Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Pierre Pigeaud

Le schéma fluide parfait généralisé en théorie de Jordan-Thiry

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 5, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A5_0>

13 janvier 1962

LE SCHÉMA FLUIDE PARFAIT GÉNÉRALISÉ EN THÉORIE DE JORDAN-THIRY

par Pierre PIGEAUD

1. Rappels concernant l'étude du schéma matière pure généralisé.

Lors d'un précédent exposé, nous avons présenté une façon de concevoir la généralisation d'un schéma matière pure en théorie pentadimensionnelle. Pour obtenir des équations de mouvement correctes on doit supposer que le tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ définit un indice dans V_5, soit :

$$\theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha\, v_\beta - k\, \gamma_{\alpha\beta}\,, \qquad dk = \varepsilon r\, d(\mathrm{Log}\sqrt{\xi})\ , \qquad r = \frac{\chi_0\, \rho\xi}{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \quad .$$

Ceci revient à supposer que la trajectoire pentadimensionnelle d'une masse d'épreuve est géodésique de la variété V_5 munie de sa métrique conforme ; le principe de descente permet d'associer par projection une trajectoire quadridimensionnelle géodésique de la métrique finslérienne définie par

$$\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}\, ds^* + h\beta_0\, \varphi \qquad ;$$

nous obtenons ainsi, dans le cas non chargé $(h = 0)$, une trajectoire géodésique de la métrique conforme de Mme HENNEQUIN. La variété quotient, munie de cette métrique conforme, peut alors être identifiée (tant du point de vue des équations de mouvement que du calcul des potentiels $\overset{*}{g}_{ij}$) à l'espace temps de la relativité. Les seules différences, par rapport à la théorie classique, relèvent d'une seconde approximation des calculs et sont dues au fait que l'on doit considérer un pouvoir diélectrique variable dans le vide, représenté par ξ^3.

Les équations de conservation s'interprètent, en métrique conforme de V_5, en substituant au tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ un tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ conservatif dans cette dernière métrique

$$(1) \qquad D_\alpha(r\, v^\alpha\, v_\beta - k\, \gamma^\alpha_\beta) \equiv \xi^{5/2}\, \overset{*}{D}_\alpha(r\, \xi^{-5/2}\, \overset{*}{v}^\alpha\, \overset{*}{v}_\beta) = 0 \quad ,$$

$$\overset{*}{X}_{\alpha\beta} = r\, \xi^{-5/2}\, \overset{*}{v}_\alpha\, \overset{*}{v}_\beta \quad .$$

Les conditions $\overset{*}{D}_\alpha \overset{*}{X}{}^\alpha{}_\beta = 0$ donnent lieu aux équations de mouvement

$$\frac{d}{dt}(\overset{*}{X}{}^4{}_A \sqrt{\overset{*}{\gamma}}) = \frac{1}{2}\, \partial_A\, \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} (\overset{*}{X}{}^{\alpha\beta} \sqrt{\overset{*}{\gamma}}) \qquad , \tag{2}$$

$(A = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ;\ \alpha\ ,\ \beta = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4)$.

Dans l'hypothèse d'un schéma gravitationnel pur $(v_0 = h = 0)$ il vient

$$\overset{*}{X}{}^{0\alpha} \sqrt{\gamma^*} = 0 \ ; \qquad \overset{*}{X}{}^{ij} \sqrt{\gamma^*} = \chi_0\, \rho\, \overset{*}{u}{}^i\, \overset{*}{u}{}^j \sqrt{-\,g^*} \ ; \qquad \overset{*}{\gamma}_{ij} = \overset{*}{g}_{ij})$$

$\overset{*}{u}$ est le vecteur unitaire (en métrique conforme) tangent à la ligne spatio-temporelle. Les équations du mouvement se réduisent exactement aux équations de la relativité ; remarquons que la densité tensorielle $\overset{*}{X}_{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*}$ intervient de façon essentielle dans l'élaboration des équations de mouvement.

2. Le schéma fluide parfait généralisé.

La dernière remarque effectuée au paragraphe précédent nous permet de déterminer un tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ susceptible de représenter convenablement un schéma fluide parfait dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle : la densité tensorielle associée doit être choisie de façon à ce que, en l'absence de charges, les composantes de mêmes indices i , j , coïncident avec celles de la densité tensorielle relativiste, soit :

$$\overset{*}{X}_{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*} = \chi_0 \left[(\rho + \frac{p}{c^2})\ \overset{*}{v}_\alpha\, \overset{*}{v}_\beta - \frac{p}{c^2}\, \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} \right] \sqrt{-\,g^*} \qquad . \tag{3}$$

Les équations de mouvement s'écrivent alors sous la forme remarquable

$$\frac{d}{dt}\left[(\rho + \frac{p}{c^2})\ \overset{*}{u}{}^4\ u^*{}_A \sqrt{-\,g^*} \right] \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}\, \partial_A\, g^*_{ij} \left\{ \left[(\rho + \frac{p}{c^2})\ u^{*i}\, u^{*j} - \frac{p}{c^2}\, g^{*ij} \right] \sqrt{-\,g^*} \right\} + \frac{1}{c^2}\, \xi^{3/2}\, \partial_A (p \xi^{-3/2} \sqrt{-\,g^*}) \ ,$$

où la seule différence avec les équations relativistes réside dans l'intervention au dernier terme de la racine carrée du pouvoir diélectrique du vide (la contribution correspondante est d'ordre $1/c^2$ vis-à-vis des termes de pression).

Dans le cas général d'un schéma unitaire chargé $(h \neq 0)$, le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ définit un indice $\overset{*}{F}$ dans la variété V_5 munie de sa métrique conforme, il vient

$$(5)\quad \begin{cases} \overset{*}{X}_{\alpha\beta} = \dfrac{\chi_0}{1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}}\left[\left(\rho + \dfrac{p}{c^2}\right) v^*_\alpha\, v^*_\beta - \dfrac{p}{c^2}\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta}\right] \xi^{-3/2} \quad , \\[2em] d(\mathrm{Log}\, F^*) = \dfrac{\xi^{3/2} + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^{3/2}}}{\rho c^2 + p}\, d\left[\dfrac{p}{\xi^{3/2} + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}}\right] \quad . \end{cases}$$

Remarquons le développement limité de F^*

$$F^* = 1 + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho c^2} + O(1/c^2) \qquad ;$$

le pouvoir diélectrique n'intervient qu'à l'approximation supérieure, F^* joue ainsi le rôle de l'indice relativiste.

Le problème qui se pose maintenant est le suivant : déterminer en métrique naturelle de V_5 un tenseur conservatif $\theta_{\alpha\beta}$ équivalent (du point de vue des conditions de conservation) au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ aihsi choisi.

Nous savons, d'une part, que ce tenseur doit définir sur V_5 munie de sa métrique naturelle un indice $F = \overset{*}{F}\sqrt{\xi}$; d'autre part, ce tenseur doit être de la forme

$$\theta_{\alpha\beta} = r'\, v_\alpha\, v_\beta - k'\, \gamma_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad r' = \frac{\chi_0 \left(\rho + \dfrac{p}{c^2}\right) \xi}{1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}} \quad .$$

Le scalaire k' se trouve ainsi déterminé par la relation différentielle

$$\frac{dk'}{r'} = d(\mathrm{Log}\, F^*\sqrt{\xi}) \qquad ,$$

c'est-à-dire

$$dk' = \frac{\chi_0\ \rho}{1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}}\,\frac{d\xi}{2} + \frac{\chi_0}{c^2}\left[\xi\ dp' + p'\xi^{5/2}\, d(p'^{-3/2}) + \frac{p'}{2}\, d\xi\right]$$

où l'on a posé

$$p' = \frac{p}{1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}} \qquad .$$

Finalement

(6) $$dk' = \frac{\chi_0 \, \rho}{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \, \xi^3}} \, \frac{d\xi}{2} + \frac{\chi_0}{c^2} \, \xi^2 \, d\left(\frac{p'}{\xi}\right) \quad .$$

Remarquons la forme simple sous laquelle s'écrit la différentielle ; si $p = 0$, nous retrouvons la relation caractérisant le schéma matière pure en théorie unitaire.

On peut aisément vérifier la relation

(7) $$D_\alpha (r' \, v^\alpha \, v_\beta - k' \, \gamma^\alpha_\beta) \equiv \xi^{5/2} \, \overset{*}{D}_\alpha \, \overset{*}{X}{}^\alpha_\beta = 0 \quad ,$$

où $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ est défini par (5) ; cette identité généralise (1) au cas d'un schéma fluide pentadimensionnel, elle met en évidence la substitution des tenseurs lors du changement de métrique dans V_5.

3. Conséquences du choix du tenseur $\theta_{\alpha\beta}$.

Nous avons signalé explicitement les équations de mouvement qui ont motivé la détermination du tenseur second membre ; envisageons plus particulièrement l'équation de continuité résultant des conditions choisies, il vient

$$\overset{*}{D}_\alpha \left[\frac{\chi_0 (\rho + \frac{p}{c^2}) \, \xi^{-3/2}}{F^* (1 + \frac{h^2}{F^{*2} \, \xi^3})} \, \overset{*}{v}{}^\alpha \right] = 0 \quad ,$$

ce qui exprime la conservation, le long d'une ligne de courant de la variété quotient, de la quantité

(8) $$n' = \frac{\chi_0 (\rho + \frac{p}{c^2}) \, \xi^{-3/2}}{F^* (1 + \frac{h^2}{F^{*2} \, \xi^3})} \, \overset{*}{v}{}^4 \sqrt{\gamma^*} = \frac{\chi_0 (\rho + \frac{p}{c^2}) \, \frac{dt}{ds^*} \sqrt{- g^*}}{F^* (1 + \frac{h^2}{F^{*2} \, \xi^3})^{1/2}} \quad ,$$

compte tenu du développement limité de F^*, il vient (ρ étant considéré comme constant en première approximation)

(8') $$n' = \frac{\chi_0 \, \rho \, \frac{dt}{ds^*} \sqrt{- g^*}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \, \xi^3}}} \left[1 + 0\left(\frac{1}{c^4}\right) \right] \quad .$$

La densité énergétique $m^* = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*}$ (densité rigoureusement identique à la densité énergétique relativiste en seconde approximation) apparaît ainsi comme la densité la plus conservative (en l'absence de charges) associée au schéma fluide parfait généralisé, en présence de charges il faudra lui substituer la quantité

$$\frac{m^*}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3}}}$$

ceci constitue une extension cohérente d'un résultat classique obtenu en relativité.

Envisageons maintenant l'expression, en repères orthonormés de V_4, des équations de Maxwell

$$\text{(9)} \qquad \overset{*}{\nabla}_{\underline{j}} \overset{*}{H}{}^{\underline{j}}{}_{\underline{i}} = 4\pi . \frac{\beta_0 h(\rho + \frac{p}{c^2})}{F^* \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3}}} . \overset{*}{u}_{\underline{i}} \qquad ;$$

nous en déduisons l'expression de la densité de charges ainsi que celle de la densité énergétique associée (évaluée naturellement en métrique conforme), soit

$$\text{(10)} \qquad \mu = \frac{\beta_0 h(\rho + \frac{p}{c^2})}{F^* \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3}}} , \qquad e^* = \mu \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*} = \frac{\beta_0 h}{\chi_0} n' \qquad .$$

Nous constatons que la densité énergétique e^* est conservée le long des lignes de courant. Notons également la relation approchée

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{e^*}{m^*} = \frac{\beta_0 h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3}}} [1 + 0(\frac{1}{c^4})] \qquad ,$$

où nous observons que, conformément aux résultats relativistes, l'indice du fluide n'apporte aucune contribution en seconde approximation.

Signalons par ailleurs l'expression du potentiel conforme g^*_{44}. Le calcul étant réalisé dans l'hypothèse de la symétrie sphérique, les coordonnées utilisées constituant un système adapté et isotherme, il vient

$$g^*_{44} = c^2 - 2U + \frac{2}{c^2}(U^2 - \zeta') + O(1/c^4) \quad , \tag{11}$$

avec $\Delta\zeta' = \partial_{44} U - \frac{1}{3}(U + 2U_0)\, \Delta U + \frac{3}{2} V^2\, \Delta U + \Delta Z - 12\pi\, Gp$.

Nous obtenons exactement la contribution prévue en relativité en ce qui concerne le terme de pression élastique.

4. Examen du problème de Cauchy.

Sans reprendre l'étude détaillée de ce problème, nous envisagerons particulièrement la détermination du scalaire r' et du vecteur v à la traversée de l'hypersurface portant les données initiales du problème de Cauchy, (cette hypersurface sera définie localement par l'équation $x^4 = 0$).

Cette détermination sera obtenue en considérant le système des conditions de conservation relatif au tenseur $\theta_{\alpha\beta}$; ce tenseur ayant été essentiellement modifié, il est indispensable d'examiner les conséquences de cette modification du point de vue du problème de Cauchy dans le cas intérieur.

Les dérivées $\partial_4\, r'$, $\partial_4\, k'$, $\partial_4\, v^4$ satisfont aux relations

$$\left\{ \begin{aligned} & r'\, v^4\, \partial_4\, v^4 - (\gamma^{44} - {v^4}^2)\, \partial_4\, k' = A^4 \quad , \\ & r'\, \partial_4\, v^4 + v^4(\partial_4\, r' - \partial_4\, k') = B \quad , \end{aligned} \right. \tag{12}$$

où A^4 et B ont des valeurs connues, fonctions des données de Cauchy sur l'hypersurface.

Dans le but de retrouver exactement les résultats relativistes, nous adopterons en premier lieu l'attitude suivante : nous supposerons données a priori les relations définissant r' et k' en fonction de ρ , p , ξ . La dérivée $\partial_4\, \xi$, étant une donnée de Cauchy, cela revient à substituer directement les scalaires ρ et p aux scalaires r' et k' ; il en résulte (dans le cas gravitationnel pur) le système

$$\left\{ \begin{aligned} & (\rho + \frac{p}{c^2})\, v^4\, \partial_4\, v^4 - (\gamma^{44} - {v^4}^2)\, \partial_4\, \frac{p}{c^2} = A'^4 \quad , \\ & (\rho + \frac{p}{c^2})\, \partial_4\, v^4 + v^4\, \varphi'(\frac{p}{c^2})\, \partial_4\, \frac{p}{c^2} = B' \qquad [\rho = \varphi(\frac{p}{c^2})] \quad , \end{aligned} \right. \tag{13}$$

c'est-à-dire exactement le système envisagé en relativité. Il est intéressant de noter que l'étude peut être envisagée sans modification en métrique conforme, ceci résulte du fait que dans l'expression du tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ les scalaires $\overset{*}{r}'$ et $\overset{*}{k}'$ contiennent en facteur une même puissance de ξ, soit $\xi^{-3/2}$.

Considérons maintenant le système initial (12) ; supposons, conformément aux études précédentes, le schéma holonome dans V_5, soit :

$$r' = f(k') \quad ,$$

le système s'écrit

$$(12') \qquad \begin{cases} r' \, v^4 \, \partial_4 \, v^4 - (\gamma^{44} - v^{4^2}) \, \partial_4 \, k' = A^4 & , \\ r' \, \partial_4 \, v^4 + v^4 (f' - 1) \, \partial_4 \, k' = B & . \end{cases}$$

Les variétés, à la traversée desquelles ne peuvent être déterminées simultanément les dérivées, sont telles que

$$(14) \qquad \gamma^{44} - v^{4^2} (2 - f') = 0 \quad .$$

Définies localement par $\Phi(x_\alpha) = 0$, ces variétés satisfont à l'équation

$$(14') \qquad [\gamma^{\lambda\mu} - v^\lambda \, v^\mu (2 - f')] \, \partial_\lambda \, \Phi \, \partial_\mu \, \Phi = 0 \quad .$$

Dans un système de coordonnées adaptées, il vient en termes de V_4

$$(14'') \qquad \left[g^{ij} - u^i \, u^j (2 - f') \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2} \, \xi^3}\right) \right] \partial_i \, \Phi \, \partial_j \, \Phi = 0 \quad .$$

La vitesse de propagation des fronts d'onde généralisés est ainsi donnée par

$$(15) \qquad V^{-2} = c^{-2} \left[1 - (2 - f') \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2} \, \xi^3}\right) \right] \quad ,$$

avec la condition $f' - 2 \geq 0$.

Ces résultats étant ainsi obtenus par généralisation formelle, il faut maintenant en examiner les conséquences.

(A) Schéma matière pure généralisé. - Les scalaires r et k définissent un indice pentadimensionnel $\sqrt{\xi}$, il vient

$$f' = \frac{dr}{dk} = \frac{d(\mathrm{Log}\, r)}{d(\mathrm{Log}\, \sqrt{\xi})} \quad .$$

Exprimons que la vitesse des fronts d'onde est égale à c. Il faut annuler $f' - 2$, soit :

$$d(\mathrm{Log}\, r) = d(\mathrm{Log}\, \xi) \quad ,$$

c'est-à-dire

(16) $$d\left(\frac{r}{\xi}\right) = 0 \quad .$$

En l'absence de charges, diverses raisons nous ont conduits à choisir

$$r = \chi_0\, \rho \xi \quad .$$

Interprétons le fait que r soit effectivement proportionnel à ξ. Nous pouvons affirmer l'équivalence des deux propositions suivantes :

- les fronts d'onde se propagent avec la vitesse de la lumière ;
- la densité massique ρ est conservée le long des lignes de courant.

Envisageons maintenant le cas chargé, alors

$$r = \frac{\chi_0\, \rho\xi}{1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\, \xi^3}}$$

la condition $f' - 2 \geqslant 0$ est bien réalisée :

$$f' - 2 = \frac{6h^2}{h^2 + \xi^3} \quad .$$

La vitesse des fronts d'onde est dans ce cas donnée par la formule

(17) $$V = \frac{c}{\sqrt{1 + 6\,\dfrac{h^2}{\xi^3}}} \quad .$$

(B) Schéma fluide parfait généralisé. - Rappelons les expressions de r' et dk' :

$$\begin{cases} r' = \chi_0(\rho' + p')\ \xi \\[2ex] dk' = \chi_0\ \rho'\ \dfrac{d\xi}{2} + \chi_0\ \xi^2\ d\left(\dfrac{p'}{\xi}\right) \end{cases}$$

ayant posé

$$\left\{\begin{array}{l} \rho' = \dfrac{\rho}{1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}} \\[2em] p' = \dfrac{p}{c^2\left(1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}\right)} \end{array}\right. .$$

Nous obtenons, tous calculs faits

$$V^{-2} = c^{-2}\left[1 + \frac{d\rho' - \xi^3\, d\left(\frac{p'}{\xi^3}\right)}{\rho'\, d(\mathrm{Log}\, \xi^{1/2}) + \xi\, d\left(\frac{p'}{\xi}\right)}\left(1 + \frac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}\right)\right] \tag{18}$$

Exprimons que la vitesse des ondes est égale à c, il vient

$$d\rho' - \xi^3\, d\left(\frac{p'}{\xi^3}\right) = 0 \quad ;$$

soit

$$\rho' = \int \xi^3\, d\left(\frac{p'}{\xi^3}\right) + \mathrm{Cte} \quad , \tag{19}$$

revenant aux grandeurs usuelles

$$\rho = \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}\right) \int \frac{\xi^3}{c^2}\, d\left[\frac{p}{\xi^3\left(1 + \frac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}\right)}\right] + \mathrm{Cte} \quad . \tag{19'}$$

Il est clair que le pouvoir diélectrique ξ^3 n'intervient qu'en seconde approximation, il vient

$$\rho - \rho_0 = \frac{p}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right) \quad ,$$

c'est-à-dire l'équation d'état caractérisant le schéma fluide parfait incompressible en relativité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HENNEQUIN (Françoise). - Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry, Bull. scient. Commiss. Trav. hist. et scient., t. 1, 1956, 2e partie : Mathématiques, p. 73-154. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[2] LICHNEROWICZ (André). - Théoriesrelativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).

[3] THIRY (Yves). - Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 30, 1951, p. 275-396 (Thèse Sc. math. Paris. 1950).