

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

ELIANE BLANCHETON

Problèmes de stabilité en relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962),
exp. n° 7, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A7_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES DE STABILITÉ EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par Mme Eliane BLANCHETON

I. Introduction.

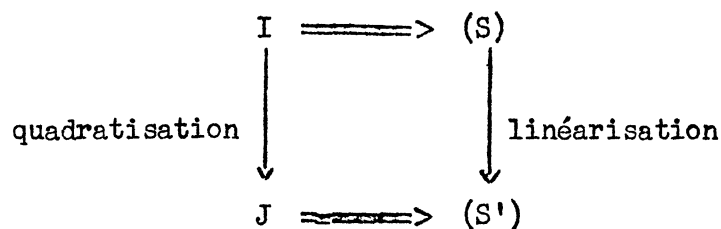
Les équations de la relativité générale peuvent être déduites d'un principe variationnel : chaque phénomène physique observable est défini par un nombre N de variables d'état Z^a ($a = 1, 2 \dots N$) fonctions des x^λ . Il lui correspond une quantité scalaire φ_I , fonction déterminée des Z^a , des $\partial_\lambda Z^a$ et des $g_{\alpha\beta}$. On désigne par φ la somme des quantités φ_I relatives à tous les phénomènes étudiés. Alors l'intégrale

$$I = \int_C \varphi \text{ vol}$$

où C désigne une chaîne différentiable de V_4 , vol l'élément de volume de V_4 ($\text{vol} = \sqrt{-\det(g_{\alpha\beta})} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$) est stationnaire pour toute variation des variables d'état et des $g_{\alpha\beta}$.

Nous désignerons par (S) le système des équations d'Euler exprimant la stationnarité de I . Le système aux variations (S') associé à (S) et à une solution donnée de (S) peut lui-même être interprété comme étant le système des équations d'Euler exprimant la stationnarité d'une certaine intégrale J obtenue en "quadratisant" l'intégrale I . Autrement dit, si on désigne respectivement par $z^a_{(1)}$ et $h_{\alpha\beta}$ les variations des variables d'état et des coefficients de la métrique à partir d'une solution donnée $(z^a, g_{\alpha\beta})$ de (S) , l'intégrale J est obtenue en prenant dans I l'ensemble des termes d'ordre 2 par rapport aux variations $z^a_{(1)}$, $h_{\alpha\beta}$ et à leurs dérivées premières.

On peut représenter ce processus par le schéma suivant



Supposons maintenant que la solution donnée de (S) correspondé à un univers

stationnaire, rapporté à un système de coordonnées adaptées au caractère stationnaire : les $g_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas de la variable x^0 . Supposons de plus que les $z_1^{(a)}$ ne dépendent pas non plus de la variable x^0 . Dans ces conditions, le lagrangien quadratique ne contient pas explicitement x^0 . Il existe donc un théorème de conservation : autrement dit, il existe un vecteur p de V_4 tel que

$$(1) \quad \nabla_\lambda p^\lambda = 0 \quad .$$

On obtient (1) en faisant la multiplication contractée de l'équation d'Euler associée à la variable $z_1^{(a)}$ (resp. h) dans (S') par $\partial_0 z_1^{(a)}$ (resp. $\partial_0 h$), et en ajoutant les équations obtenues. Cette technique, courante en mécanique classique, y conduit, lorsqu'on l'applique au système (S), à l'intégrale de Painlevé. Appliquée au système (S'), elle peut permettre l'étude de la stabilité des mouvements stationnaires.

Nous nous proposons ici de calculer la contribution du phénomène "gravitation" à l'équation (1) et de chercher sous quelles hypothèses il est possible de déduire du résultat un théorème de stabilité pour l'univers stationnaire initialement donné.

II. Contribution de la gravitation à l'expression (1).

Dans le schéma variationnel, la gravitation est décrite par une connexion symétrique, repérée par les quarante variables d'état $\Gamma_{\lambda\mu}^\rho$. Le lagrangien qui lui correspond est

$$\varphi = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \mu = R + \mu$$

($R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci associé à la connexion précédente, μ la constante cosmologique).

Si nous désignons par $A_{\lambda\mu}^\rho$ les variations $\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\rho$ des coefficients de la connexion et, si nous posons

$$f_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} h, \quad h = g^{\lambda\mu} h_{\lambda\mu}, \quad f = g^{\lambda\mu} f_{\lambda\mu}, \quad ,$$

$$k^\lambda = \nabla_\alpha f^{\alpha\lambda}, \quad ,$$

on obtient, pour expression du lagrangien quadratique

$$L_2 = \left(\frac{1}{8} f^2 - \frac{1}{4} f_{\lambda\mu} f^{\lambda\mu}\right)(R + \mu) - f^{\alpha\beta} [\nabla_\lambda A_{\alpha\beta}^\lambda - \nabla_\beta A_{\lambda\alpha}^\lambda - h_\beta^\lambda R_{\alpha\lambda}] \\ + g^{\alpha\beta} [A_{\lambda\mu}^\lambda A_{\beta\alpha}^\mu - A_{\beta\mu}^\lambda A_{\alpha\lambda}^\mu] ,$$

l'intégrale associée étant

$$J = \int L_2 \sqrt{-\det(g_{\alpha\beta})} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 .$$

On écrit alors les équations d'Euler exprimant la stationnarité de J respectivement pour les deux variables A et h . On fait respectivement la multiplication contractée de la première équation par $\partial_0 A$, de la seconde par $\partial_0 h$, et on ajoute les résultats. On obtient, tous calculs faits,

$$\nabla_\lambda p^\lambda = 0$$

où l'on a successivement

$$p^0 = P^0 + A , \quad p^i = P^i$$

$$2P^\lambda = \partial_0 f^{\alpha\beta} [\nabla^\lambda f_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha f^\lambda_\beta - \nabla_\beta f^\lambda_\alpha] + [k^\lambda - \partial^\lambda f] \partial_0 f$$

$$A = \frac{1}{4} [\nabla_\beta f^\lambda_\alpha + \nabla_\alpha f^\lambda_\beta - \nabla^\lambda f_{\alpha\beta}] \nabla_\lambda f^{\alpha\beta} + \frac{1}{8} \nabla^\lambda f \nabla_\lambda f \\ + h^{\alpha\beta} f^\lambda_\beta S_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4} (f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} f^2) (S + \mu) .$$

Nous allons modifier (1) en introduisant la section W_3 de V_4 par le plan $x^0 = \text{Cte}$ munie de la métrique

$$g_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{oi} g_{oj}}{g_{oo}} .$$

On pose

$$g_{oo} = \xi^2 \quad (\xi > 0) , \quad g_{oi} = \xi^2 \varphi_i , \quad H_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i ,$$

et on désigne par $\dot{\nabla}_i$ l'opérateur de dérivation covariante associé à la métrique g_{ij} . Un calcul rapide montre que (1) entraîne

$$(2) \quad \xi \partial_0 p^0 + \dot{\nabla}_i (\xi p^i) = 0 \quad .$$

On désigne alors par \dot{p} le vecteur de W_3 de composantes contravariantes p^i , par \dot{vol} l'élément de volume de W_3 associé à la métrique \dot{g}_{ij} . Soit C une chaîne différentiable de W_3 , ∂C son bord. Par intégration de (2) sur C , on obtient

$$\partial_0 \int_C \xi p^0 \dot{vol} + \text{flux}_{\partial C} (\dot{\xi} p) = 0 \quad .$$

Si on suppose enfin W_3 compacte, et si on pose $C = W_3$, il vient

$$(3) \quad \int_{W_3} \xi p^0 \dot{vol} = \text{Cte} \quad .$$

Si W_3 est non compacte, mais si V_4 admet sur W_3 un comportement asymptotique euclidien, on remarque que \dot{p}^i est de l'ordre de $\frac{1}{r^4}$, r désignant la distance d'un point quelconque M à un point fixe O de W_3 (voir LICHNEROWICZ ⁽¹⁾). Si on prend alors pour C une boule de centre O et de rayon r , on en déduit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{flux}_{\partial C} (\dot{\xi} p) = 0 \quad .$$

Supposons de plus l'intégrale $\int_C \xi p^0 \dot{vol}$ uniformément convergente lorsque $r \rightarrow \infty$ (3) sera encore vérifiée.

III. Définition de la stabilité d'un univers stationnaire.

1. Rappel de la définition de la stabilité d'un système différentiel d'après LJAPUNOV.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(S_1) \quad \frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

où t désigne une variable scalaire, x une inconnue appartenant à R^n et F une application de R^{n+1} dans R^n . Nous désignerons par $\|x\|$ l'une quelconque

⁽¹⁾ LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).

des normes de x dans R^n . Supposons la fonction F définie quel que soit t , et quel que soit x dans un domaine D de R^n . Supposons que le système (S_1) admette une solution

$$x = f_0(t)$$

prenant la valeur x_0 pour $t = 0$, définie quel que soit t , et telle que les vecteurs $f_0(t)$ appartiennent, quel que soit t , au domaine D . On dit que la solution f_0 du système (S_1) est stable au sens de LJAPUNOV si

1° $\exists a > 0$ tel que, $\forall t$ et $\forall x_1$ satisfaisant $\|x_1 - x_0\| \leq a$, la solution $x = f_1(t)$ de (S_1) , prenant la valeur x_1 pour $t = 0$, existe, et le vecteur $f_1(t) \in D$, $\forall t$.

2° ε étant un nombre donné strictement positif, $\exists \eta(\varepsilon, F, x_0)$ tel que $0 < \eta \leq a$ et tel que

$$\|x_1 - x_0\| \leq \eta \implies \|f_1(t) - f_0(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t.$$

Cette deuxième hypothèse signifie que l'application $x_1 \rightarrow f_1$ de R^n dans l'espace des applications de R dans R^n muni de la topologie de la convergence uniforme est continue en x_0 .

Stabilité infinitésimale d'un système différentiel. - Nous dirons que la solution $x = f_0(t)$ de (S_1) est infinitésimalement stable si la solution $x = 0$ du système (S_1') aux variations associé à (S_1) et à la solution $x = f_0(t)$ est stable.

Nous remarquerons que, a priori, la stabilité infinitésimale n'entraîne pas la stabilité.

Le théorème suivant est alors évident.

THÉORÈME. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution $x = 0$ de (S_1') soit stable est que toutes les solutions de (S_1') soient bornées pour tout t .

2. Définition de la stabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Soit un système d'équations aux dérivées partielles que nous supposerons mis sous la forme

$$(S) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = F(t, x, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots) \quad .$$

Nous avons désigné par t une variable scalaire, par x une variable vectorielle appartenant à R^n , par U une inconnue appartenant à R^p .

Supposons la fonction F définie et continue pour tout t et pour tout x , et quelles que soient U , $\frac{\partial U}{\partial x}$, ... dans un certain domaine D . Supposons que le système (S) admette une solution notée

$$(5) \quad U = [f_0(t)](x)$$

possédant les deux propriétés suivantes :

1° $f_0(t)$ est une application de R^n dans R^p , $f_0(0)$ en est une application donnée U_0 .

2° Les valeurs de U , $\frac{\partial U}{\partial x}$, ... correspondant à cette solution appartiennent à D quels que soient t et x .

Pour pouvoir étendre la définition de la stabilité donnée par LJAPUNOV, il faut d'abord définir une norme sur un sous-espace vectoriel \mathcal{E} de l'ensemble des applications de R^n dans R^p . Pour $A \in \mathcal{E}$, nous la noterons $\|A\|$. La définition de LJAPUNOV se généralise alors de la façon suivante :

On dit que la solution (5) de (S) est stable pour la norme choisie si

a. $f_0(t) \in \mathcal{E}$, $\forall t$

b. Il existe un nombre a strictement positif tel que, quelle que soit l'application $U_1 \in \mathcal{E}$ vérifiant

$$\|U_1 - U_0\| \leq a \quad ,$$

(S) admette une solution unique, définie $\forall t$ et x ,

$$U = [f_1(t)](x)$$

telle que

$$f_1(0) = U_1, \quad f_1(t) \in \mathcal{E}, \quad \forall t$$

et telle que les valeurs de U , $\frac{\partial U}{\partial x}$, ... appartiennent à D quels que soient t et x .

3° ε étant un nombre donné strictement positif, il existe un nombre $\eta(\varepsilon, F, U_0)$, $0 < \eta \leq a$, tel que

$$\|U_1 - U_0\| \leq \eta \implies \|f_1(t) - f_0(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t.$$

Cette dernière hypothèse exprime la continuité de l'application $U_1 \rightarrow f_1$ au point U_0 .

Remarque. - La stabilité dépend de la norme choisie.

Définition de la stabilité infinitésimale. - Nous dirons que la solution (5) est infinitésimalement stable si la solution nulle du système aux variations (S') associé à (S) et à la solution (5) est stable.

On a ici encore le théorème suivant :

THÉORÈME. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution nulle d'un système aux dérivées partielles linéaire soit stable est que l'ensemble des solutions de ce système soit borné pour la norme choisie.

Autrement dit, il existe un nombre M , positif, indépendant de t , tel que

$$\|f(t)\| \leq M, \quad \forall t.$$

Nous écrirons, pour alléger l'écriture

$$\|f(t)\| = \|U\|_t$$

ou encore

$$\|f(t)\| = \|U\|.$$

3. Définition de la stabilité d'un modèle d'Univers.

Un modèle d'Univers est défini par une solution déterminée des équations d'Einstein, vérifiant certaines hypothèses de différentiabilité et de raccordement. Nous dirons que ce modèle d'Univers est stable si la solution qui le définit est stable.

Nous nous proposons dans la suite d'étudier la stabilité infinitésimale d'un modèle d'Univers stationnaire. Nous sous-entendrons systématiquement le mot "infinitésimale". Plus précisément, nous nous proposons de chercher dans quelles

conditions le théorème de conservation (3) permet de définir une norme pour laquelle l'univers stationnaire étudié soit stable.

Exemple 1. - L'équation des ondes pour la dimension 1 s'écrit

$$(S) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad .$$

Le théorème de conservation dans la propagation par ondes résulte du calcul suivant : on multiplie par $\frac{\partial u}{\partial t}$ les deux membres de (S) et on intègre sur R .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx = 0 \quad .$$

Une intégration par parties du deuxième terme conduit à

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0$$

moynnant des hypothèses convenables sur la régularité de u et son comportement à l'infini. On en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \text{Cte} \quad .$$

Le premier membre de cette équation est une norme pour les fonctions dont les dérivées premières sont de carré sommable, définies modulo une constante. Nous dirons que (S) est stable pour cette norme.

Exemple 2. - Sur une variété V_4 satisfaisant aux postulats de la relativité générale, on considère l'équation

$$(S_2) \quad \Delta u = 0$$

où u désigne une variable scalaire, Δ le laplacien associé à une métrique stationnaire vérifiant elle aussi les postulats de la relativité générale. On suppose les coordonnées adaptées au caractère stationnaire. La même technique que plus haut (multiplication par $\partial_0 u$ et intégration sur une chaîne différentiable C de W_3) conduit à

$$\partial_0 \int_C \xi [g^{00} (\partial_0 u)^2 - g^{ij} \partial_i u \partial_j u] \text{vol} + \text{flux}_{\partial C} (\xi p) = 0$$

où

$$\dot{p}^i = \partial_0 u (\partial^i u - \varphi^i \partial_0 u) \quad .$$

Si on fait l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

1° W_3 est compacte,

2° V_4 admet sur W_3 un comportement asymptotique euclidien, u est à comportement asymptotique euclidien,

on a

$$\int_{W_3} \xi [g^{00} [\partial_0 u]^2 - g^{ij} \partial_i u \partial_j u] \text{vol} = \text{Cte} \quad .$$

Or le premier membre de cette équation définit une semi-norme pour u . Nous dirons que (S_2) est stable pour cette semi-norme.

IV. Stabilité des équations de la relativité générale.

Elles s'écrivent, dans le cas extérieur

$$\delta(S_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \{ [\Delta h]_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha k_\beta + \nabla_\beta k_\alpha - g_{\alpha\beta} (\frac{1}{2} \Delta h + \nabla_\lambda k^\lambda + \frac{1}{2} (S + \mu) h) + (S + \mu) h_{\alpha\beta} \} = 0 \quad .$$

En faisant le produit contracté $\partial_0 h^{\alpha\beta} \delta(S_{\alpha\beta})$, on retrouve le théorème de conservation (1), modulo des termes en $S_{\lambda\mu}$. Pour mettre en évidence le signe de p^0 , nous avons fait ce produit en introduisant systématiquement des tenseurs définis canoniquement sur W_3 de la façon suivante :

\dot{h} représente le tenseur de composantes contravariantes $\dot{h}^{ij} = h^{ij}$

$$(\dot{h}_{ij} = g_{il} \dot{g}_{jm} h^{lm}) \quad ;$$

\dot{V} représente le vecteur de composantes contravariantes $\dot{V}^i = \frac{h^i_0}{\xi}$

$$(\dot{V}_i = g_{il} \dot{V}^l) \quad ;$$

u représente le scalaire $\frac{h_{00}}{\xi^2}$.

On pose encore

$$B_{ij,r\ell} = \dot{R}_{il,jr} + \dot{R}_{ir,j\ell} - \frac{1}{2} \xi^2 (H_{il} H_{jr} + H_{ir} H_{j\ell}) - \frac{1}{2} \dot{g}_{il} [\dot{R}_{jr} - \dot{\nabla}_r (\frac{\partial_j \xi}{\xi})] \\ - \frac{1}{2} \dot{g}_{ir} [\dot{R}_{j\ell} - \dot{\nabla}_\ell (\frac{\partial_j \xi}{\xi})] - \frac{1}{2} \dot{g}_{j\ell} [\dot{R}_{ir} - \dot{\nabla}_r (\frac{\partial_i \xi}{\xi})] - \frac{1}{2} \dot{g}_{\ell r} [\dot{R}_{il} - \dot{\nabla}_\ell (\frac{\partial_i \xi}{\xi})] ;$$

$$B_{ij} = B_{ij}{}^\ell = 2[\dot{\nabla}_i (\frac{\partial_j \xi}{\xi}) - \frac{1}{2} \xi^2 H_i{}^\ell H_{j\ell}] ;$$

$$B = B_\ell{}^\ell = 2[\dot{\nabla}_\ell (\frac{\partial^\ell \xi}{\xi}) - \xi^2 H^2] .$$

On obtient

$$p^0 = \frac{1}{2} \{ g^{00} (\dot{\partial}_0 u)^2 + 2 \partial_0 \dot{v}^i \partial_0 \dot{v}_i + \partial_0 h^{ij} \partial_0 h_{ij} \} - g^{lr} [\partial_\ell u \partial_r u + 2 \dot{\nabla}_\ell \dot{v}^i \dot{\nabla}_r \dot{v}_i + \dot{\nabla}_\ell h^{ij} \dot{\nabla}_r h_{ij}] \\ + Bu^2 - 2B_{r\ell} u h^{r\ell} + B_{ij,r\ell} h^{ij} h^{r\ell} \\ - 2[\dot{R}_{il} - 3 \dot{\nabla}_\ell (\frac{\partial_i \xi}{\xi}) + \xi^2 H_i{}^r H_{\ell r} - \frac{1}{2} \dot{g}_{il} B] \dot{v}^i \dot{v}^\ell \\ + 4[\xi(H^{r\ell} u \dot{\nabla}_\ell \dot{v}_r - H^{r\ell} h_{rj} \dot{\nabla}_\ell \dot{v}^j) - \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_\ell (\xi^2 H^{j\ell}) \dot{v}^i h_{ij} + \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_\ell (\xi^2 H_{ir}) \dot{v}^i h^{r\ell}] \\ + \frac{1}{4} [g^{00} (\partial_0 h)^2 - g^{ij} \partial_i h \partial_j h] + k_\alpha k^\alpha - 2 \partial_0 f^{\alpha 0} k_\alpha - \frac{1}{2} (S + \mu) (h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^2) ;$$

$$p^i = \partial_0 u [\dot{\nabla}^i u - \varphi^i \partial_0 u] + \partial_0 \dot{v}_\ell [\dot{\nabla}^i v^\ell - \varphi^i \partial_0 v^\ell] + \partial_0 h_{\ell r} [\dot{\nabla}^i h^{\ell r} - \varphi^i \partial_0 h^{\ell r}] \\ - 2\xi [H^{ir} u \partial_0 \dot{v}_r - H^{\ell i} \partial_0 \dot{v}^r h_{\ell r}] - 2 \partial_0 f^{\alpha i} k_\alpha + \frac{1}{2} \partial_0 h \partial^\ell h .$$

A priori, p^0 n'a pas un signe constant et $\int \xi p^0 \text{vol}$ ne semble pas pouvoir permettre de définir une norme. Il faudrait pouvoir supposer les coordonnées choisies de façon que l'on ait

$$v_i = 0 \quad (k^\alpha - 2 \partial_0 f^{\alpha 0}) k_\alpha = 0 ,$$

ce qui ne semble pas avoir un sens physique.

Etude du cas particulier où $g_{0i} = 0$, $g_{00} = 1$, $k^\alpha = 0$. — Le système aux variations de la relativité générale dans le cas extérieur et dans l'hypothèse où la jauge est nulle s'écrit

$$(S') \quad \Delta h + \mu h = 0 \quad .$$

On a ici

$$\begin{aligned} - [\Delta h]_{oo} &= \partial_{oo} u + \dot{\nabla}_\ell \dot{\nabla}^\ell u \\ - [\Delta h]_{oi} &= \partial_{oo} \dot{V}_i + \dot{\nabla}_\ell \dot{\nabla}^\ell \dot{V}_i - \dot{R}_{i\ell} \dot{V}^\ell \\ - [\Delta h]_{ij} &= \partial_{oo} \dot{h}_{ij} + \dot{\nabla}_\ell \dot{\nabla}^\ell \dot{h}_{ij} + B_{ij,r\ell} h^{r\ell} \quad . \end{aligned}$$

Les variables sont séparées. On peut écrire une équation de conservation pour chacune des variables u , \dot{V} , \dot{h} , d'où on déduira une condition suffisante de stabilité pour (S'). Posons en effet :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \|u\| &= \int_{W_3} [(\partial_o u)^2 - g^{r\ell} \partial_r u \partial_\ell u] \text{vol} \\ \|\dot{V}\| &= - \int_{W_3} [\partial_o \dot{V}^i \partial_o \dot{V}_i - g^{r\ell} \dot{\nabla}_r \dot{V}^i \dot{\nabla}_\ell \dot{V}_i] \text{vol} \\ \|\dot{h}\| &= \int_{W_3} [\partial_o \dot{h}^{ij} \partial_o \dot{h}_{ij} - g^{r\ell} \dot{\nabla}_r \dot{h}^{ij} \dot{\nabla}_\ell \dot{h}_{ij}] \text{vol} \quad . \end{aligned} \right.$$

On obtient

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \|u\| - \int_{W_3} \mu u^2 \text{vol} &= C_1 \\ \|\dot{V}\| + \int_{W_3} (\dot{R}_{i\ell} + \mu g_{i\ell}) \dot{V}^i \dot{V}^\ell \text{vol} &= C_2 \\ \|\dot{h}\| + \int_{W_3} (B_{ij,r\ell} - \mu g_{ir} g_{j\ell}) \dot{h}^{ij} \dot{h}^{r\ell} \text{vol} &= C_3 \quad , \end{aligned} \right.$$

où C_1 , C_2 , C_3 désignent trois constantes. Posons encore

$$M_{ij,r\ell} = B_{ij,r\ell} - \frac{1}{2} \mu (g_{ir} g_{j\ell} + g_{jr} g_{i\ell}) \quad .$$

On sait que \dot{h}^{ij} , tenseur symétrique d'ordre 2 au point x de W_3 , peut être considéré comme un vecteur h^I de l'espace de dimension 6 des tenseurs symétriques d'ordre 2 de W_3 en x . Sur cet espace, $M_{ij,r\ell}$ définira une forme quadratique dont nous désignerons les coefficients par M_{IJ} . La troisième des équations (7) s'écrira

$$\|\dot{h}\| + \int_{W_3} M_{IJ} h^I h^J \text{vol} = C_3 \quad .$$

On obtient le théorème suivant.

THÉORÈME. - Étant donnée une métrique dont les coefficients $g_{\alpha\beta}$ vérifient les postulats de la relativité générale ainsi que les deux hypothèses suivantes :

1° La métrique est statique au sens de LEVI-CIVITA, $g_{00} = 1$,

2° $R_{ij} + \mu g_{ij}$, où μ désigne une constante négative, et M_{IJ} définissent deux formes quadratiques positives, l'équation

$$(\Delta + \mu) h = 0$$

où Δ est le laplacien associé à la métrique $g_{\alpha\beta}$, h un tenseur symétrique d'ordre 2 , admet une solution nulle stable pour la norme

$$\|\dot{h}\| = \|u\| + \|\dot{v}\| + \|h\|$$

où $\|u\|$, $\|\dot{v}\|$, $\|h\|$ sont définis par les équations (6).

Étude d'un deuxième cas particulier. - Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME. - Tout modèle d'Univers stationnaire, à section W_3 compacte ou à comportement asymptotique euclidien, pour lequel les lignes de courant de la matière, supposée schématisée sous forme de matière pure, coïncident avec les lignes de temps, est instable.

On sait, d'après les travaux de A. LICHNEROWICZ, qu'un tel modèle d'Univers est partout statique au sens de LEVI-CIVITA, et que $u_i = u^i = 0$. Le vecteur u^α étant de longueur 1 , on a alors

$$u_0 = \xi , \quad u^0 = \frac{1}{\xi} \quad .$$

L'équation de conservation

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = 0$$

entraîne ici

$$\partial_\alpha \xi = 0 \quad .$$

Donc

$$\xi = \text{Cte} \quad .$$

On pourra évidemment toujours choisir $\xi = 1$. On en déduit

$$R_{00} = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = u^0 = 1 \quad .$$

D'où

$$S_{00} = \frac{1}{2} (S + \mu) = \chi\rho \quad .$$

Mais, par contraction de $S_{\alpha\beta} = \chi\rho u_\alpha u_\beta$, il vient

$$S = \chi\rho \quad .$$

On a donc aussi $\mu = \chi\rho$.

L'univers stationnaire étant ainsi défini, les équations aux variations correspondantes sont les suivantes :

- Par variation de l'équation

$$R_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (S + \mu)$$

où

$$S_{\alpha\beta} = \chi\rho u_\alpha u_\beta , \quad S = \chi\rho \quad ,$$

on obtient, pour $\alpha = \beta = 0$,

$$(8) \quad -\frac{1}{2} (\partial_{00} h_{00} + \dot{\nabla}_\ell \dot{\nabla}^\ell h_{00} - 2\partial_0 k_0) = \frac{1}{2} \chi\rho_1 + 2\chi\rho v_0 - h_{00} \chi\rho$$

(on a posé $\rho_1 = \delta\rho$, $v_\alpha = \delta u_\alpha$) ..

- Par variation de l'équation

$$u_\alpha u^\alpha = 1 \quad ,$$

on obtient

$$(9) \quad h_{00} = 2v_0 \quad .$$

- Par variation des équations de conservation

$$\nabla_{\alpha}(\rho u^{\alpha}) = 0, \quad u^{\beta} \nabla_{\beta} u_{\alpha} = 0$$

il vient

$$(10) \quad \begin{cases} \partial_0 \rho_1 + \rho \nabla_{\alpha} v^{\alpha} - \rho k_0 = 0 \\ \partial_0 v_{\alpha} - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} h_{00} = 0 \end{cases} .$$

Tenons compte de (9) : ces deux équations entraînent

$$\begin{cases} \partial_0 \rho_1 + \frac{1}{2} \rho \partial_0 h_{00} + \rho \dot{\nabla}_i v^i - \rho k_0 = 0 \\ \partial_0 v_i - \frac{1}{2} \partial_i h_{00} = 0 \end{cases} .$$

On élimine v_i entre ces deux équations. Il vient

$$\partial_{00} \rho_1 + \frac{1}{2} \rho [\partial_{00} h_0 + \dot{\nabla}_i (\partial^i h_{00}) - 2\partial_0 k_0] = 0 \quad .$$

D'autre part l'équation (8), où l'on a tenu compte de (9), s'écrit

$$\frac{1}{2} (\partial_{00} h_{00} + \dot{\nabla}_{\ell} (\partial^{\ell} h_{00}) - 2\partial_0 k_0) = -\frac{1}{2} \chi \rho_1 \quad .$$

On a donc

$$\partial_{00} \rho_1 - \frac{1}{2} \chi \rho \cdot \rho_1 = 0 \quad ,$$

Ce qui démontre le théorème.
