie gravitationnelle

(21) $$t_{\mu\nu} = \psi^{\rho\sigma,\zeta}(\partial_{\mu}\, \psi_{[\nu\zeta][\rho\sigma]} + \text{sym}_{\mu,\nu})$$

b. Pour les deux tenseurs de type maxwellien

(22) $$m^{(1)}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\rho,\sigma}\, \psi_{\nu\rho,}{}^{\sigma} - \frac{1}{4}\, \eta_{\mu\nu}\, \psi_{\rho\sigma,\zeta}\, \psi^{\rho\sigma,\zeta} + k_0^2(\psi_{\mu\rho}\, \psi_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{2}\, \eta_{\mu\nu}\, \psi_{\rho\sigma}\, \psi^{\rho\sigma})$$

(23) $$m^{(2)}_{\mu\nu} = \psi_{[\mu\rho][\lambda\zeta]}\, \psi_{[\nu}{}^{\rho][\lambda\zeta]} - \frac{1}{4}\, \eta_{\mu\nu}\, \psi_{[\rho\sigma][\lambda\zeta]}\, \psi^{[\rho\sigma][\lambda\zeta]} + k_0^2(\psi_{\rho\sigma,\mu}\, \psi_{\rho\sigma,\nu} - \eta_{\mu\nu}\, \psi_{\rho\sigma,\lambda}\, \psi^{\rho\sigma,\lambda}) \quad .$$

Les tenseurs $m_{\mu\nu}$ coïncident avec les expressions obtenues par FIERZ. D'autre part, j'ai pu montrer que les expressions de T_{00}, $m^{(1)}_{00}$, $m^{(2)}_{00}$ coïncident dans le cas de l'onde plane, et introduire, sur ces bases, la seconde quantification.

Chose curieuse, tous les développements associés à l'introduction de ces énergies gravitationnelles ont été liés alors à la définition de champs complexes et appliqués à l'étude de processus microscopiques (2). La création d'un champ macroscopique $\psi_{\mu\nu,\rho}$, à partir d'une distribution matérielle macroscopique donnée, n'a pas été sérieusement approfondie. Autrement dit, aucun des auteurs précédents n'a déduit de la donnée des tenseurs d'impulsion-énergie, (qui permettaient cependant la définition d'une authentique énergie gravitationnelle localisable) le mouvement des particules d'épreuve.

3. Mouvement des particules d'épreuve. Loi de force (G. D. BIRKHOFF).

La théorie de G. D. BIRKHOFF est plus exactement une loi de force destinée à se substituer à l'expression newtonienne. G. D. BIRKHOFF ne cherche pas à déduire cette loi de conditions de conservation portant sur l'énergie totale (matière + champ). Il n'essaie pas davantage de déduire cette impulsion-énergie et les équations de champ d'un formalisme lagrangien adapté.

A partir de la métrique minkowskienne (3)

(24) $$\eta_{\mu\nu} = (-\delta_{pq}, \delta_{00})$$

le potentiel de gravitation est défini, comme dans toutes les théories précédentes par un potentiel symétrique $\psi_{\mu\nu}$. Celui-ci satisfait les équations

(25) $$\Box \psi_{\mu\nu} = \chi M_{\mu\nu}$$

$M_{\mu\nu}$ est le tenseur matériel d'impulsion-énergie. Son expression

(26) $$M_{\mu\nu} = \mu_0 c^2 u_\mu u_\nu - P_{\mu\nu}$$

s'explicite, chez BIRKHOFF, en postulant

(27) $$P_{\mu\nu} = - p\eta_{\mu\nu} = - \frac{\mu_0 c^2}{2} \eta_{\mu\nu} .$$

---

(2) Par exemple, déduction d'une loi de Newton par interaction de deux particules matérielles au moyen de graviton avec introduction des éléments de matrice liés aux transitions [6].

(3) Nous substituons ces notations à l'écriture originale

$$ds^2 = \delta_{ab}\, dx^a\, dx^b$$

avec

$$x^1 = t ,\quad x^2 = x ,\quad x^3 = y ,\quad x^4 = z ,\quad \delta_{11} = 1 ,\quad \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} = -1$$

qui risquent d'introduire d'évidentes confusions.

L'hypothèse $p = \frac{m_0 c^2}{2}$ semble assez arbitraire. En fait, il s'agit d'une véritable équation d'état

(28) $$p = f(\mu)$$

particularisée de façon à définir une vitesse de perturbation égale à la vitesse de la lumière dans le milieu de densité de masse μ. Diverses critiques ont été formulées, notamment par H. WEYL. Je ne les reprendrai pas ici.

Notons cependant que l'équation satisfaite par les potentiels s'écrit aussi :

(29) $$\Box \psi_{\mu\nu} = \mu_0 c^2 (u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu})$$

d'où

(30) $$\Box \psi = - \mu_0 c^2 \qquad (\psi = \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu})$$

et, par conséquent,

(31) $$\Box \gamma_{\mu\nu} = \mu_0 c^2 u_\mu u_\nu$$

en posant

(32) $$\gamma_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi \quad .$$

L'hypothèse de BIRKHOFF revient donc à supposer que le potentiel $\gamma_{\mu\nu}$ est engendré par une distribution de matière incohérente. Dans ce cas, pour décrire l'intérieur de la matière, des termes de pression devraient être ajoutés au second membre de (31).

Loi du mouvement. - Dans la théorie de BIRKHOFF, le mouvement découle de la donnée pure et simple d'une loi de force

(33) $$F_\mu = m_0 \frac{du_\mu}{ds}$$

la force F étant orthogonale à la quadrivitesse.

(34) $$F_\mu u^\mu = 0 \quad .$$

Cette condition est assurée en choisissant

(35) $$F_\mu = M_0 (\partial_\mu \psi_{\rho\sigma} - \partial_\rho \psi_{\mu\sigma}) u^\rho u^\sigma \quad .$$

Les potentiels $\psi_{\rho\sigma}$ caractérisent le corps attirant ; m_0, M_0, u^ρ sont respectivement la masse inerte, la masse grave, la quadrivitesse de la particule d'épreuve.

Si l'on suppose

(36) $$\frac{M_0}{m_0} = C = 1 \quad .$$

La loi de force qui résulte de (33) et de (35) s'écrit alors

(37) $$\frac{du_\mu}{ds} = (\partial_\mu \psi_{\rho\sigma} - \partial_\rho \psi_{\mu\sigma})\, u^\rho u^\sigma$$

et ne fait pas intervenir la masse de la particule d'épreuve. Néanmoins, comme dans la théorie de Newton, cette condition doit être postulée. WEYL a insisté sur cet aspect de la théorie.

Solution à symétrie sphérique. - Si le champ de gravitation est crée par un corps possédant la symétrie sphérique, le potentiel de gravitation doit avoir a priori la forme suivante

(38) $$\psi_{ij} = - B\delta_{ij} - (A - B)\frac{x^i x^j}{r^2} \qquad \psi_{i0} = \frac{Dx^i}{r} \qquad \psi_{00} = C \quad .$$

D'après la forme même du tenseur $M_{\mu\nu}$, un potentiel $\psi_{\mu\nu}$ de cette forme ne pourra satisfaire les équations du champ qu'à la condition suivante :

(39) $$A = B = - C = - 1 \qquad D = 0$$

c'est-à-dire

(40) $$\psi_{\mu\nu} = \frac{M}{r}\,\delta_{\mu\nu} \quad .$$

4. Les vérifications expérimentales.

a. Avance des périhélies. - Le mouvement d'une planète considérée comme une particule d'épreuve est donné par la loi de force

(41) $$\frac{du_\mu}{ds} = (\partial_\mu \psi_{\rho\sigma} - \partial_\rho \psi_{\mu\sigma})\, u^\rho u^\sigma \quad .$$

Si le champ de gravitation est crée par un corps possédant la symétrie sphérique on doit remplacer les $\psi_{\mu\nu}$ par les expressions précédentes $\frac{M}{r}\,\delta_{\mu\nu}$.

Posons

(42) $$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = x'^\mu \quad .$$

On obtient alors les deux équations

(43) $$\begin{cases} \text{(a)} \quad x'' = -\dfrac{Mx}{r^3} - \dfrac{2Mx}{r^3}(x'^2 + y'^2) + \dfrac{Mx'\, r'}{r^2} \\[2ex] \text{(b)} \quad y'' = -\dfrac{My}{r^3} - \dfrac{2My}{r^3}(x'^2 + y'^2) + \dfrac{My'\, r'}{r^2} \end{cases} \quad .$$

L'intégration est facile. En passant en coordonnées polaires, on obtient :

1° D'une part une approximation de la loi des aires

(44) $$r^2 \frac{d\Omega}{ds} = \frac{h}{c} e^{-M/r} \rightarrow \frac{h}{c}$$

2° D'autre part l'équation des trajectoires

(B) $$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \neq \frac{Gm}{h^2} + 6 \frac{G^2}{c^2} \frac{m^2}{h^2} u + 14 \frac{G^3}{c^4} \frac{m^3}{h^2} u^2 \quad .$$

On a utilisé les notations habituelles

$$u = \frac{1}{r} \quad .$$

Cette équation peut être rapprochée de l'expression des trajectoires qui résultent d'une part de la Relativité générale, d'autre part de la théorie newtonienne. On trouve dans l'un et l'autre cas

(E) $$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{Gm}{h^2} + 3 \frac{Gm}{c^2} u^2$$

(N) $$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{Gm}{h^2} \quad .$$

Les corrections apportées à la trajectoire elliptique newtonnienne sont donc introduites :

- par les termes en u^2 s'il s'agit de la Relativité générale,
- par les termes en u dans la théorie de Birkhoff.

Dans ce cas, les termes en u^2 comportent en effet le coefficient $\frac{1}{c^4}$, et ils contribuent pour une part infime à la modification de la trajectoire elliptique.

Des calculs par iteration, analogues à ceux que l'on effectue en Relativité générale, conduisent alors à l'expression habituelle

(45) $$\Delta\varphi = \frac{6\pi\, Gm}{ac^2 (1 - c^2)}$$

c'est-à-dire à l'avance séculaire expérimentale ($\Delta\Omega = 42''9$).

b. <u>Les interactions lumière-gravitation</u>. - En théorie du graviton, j'avais examiné les interactions résultant d'un lagrangien

(46) $$W = k\, \psi^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu}$$

expression proposée aussi par PETIAU. Je l'avais appliquée notamment au cas où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'impulsion-énergie de la théorie de Dirac.

M. MOSHINSKY utilise un terme de ce genre pour décrire une interaction photon-graviton : $\tau_{\mu\nu}$ représente alors le tenseur de Maxwell.

Les variations

(47) $\delta \int L\, d\tau$, $L = L_g + L_e + W$, $L_e = \frac{1}{4}\, \varphi^{\mu\nu}\, \varphi_{\mu\nu}$, $L_g = \frac{1}{8}\, \partial^{\mu}\, \psi^{\rho\sigma}\, \partial_{\mu}\, \psi_{\rho\sigma}$

conduisent alors pour des accroissements $\delta\psi_{\mu\nu}$, $\delta\varphi_{\mu}$ nuls à la limite du domaine d'intégration, aux relations

(48) $$\square\, \psi_{\mu\nu} = \zeta_{\mu\nu}$$

(49) $$\partial_{\rho}\, (\varphi^{\rho\beta} + 2k\, \psi^{\rho}{}_{\nu}\, \varphi^{\nu\beta} - 2\varphi^{\rho}{}_{\nu}\, \psi^{\beta\nu} + \eta_{\mu\nu}\, \psi^{\mu\nu}\, \varphi^{\rho\beta}) = 0 \quad .$$

La solution statique à symétrie sphérique

(50) $$\psi_{\mu\nu} = \frac{Gm}{c^2\, r}\, \delta_{\mu\nu}$$

permet de réduire les équations du champ à l'expression suivante

(51) $$\partial_{\rho}\, f^{\mu\rho} = 0$$

à condition de poser

(52) $$f^{p0} = (1 + 2f)\, \varphi^{p0} \qquad f^{pq} = (1 - 2f)\, \varphi^{pq}$$

avec

(53) $$f = \frac{Gm}{c^2\, r} \quad .$$

Ces relations sont valables dans le système propre ($u^p = 0$, $u^c = 1$) système où l'on peut écrire

(54) $$f^{p0} = \zeta\varphi^{p0} \qquad f^{pq} = \frac{1}{\mu}\, \varphi^{pq} \quad .$$

On peut donc définir une polarisation du vide caractérisée par l'indice

(55) $$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \left(\frac{1 + 2f}{1 - 2f}\right)^{1/2} \quad .$$

Le champ de gravitation confère ainsi à l'espace euclidien vide une polarisation capable de modifier la direction des rayons lumineux et la fréquence des photons.

1° Courbure des rayons lumineux. - Elle se déduit immédiatement d'un principe de Fermat

(56) $$\delta \int n\, d\ell = 0$$

où n a l'expression ci-dessus.

Des calculs sans difficultés conduisent à prévoir des trajectoires hyperboliques dont les asymptotes forment l'angle :

(57) $$\alpha = 4\, \frac{Gm}{c^2\, R}$$

c'est-à-dire l'expression prévue par la Relativité générale.

2° Décalage des fréquences. - Supposons qu'une particule (un proton par exemple) crée un champ électrostatique à la surface du soleil. Ce champ sera modifié puisqu'il existe une constante diélectrique du vide.

Or le potentiel correspondant intervient dans une équation de Dirac. Les modifications précédentes entraînent des changements de la charge et de la masse de l'électron qui deviennent

(58) $$e'^2 = \frac{e^2}{1 + 2f} \qquad m'_0 = \frac{m_0}{1 - 3f} \quad .$$

Dans ces conditions, l'énergie correspondant à un niveau d'emission est elle-même modifiée. Proportionnelle à $m_0 e^4$, elle devient

(59) $$E'_s = \frac{m'_0 e'^4}{2h^2 s^2} = \frac{m_0 e^4}{2h^2 s^2} \frac{1}{(1 + 2f)^2 (1 - 3f)} \sim (1 - f) E_s \quad .$$

La fréquence émise dans un champ de gravitation est alors

(60) $$\nu'_{sp} = \frac{E'_s - E'_p}{h} = (1 - f) \nu_{sp} \quad .$$

Ainsi, pour expliquer le décalage gravitationnel, on doit passer par l'intermédiaire de considérations propres aux théories quantiques et, notamment, de l'équation de Dirac. Cette conclusion qui sépare profondément le décalage gravitationnel de l'effet Döppler classique n'est pas tellement surprenante dans son principe.

5. Critique de la théorie de Birkhoff.

H. WEYL a vivement critiqué certaines hypothèses qui interviennent dans l'édification de cette théorie et dans ses applications.

Je ne les retiendrai pas toutes : L'intervention des théories quantiques dans la genèse du 3e effet est sans doute surprenante. Elle gagnerait sûrement à subir quelques retouches. Néanmoins elle ne me paraît pas rédhibitoire.

Beaucoup plus sérieuse est l'exégèse soulevée par la fameuse condition

(61) $$p = \frac{\mu c^2}{2} \quad .$$

En théorie de Birkhoff, cette restriction est indispensable pour obtenir les valeurs expérimentales obtenues pour les trois effets. Il est un peu gênant de lier ces résultats à une quelconque équation d'état.

D'autre part, aucune équation du type

$$\partial_\rho (m n^\rho) = 0$$

ne résulte de la théorie. Néanmoins, WEYL accuse BIRKHOFF de sacrifier la conservation de l'énergie à la conservation de la masse. Il veut dire par là que l'équation

$$F_\mu = m_0 \frac{du_\mu}{ds} = \chi M_0 (\partial_\mu \psi_{\mu\rho,\sigma} - \partial_\rho \psi_{\mu c}) u^\rho u^\sigma \tag{63}$$

peut s'écrire encore

$$\partial_\rho (m_0 u^\rho u_\mu) = \chi M_0 (\partial_\mu \psi_{\rho\sigma} - \partial_\rho \psi_{\mu\sigma}) u^\rho u^\sigma \quad , \tag{64}$$

si l'expression (64) se réduit à (63) en exigeant la condition

$$\partial_\rho (m_0 u^\rho) = 0 \quad . \tag{65}$$

Toutefois, si le principe de conservation de la masse n'est pas explicité dans la théorie, le principe de conservation de l'énergie ne peut correctement s'y introduire. Ceci constitue - à mon avis - la plus sérieuse objection à la théorie.

En effet, sans avoir la superstition des principes variationnels, on ne peut nier qu'ils présentent l'avantage de rattacher la définition d'une impulsion-énergie aux équations de champ et à établir entre ces expressions un certain nombre d'identités fondamentales.

Or il n'est pas difficile, en théorie de Birkhoff, de construire le lagrangien susceptible de conduire aux équations du champ. Malheureusement les lois du mouvement adoptées dans la théorie ne peuvent être déduites des conditions de conservation appliquées à l'énergie-impulsion correspondante (4).

Plus généralement, en partant d'un lagrangien non spécifié, on peut montrer qu'en présence de matière, seul le tenseur métrique d'impulsion-énergie peut conduire à la prévision correcte du mouvement des particules. Dans ces conditions la théorie de Birkhoff est en complet désaccord avec l'orthodoxie lagrangienne.

Ces critiques ne cherchent pas à minimiser cette très ingénieuse théorie mais à montrer, au contraire, qu'elle doit être modifiée sur des points essentiels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SCHIFF (L.). - Motion of a gyroscope according to Einstein's theory of gravitation, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 46, 1960, p. 871-882.

[2] FIERZ (Markus). - Über die relativistiche Theorie Kräftefreier Teilchen mit beliebigen Spin, Helvet. Phys. Acta, t. 12, 1939, p. 3-37.

---

(4) BELINFANTE fait remarquer qu'une loi de mouvement convenablement déduite donnerait une avance 6 fois trop faible et, dans la théorie de Moshinsky, une prévision incorrecte de la déviation (12).

[3] PAULI (Wolfgang) et FIERZ (Markus). - Über relativisticho Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigen Spin im elektromagnetischen Feld, Helvet. Phys. Acta, t. 12, 1939, p. 297-300 ; On relativistic wawe equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, Proc. Royal Soc. London, Series A, t. 173, 1939, p. 211-232.

[4] FIERZ (Markus). - Über den Drehimpuls von Teilchen mit Rubemasse null- und beliebigen Spin, Helvet. Phys. Acta, t. 13, 1940, p. 45-60.

[5] BROGLIE (Louis de). - Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion), 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954.

[6] TONNELAT (Marie-Antoinette). - Sur la fusion de deux particules de spin 1 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 212, 1941, p. 187 ; Sur les ondes planes de la particule de spin 2 (graviton), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 212, 1941, p. 263-266 ; Densité-flux et densité d'énergie dans la théorie du corpuscule de spin 2 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 212, 1941, p. 384-389 ; La seconde quantification dans la théorie du corpuscule de spin 2 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 212, 1941, p. 430-434 ; Sur une interprétation possible des grandeurs issues d'un tenseur symétrique dans la théorie de la particule de spin 2 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 212, 1941, p. 687-689 ; Une nouvelle forme de théorie unitaire : Etude de la particule de spin 2 , Annales de Phys., 11e série, t. 17, 1942, p. 158-207 ; Les phénomènes de gravitation, Etude des interactions entre la matière et la particule de spin 2 , Annales Phys., 11e série, t. 19, 1944, p. 396-445.

[7] PETIAU (Gérard). - Contribution à l'étude des équations d'ondes corpusculaires, Acad. royale Belg., Cl. Sc., Mémoires, 2e série, t. 16, 1936, n° 2, 118 p. (Thèse Sc. Math. Paris. 1936) ; Sur les équations d'ondes des corpuscules de spin quelconque, I., J. Phys. et Radium, 8e série, t. 7, 1946 p. 124-128 ; Sur la représentation d'interactions s'exerçant par l'intermédiaire de la particule de spin total maximum $2h/2\pi$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 217, 1943, p. 665-671.

[8] BIRKHOFF (George D.). - Matter, electricity and gravitation in flat space-time, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 29, 1943, p. 231-239 ; El concepto matematico de tiempo y la gravitacion, Bol. Soc. mat. mexic., t. 1, 1943-1944, n° 4, p. 1-23.

[9] BARAJAS (A.), BIRKHOFF (G. D.), GRAEF (C.) and SANDOVAL VALLARTA (M.). - On Birkhoff's new theory of gravitation, Phys. Rev., Series 2, t. 66, 1944, p. 138-143.

[10] MOSHINSKY (Marcos). - On the interactions of Birkhoff's gravitational field with the electromagnetic and pair fields, Phys. Rev., Series 2, t. 80, 1950, p. 514-519.

[11] WEYL (Hermann). - Math. Rev., t. 4, 1943, p. 285 [Analyse de l'article de G. D. Birkhoff, Matter, electricity and gravitation ...] ; Comparison of a degenerate form of Einstein's with Birkhoff's theory of gravitation, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 30, 1944, p. 205-210 ; How far can one get with a linear field theory of gravitation in flat space-time ?, Amer. J. of Math., t. 66, 1944, p. 591-604.

[12] BELINFANTE (Frederick J.). - Attempts at quantization of the gravitation field, Rev. mexic. Fis., t. 4, 1955, p. 192-206.