Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Joseph Klein

Notion de tenseur force en mécanique classique et relativiste

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 4, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A4_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
5e année, 1961/62, n° 4

16 décembre 1961

NOTION DE TENSEUR FORCE
EN MÉCANIQUE CLASSIQUE ET RELATIVISTE

par Joseph KLEIN

Dans cette conférence, nous nous proposons de montrer l'intérêt qu'il y a, tant en Mécanique classique qu'en Relativité générale, d'adjoindre à la notion de vecteur force ou vecteur densité de force, celle de tenseur force ou mieux celle de 2-forme tenseur force.

I. Tenseur-force en Mécanique analytique.

1. Equations de Lagrange dans le formalisme homogène.

Considérons un système dynamique (S) à liaisons holonomes bilatérales parfaites admettant n degrés de liberté x^k.

Soit V_{n+1} son espace-temps de configuration. Un système de coordonnées locales d'un point de V_{n+1} est défini par $x^1 , \dots , x^n$ et $t = x^{n+1}$.

Les trajectoires du système (S) dans V_{n+1} sont définies par les n équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \partial_{k'} \mathcal{L} - \partial_k \mathcal{L} = Q_k \qquad , \tag{1}$$

$\mathcal{L}$ étant le lagrangien de (S), les Q_k les coefficients de la forme : travail élémentaire, ces coefficients pouvant dépendre à la fois des x^k, de t et des x'^k.

Passons au formalisme homogène suivant un procédé maintenant classique. Soit u un paramètre arbitraire.

Posons

$$t = x^{n+1} \quad , \qquad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \quad \text{où} \quad \alpha = 1 , \dots , n+1$$

et

$$L = \mathcal{L}(x^\alpha , \frac{\dot{x}^k}{\dot{x}^{n+1}}) \, \dot{x}^{n+1} \qquad .$$

Nous avons :

$$\partial_{\dot{k}} \mathcal{L} = \partial_{k'} L \quad \text{et} \quad \partial_{\dot{n+1}} L = \mathcal{L} - x'^k \partial_{k'} \mathcal{L} = - \mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ est l'hamiltonien correspondant à $\mathcal{L}$.

Les équations (1) deviennent après multiplication par $\dot{x}^{n+1}$:

$$\frac{d}{du} \partial_{\dot{k}} L - \partial_k L = Q_k \dot{x}^{n+1} = X_k \quad . \tag{2}$$

Posons

$$P_\alpha (L) = \frac{d}{du} \partial_{\dot{\alpha}} L - \partial_\alpha L$$

L étant homogène de degré 1 par rapport aux $\dot{x}$ ($\dot{h}$ 1 dans la suite) nous avons l'identité :

$$P_\alpha (L) \dot{x}^\alpha = 0 \quad . \tag{3}$$

Nous en déduisons que

$$P_{n+1} (L) \dot{x}^{n+1} = - P_k (L) \dot{x}^k = - X_k \dot{x}^k$$

d'où la $(n + 1)$-ième équation de Lagrange :

$$P_{n+1} (L) = X_{n+1} \quad \text{avec} \quad X_{n+1} = - Q_k \dot{x}^k \quad .$$

Cette équation exprime le théorème bien connu de Painlevé traduit par l'équation :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = Q_k x'^k \quad .$$

Finalement le système des équations de Lagrange est :

$$P_\alpha (L) = X_\alpha \quad . \tag{4}$$

Le vecteur X dont les composantes X_α sont $\dot{h}$ 1 est, par définition, le vecteur force généralisée ; il vérifie l'identité

$$X_\alpha \dot{x}^\alpha = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire est toujours orthogonal à la vitesse.

2. Equations du mouvement dans l'espace des états.

Désignons par $\mathcal{V}$ l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V_{n+1} et par W l'espace fibré des directions tangentes à V_{n+1} ; W est appelé espace-temps d'extension en phase ou espace des états.

Soit Z un point de $\mathcal{V}$ se projetant en x sur V_{n+1}. Si x^α est un système de coordonnées locales de x, nous prendrons comme coordonnées locales de Z les

$2n+2$ nombres x^α et y^α où les y^α sont les composantes sur le repère naturel en x de V_{n+1}, correspondant aux x^α, d'un vecteur arbitraire de T_x (espace tangent en x à V_{n+1}). Z se projette en z sur W ; comme coordonnées de z nous prendrons encore les x^α, y^α, ces dernières n'étant définies qu'à un facteur de proportionnalité positif près.

Un champ de tenseurs défini sur $\mathcal{V}$ semi-basique est une application qui à tout point Z de $\mathcal{V}$ fait correspondre un élément de l'algèbre tensorielle affine construite sur T_x.

Les tenseurs intervenant dans la suite sont dits restreints $\mathring{h}\,k$ si leurs composantes sont homogènes de degré k par rapport aux variables y^α. Si $k=0$, le tenseur sera dit défini sur W. Nous dirons simplement tenseur $\mathring{h}\,k$ pour un tenseur semi-basique restreint de degré k par rapport aux y^α.

A une trajectoire sur V_{n+1} correspond une trajectoire sur W définie par le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dx^\alpha}{dt} = y^\alpha \\ \partial_{\dot\alpha\beta} L \dfrac{dy^\beta}{du} + (\partial_{\dot\alpha\beta} L - \partial_{\alpha\dot\beta} L) \dfrac{dx^\beta}{du} = X_\alpha \end{cases} .$$

Par un point $z(x, y)$ de W passe une trajectoire et une seule ; cette trajectoire est dite un chemin basique de W ; un chemin non basique de W étant un chemin se projetant sur la base suivant une succession d'éléments linéaires non tous tangents au lieu de x.

3. Définition du tenseur force.

Le vecteur force X_α est $\mathring{h}\,1$ par définition.

Dans les applications il se présente souvent sous la forme :

$$X_\alpha = S_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta ,$$

les $S_{\alpha\beta}$ étant antisymétriques et indépendants des $\dot{x}$.

Nous avons alors :

$$(5) \qquad S_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\beta} X_\alpha = \frac{1}{2} (\partial_{\dot\beta} X_\alpha - \partial_{\dot\alpha} X_\beta) .$$

Dans le cas général nous appellerons tenseur-force du système (S) le tenseur défini par les formules (5).

De l'homogénéité des X_α et de l'identité $X_\alpha \dot{x}^\alpha = 0$, on déduit bien que

$$S_{\alpha\beta}\, \dot{x}^{\beta} = X_{\alpha} \ .$$

Il en résulte que $S_{\alpha\beta}$ est un tenseur $\dot{h}$ 0 , c'est-à-dire défini sur W .

4. Interprétation géométrique des trajectoires.

1° Considérons l'espace de Finsler $\mathfrak{F}$ défini sur V_{n+1} par

$$ds = L(x\ ,\ \dot{x})\ du \ .$$

Posons

$$\ell_{\alpha} = \partial_{\dot{\alpha}} L \ .$$

Les ℓ_{α} sont les composantes d'un vecteur unitaire en x . Les équations de Lagrange se mettent alors sous la forme

$$\frac{\nabla \ell_{\alpha}}{ds} = X_{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\nabla \ell_{\alpha}}{ds} = \frac{X_{\alpha}}{L} = F_{\alpha}$$

Elles expriment que les trajectoires du système dynamique (S) sont les chemins de $\mathfrak{F}$ tels qu'en tout point le vecteur courbure du chemin soit égal au vecteur force.

2° L'introduction du tenseur $S_{\alpha\beta}$ permet de définir sur V_{n+1} une connexion linéaire de directions telle que les trajectoires de (S) soient pour cette connexion des géodésiques.

L'espace ainsi obtenu se réduit à l'espace de Finsler défini par L lorsque $S_{\alpha\beta} = 0$.

Les conventions à la base d'un tel espace, dit S-finslérien, ne se distinguent des conventions d'Elie CARTAN pour un espace de Finsler que par la dernière : les $\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}$ ne sont plus symétriques par rapport aux 2 derniers indices ; on pose en effet

$$\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma^{*}_{\alpha\gamma\beta} = \ell_{\alpha}\, S_{\beta\gamma} \ .$$

Ces conventions déterminent une connexion et une seule, telle que

$$\frac{\nabla_S\, \ell_{\alpha}}{du} = \Gamma_{\alpha}(L) - S_{\alpha\beta}\, y^{\beta} \ .$$

La différentielle absolue du vecteur unitaire ℓ_{α} s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla_S\, \ell_{\alpha} &= d\ell_{\alpha} - \omega^{\lambda}_{\alpha}\, \ell_{\lambda} \ , \\ &= d\ell_{\alpha} - \Gamma^{*\lambda}_{\alpha\beta}\, \ell_{\lambda}\, dx^{\beta} \ , \end{aligned}$$

d'où

(6) $$\nabla_S \ell_\alpha \wedge dx^\alpha = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad .$$

Cette 2-forme Ω va jouer un rôle fondamental dans la suite.

5. Théorèmes fondamentaux.

1° Soit C_0 un chemin non basique de W, fermé ou non ; considérons les trajectoires passant par les points de C_0 ; limitons-les à C_0 et C_1, chemin non basique homotope à C_0. Soit Γ la 2-chaîne de W ainsi définie.

Posons

$$I = \int_\Gamma \Omega$$

avec

$$\Omega = \nabla_S \ell_\alpha \wedge dx^\alpha$$

et

$$\ell_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L(x, y) .$$

Soit $x^\alpha = f^\alpha(u, v)$, $y^\alpha = g^\alpha(u, v)$ une représentation paramétrique de $\Gamma : \bar\Gamma \to \Gamma$ telle que les trajectoires soient les courbes $v =$ Cte.. On a alors

$$I = \int_{\bar\Gamma} \left(\frac{\nabla_S \ell_\alpha}{du} \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} - \frac{\nabla_S \ell_\alpha}{dv} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \right) du\, dv \quad .$$

Or $\dfrac{\nabla_S \ell_\alpha}{du} = 0$, $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u}$ est colinéaire à ℓ^α. Comme $\ell^\alpha \dfrac{\nabla_S \ell_\alpha}{dv} = 0$, l'intégrale I est nulle quelle que soit Γ.

Nous dirons que Ω définit une relation intégrale d'invariance pour l'ensemble des trajectoires. Il en est de même pour $f\Omega$, f fonction scalaire arbitraire.

Il en résulte que le système des équations du mouvement est le système associé de cette forme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (dx^\alpha)} = 0 \quad ; \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial (dy^\alpha)} = 0 \quad ,$$

ce que l'on vérifie aisément.

2° Supposons C_0 fermé. La 2-chaîne Γ est alors désignée par un tube de trajectoires $\mathcal{T}_0^1$.

$\int_{\mathcal{T}_0^1} \Omega = 0$ s'écrit

$$- \int_{\mathcal{T}_0^1} d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha = \int_{\mathcal{T}_0^1} \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad .$$

En transformant le 1er membre à l'aide de la formule de Stokes, le bord de $\mathcal{T}_0^1$ étant $C_0 - C_1$, nous obtenons la formule fondamentale :

$$(7) \qquad \int_{C_1} \ell_\alpha\, dx^\alpha - \int_{C_0} \ell_\alpha\, dx^\alpha = \iint_{\mathcal{T}_0^1} \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad .$$

Nous obtenons ainsi une généralisation du théorème bien connu d'Elie Cartan que nous énoncerons ainsi :

Soit $\mathcal{T}_0^1$ un tube de trajectoires de l'espace des états de bord $C_0 - C_1$; C_0 et C_1 étant deux 1-cycles homotopes, la différence des circulations du vecteur vitesse $\ell_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L$ le long de C_1 et C_0 est égal au flux du tenseur force à travers le tube.

6. Equations canoniques du mouvement..

Prenons comme coordonnées d'un point z de W les $2n + 2$ variables x^α et $\ell_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L$.

Les ℓ_α sont les composantes covariantes d'un vecteur unitaire tangent à V_{n+1} de composantes contravariantes ℓ^α.

Les x^α, ℓ_α sont donc liés par une relation de la forme

$$H(x^\alpha , \ell_\alpha) = 1 \quad ,$$

se déduisant de $L(x^\alpha , \ell^\alpha) = 1$ par changement de variable.

En écrivant le système associé de

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta ,$$

compte tenu de

$$H = \partial_\alpha H\, dx^\alpha + \partial^\alpha H\, d\ell_\alpha = 0 ,$$

nous obtenons le système des équations canoniques :

$$\mathrm{I} \quad \begin{cases} \dfrac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha H \\[2mm] \dfrac{d\ell_\alpha}{ds} = -\partial_\alpha H + S_{\alpha\beta}\, \partial^\beta H , \end{cases}$$

ou encore

(II) $$\begin{cases} \dfrac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha H \\ \dfrac{d\ell_\alpha}{ds} - S_{\alpha\beta}\dfrac{dx^\beta}{ds} = -\partial_\alpha H \end{cases} ,$$

en désignant par s l'arc de trajectoire en projection sur V_{n+1}. On vérifie que le système I (ou II) admet l'intégrale première $H = Cte$. Les trajectoires sont donc les courbes intégrales de I ou II vérifiant la condition initiale

$$H(x_0 , \ell_0) = 1 .$$

Considérons les 2 matrices antisymétriques,

$$E_S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & S \end{pmatrix}$$

et

$$J_S = \begin{pmatrix} S & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} ,$$

S étant la matrice d'éléments $S_{\alpha\beta}$, 0 et I respectivement la matrice nulle et la matrice unité d'ordre $n + 1$.

J_S est la matrice associée à Ω, E_S son inverse.

En désignant par $\left(\dfrac{dz}{ds}\right)$ la matrice colonne formée par $\dfrac{dx^\alpha}{ds}$ et $\dfrac{d\ell_\alpha}{ds}$, par $(\mathrm{grad}_z H)$ la matrice colonne formée par les $\partial_\alpha H$ et $\partial^\alpha H$, les systèmes I et II se mettent sous les formes remarquables :

(III) $$\left(\frac{dz}{ds}\right) = E_S \, (\mathrm{grad}_z H)$$

ou

(IV) $$J_S \left(\frac{dz}{ds}\right) = (\mathrm{grad}_z H) .$$

Si J_S a pour élément a_{AB} où $A, B = 1 , \dots , 2n + 2$; si x^A représente x^α si $A \leqslant n + 1$, et ℓ_α si $A > n + 1$, on a :

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{AB} \, dx^A \wedge dx^B$$

et (IV) devient

$$a_{AB} \frac{dx^B}{ds} = \partial_A H .$$

7. Tenseurs-force particuliers.

Si nous supposons les variables x^α, ℓ_α indépendantes, la forme

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

définit sur $\mathcal{V}$ une structure de variété presque symplectique.

Ω définit sur $\mathcal{V}$ une structure symplectique si Ω est fermée ou admet un facteur intégrant.

1er cas : Ω est fermée c'est-à-dire $d\Omega = 0$.

Nous avons :

$$d\Omega = \frac{1}{6} K_{\alpha\beta\gamma}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma + \frac{1}{2} \partial^\gamma S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge d\ell_\gamma ,$$

avec

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha S_{\beta\gamma} + \partial_\beta S_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma S_{\alpha\beta}$$

$d\Omega = 0$ si et seulement si $\partial^\gamma S_{\alpha\beta} = 0$ c'est-à-dire si les $S_{\alpha\beta}$ sont indépendants de ℓ et si $K_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Dans ces conditions il existe localement un champ de vecteurs $\vec{A}(x)$ défini sur V_{n+1} tel que :

$$(8) \qquad S_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha .$$

Nous dirons que le tenseur force dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$. Nous avons alors

$$\Omega = d(\ell_\alpha\, dx^\alpha + A_\alpha\, dx^\alpha) .$$

D'après le paragraphe 5, la forme

$$\omega = (\ell_\alpha + A_\alpha) dx^\alpha$$

définit un invariant intégral relatif pour l'ensemble des trajectoires :

$$\int_{C_1} (\ell_\alpha + A_\alpha) dx^\alpha = \int_{C_0} (\ell_\alpha + A_\alpha) dx^\alpha .$$

Les trajectoires sur V_{n+1} sont les géodésiques de l'espace de Finsler défini par :

$$ds = (\partial_{\dot\alpha} L + A_\alpha) dx^\alpha = (L + A_\alpha \dot{x}^\alpha) du$$

ou, ce qui est équivalent, les extrémales de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} (L + A_\alpha \dot{x}^\alpha) du \quad .$$

<u>2e cas</u> : Ω <u>admet un facteur intégrant</u>.

Cela veut dire qu'il existe localement une fonction $f(x, \ell)$ telle que :

$$d(f\Omega) = df \wedge \Omega + fd\Omega = 0 \quad ,$$

ou

$$d\Omega = -\frac{df}{f} \wedge \Omega = d\varphi \wedge \Omega$$

en posant $\varphi = - \log |f|$.

En explicitant, nous obtenons :

$$\frac{1}{6} K_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma + \frac{1}{2} \partial^\gamma S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge d\ell_\gamma$$
$$= (\partial_\gamma \varphi \, dx^\gamma + \partial^\gamma \varphi \, d\ell_\gamma) \wedge (d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta),$$

d'où par identifications :

$\partial^\gamma \varphi = 0$ $\quad$ φ ne dépend que des x ,

$\partial^\gamma S_{\alpha\beta} = 0$ $\quad$ si $\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \neq \beta$,

$\partial^\gamma S_{\gamma\beta} = \partial_\beta \varphi$ $\quad$ (sans sommation sur γ).

$S_{\alpha\beta}$ est donc de la forme :

$$S_{\alpha\beta} = \ell_\alpha \partial_\beta \varphi - \ell_\beta \partial_\alpha \varphi + T_{\alpha\beta}(x) \ .$$

Pour le tenseur $T_{\alpha\beta}$ on trouve, S désignant une permutation circulaire,

$$S(\partial_\gamma T_{\alpha\beta} - \partial_\gamma \varphi T_{\alpha\beta}) = 0 \quad ,$$

qui exprime que $e^{-\varphi}$ est un facteur intégrant pour

$$\frac{1}{2} T_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad ,$$

c'est-à-dire qu'il existe localement un potentiel vecteur A_α tel que :

$$T_{\alpha\beta} = e^\varphi (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \quad .$$

Nous trouvons que si Ω admet un facteur intégrant, $S_{\alpha\beta}$ est de la forme :

(9) $$S_{\alpha\beta} = \ell_\alpha \partial_\beta \varphi - \ell_\beta \partial_\alpha \varphi + e^\varphi (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \quad .$$

On montre qu'en tenant compte de $H(x, \ell) = 1$, le tenseur $S_{\alpha\beta}$ est nécessairement de cette forme.

La fonction scalaire φ et le vecteur $\vec{A}$ sont dits potentiel scalaire et potentiel vecteur associés.

Inversement, si $S_{\alpha\beta}$ est de la forme (9), on a

$$e^{-\varphi}\,\Omega = e^{-\varphi}\,(d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \ell_\alpha\, dx^\alpha \wedge d\varphi) + d(A_\alpha\, dx^\alpha)$$
$$= d(e^{-\varphi}\,\ell_\alpha\, dx^\alpha + A_\alpha\, dx^\alpha) .$$

La forme

$$\omega = (e^{-\varphi}\,\ell_\alpha + A_\alpha)\, dx^\alpha ,$$

définit alors un invariant intégral relatif pour l'ensemble des trajectoires ; les trajectoires dans V_{n+1} sont les extrémales de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} (e^{-\varphi}\, L + A_\alpha\, \dot{x}^\alpha)\, du .$$

On montre que Ω admet un facteur intégrant local si et seulement si :

$$d\Omega = \frac{1}{n}\, \partial\Omega \wedge \Omega$$

avec

$$d\Omega = 2\partial^\gamma\, S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha .$$

II. Notion de tenseur-force en Relativité générale.

1. Définition du tenseur-force.

Soit V_4 l'espace-temps de la Relativité générale muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,(x)\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad ;$$

u étant un paramètre quelconque, posons :

$$L^2 = g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta$$

avec

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \quad ,$$

et,

$$\ell_\alpha = \partial_{\dot{\alpha}} L = g_{\alpha\beta} \frac{\dot{x}^\beta}{L} = g_{\alpha\beta}\, \ell^\beta \quad .$$

Supposons que sur un domaine D de V_4 soit définie une distribution énergétique correspondant au tenseur impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$.

Posons :

$$T_{\alpha\beta} = r\ell_\alpha\, \ell_\beta - \theta_{\alpha\beta} \qquad \text{et} \quad \nabla_\alpha\, \theta^\alpha_\beta = rK_\beta \,,$$

les $\theta_{\alpha\beta}$ pouvant dépendre à la fois des x^α et des ℓ^α . Les K_α , qui sont $\dot{h}\,0$, sont les composantes covariantes du vecteur densité de force associé au tenseur énergie $\theta_{\alpha\beta}$ et à la pseudo-densité représentée par le scalaire r .

Les équations de conservation

$$\nabla_\alpha\, T^\alpha_\beta = 0$$

donnent le système différentiel des lignes de courant partout tangentes au vecteur vitesse unitaire.

Ce système différentiel peut être mis sous la forme classique :

$$\ell^\beta\, \nabla_\beta\, \ell_\alpha = (g^\beta_\alpha - \ell_\alpha\, \ell^\beta)\, K_\beta$$

ou

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = (K_\alpha\, \ell_\beta - K_\beta\, \ell_\alpha)\, \ell^\beta$$

ou encore

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{du} = (K_\alpha\, \ell_\beta - K_\beta\, \ell_\alpha)\, \dot{x}^\beta \quad .$$

Posons $X_\alpha = (K_\alpha\, \ell_\beta - K_\beta\, \ell_\alpha)\, \dot{x}^\beta$.

Au vecteur force X_α est associé le tenseur antisymétrique :

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, (\partial_{\dot{\beta}}\, X_\alpha - \partial_{\dot{\alpha}}\, X_\beta) \; .$$

Si les K_α sont indépendants des $\dot{x}$, le tenseur $s_{\alpha\beta}$ se réduit à :

$$K_\alpha\, \ell_\beta - K_\beta\, \ell_\alpha \; .$$

Au tenseur impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ nous avons ainsi fait correspondre de façon canonique un tenseur antisymétrique $s_{\alpha\beta}$ que nous appellerons tenseur-force du schéma considéré.

Le système différentiel des lignes de courant est alors

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = s_{\alpha\beta}\, \ell^\beta \quad ,$$

on a

$$(\nabla_\beta\, \ell_\alpha - \nabla_\alpha \ell_\beta)\, \ell^\beta = s_{\alpha\beta}\, \ell^\beta \, .$$

2. Conséquences.

Les résultats obtenus dans la première partie permettent alors d'énoncer plusieurs théorèmes :

1er THÉORÈME. – Le système différentiel des lignes de courant d'un schéma à tenseur impulsion-énergie quelconque est le système associé de la 2-forme :

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2}\, s_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \, .$$

Cette forme Ω définit une relation intégrale d'invariance pour les lignes de courant ; $\mathcal{C}$ étant une 2-chaîne quelconque engendrée par des lignes de courant :

$$\int_{\mathcal{C}} \Omega = 0 \quad .$$

2e THÉORÈME. – Soient C_0 et C_1 deux cycles homotopes à une dimension entourant un même tube de lignes de courant ; la différence des circulations du vecteur vitesse unitaire le long de C_0 et C_1 est égale au flux du tenseur-force à traver la portion de tube limitée par C_0 et C_1 . D'où la formule

$$\int_{C_1} \ell_\alpha\, dx^\alpha - \int_{C_0} \ell_\alpha\, dx^\alpha = \iint_{\mathcal{C}_0^1} \frac{1}{2}\, s_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad .$$

3e THÉORÈME. – Les lignes de courant sont les géodésiques de l'espace s-riemannien défini par L et le tenseur-force $s_{\alpha\beta}$. Un espace s-riemannien est un espace S-finslérien pour lequel L^2 est une forme quadratique par rapport aux $\dot{x}^\alpha$. Indiquons la définition d'un tel espace.

Sur V_4 , on considère la métrique riemannienne définie par

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,(x)\ \ dx^\alpha\, dx^\beta \, ,$$

et la connexion euclidienne de directions correspondant aux formes de torsion :

$$\Sigma^\alpha = \frac{1}{2}\,(s_{\beta\gamma}\, dx^\beta \wedge dx^\gamma)\, \ell^\alpha .$$

Comme les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants des ℓ^α les formes de connexion ω^α_β se réduisent à

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\ (x\, ,\, \ell)\ dx^\gamma \, .$$

Les Γ sont définis par le système :

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \ell_\alpha s_{\beta\gamma} \end{cases} ,$$

d'où

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma , \alpha] + \frac{1}{2} (\ell_\alpha s_{\beta\gamma} + \ell_\beta s_{\gamma\alpha} - \ell_\gamma s_{\alpha\beta}) .$$

Posons

$$\Sigma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\ell_\alpha s_{\beta\gamma} + \ell_\beta s_{\gamma\alpha} - \ell_\gamma s_{\alpha\beta}).$$

Si les K_α sont indépendants des $\dot{x}$ on a :

$$\Sigma_{\alpha\beta\gamma} = - \ell_\gamma s_{\alpha\beta} .$$

Les formes de courbure

$$\Omega^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu + S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\mu} \nabla\ell_\lambda \wedge dx^\mu$$

sont définies par :

$$S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\mu} = \partial^\lambda \Sigma^\alpha{}_{\beta\mu}$$

et

$$R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} = \overset{o}{R}{}^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} + \overset{o}{\nabla}_\lambda \Sigma^\alpha{}_{\beta\mu} - \overset{o}{\nabla}_\mu \Sigma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Sigma^\rho{}_{\beta\mu} \Sigma^\alpha{}_{\rho\lambda} - \Sigma^\rho{}_{\beta\lambda} \Sigma^\alpha{}_{\rho\mu} ,$$

où $\overset{o}{R}{}^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel de l'espace riemannien et où $\overset{o}{\nabla}$ représente la dérivation dans cet espace.

3. Exemple : Schéma fluide parfait chargé.

Appliquons les considérations précédentes au schéma fluide parfait chargé.

Le tenseur impulsion-énergie d'un tel schéma est défini dans un domaine D de V_4 par

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\ell_\alpha \ell_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} ,$$

ρ est la densité propre, p la pression propre, $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique défini par le tenseur $F_{\alpha\beta}$.

Le système différentiel des lignes de courant est

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = (g^\beta{}_\alpha - \ell^\beta \ell_\alpha) \left(\frac{\partial_\beta p}{\rho + p} + \frac{\mu}{\rho + p} F_{\beta\lambda} \ell^\lambda\right) ,$$

μ étant la densité de charge propre du fluide.

Nous pouvons écrire ces équations sous la forme :

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho + p} (\partial_\alpha p\ell_\beta - \partial_\beta p\ell_\alpha + \mu F_{\alpha\beta})\ell^\beta .$$

Les scalaires ρ , p , μ étant supposés indépendants de la vitesse, les composantes du tenseur-force sont :

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{\rho + p} (\partial_\alpha p\ell_\beta - \partial_\beta p\ell_\alpha + \mu F_{\alpha\beta}) .$$

Supposons que sur D existe un potentiel vecteur global $\vec{A}$ tel que :

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha .$$

Pour que la 2-forme Ω correspondant à $s_{\alpha\beta}$ admette un <u>facteur intégrant</u> il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ sur D telle que :

$$\begin{cases} \partial_\alpha \varphi = \dfrac{\partial_\alpha p}{\rho + p} \\ ke^{-\varphi} = \dfrac{\mu}{\rho + p} \end{cases}, \quad k \text{ étant une constante arbitraire.}$$

Supposons qu'il existe une équation d'état $\rho = f(p)$; nous déduisons des premières conditions que :

$$\varphi = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho + p} .$$

La dernière entraine $\dfrac{\mu e^\varphi}{\rho + p} = k = \text{Cte}$ dans D , e^φ est l'indice F du fluide.

Dans ces conditions le fluide est dit chargé de manière homogène et nous avons

$$s_{\alpha\beta} = \ell_\beta \partial_\alpha \varphi - \ell_\alpha \partial_\beta \varphi + ke^{-\varphi} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) ,$$

et

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + d\varphi \wedge \ell_\alpha dx^\alpha + ke^{-\varphi} d(A_\alpha dx^\alpha) ,$$

Ω admet comme facteur intégrant $e^\varphi = F$,et

$$e^\varphi \Omega = d(F\ell_\alpha dx^\alpha + kA_\alpha dx^\alpha) .$$

Nous en déduisons les <u>résultats classiques</u>.

Les lignes de courant sont caractérisées par l'existence de l'invariant intégral relatif

$$\omega = (F\ell_\alpha + kA_\alpha) dx^\alpha$$

ou la propriété équivalente :

les lignes de courant sont les géodésiques de l'espace de Finsler défini sur V_4 par

$$ds = (F L + kA_\alpha \dot{x}^\alpha) du$$

ou encore :

les lignes de courant sont les extrémales de l'intégrale :

$$\int_{u_0}^{u_1} (F\,L + kA_\alpha\,\dot{x}^\alpha)\,du\ .$$

Cas particuliers .

a. Schéma matière pure :

$$s_{\alpha\beta} = 0\ ; \qquad \omega = \ell_\alpha\,dx^\alpha\ .$$

b. Schéma matière-champ électromagnétique (cas homogène) :

$$s_{\alpha\beta} = kF_{\alpha\beta}\ ; \qquad \omega = kA_\alpha\,dx^\alpha\ .$$

c. Schéma milieu holonome :

$$s_{\alpha\beta} = \ell_\beta\,\partial_\alpha\,\varphi - \ell_\alpha\,\partial_\beta\,\varphi\ ; \quad \omega = F\ell_\alpha\,dx^\alpha\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KLEIN (Joseph). - Espaces variationnels et mécanique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 1-124 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[2] LICHNEROWICZ (André). - Les relations intégrales d'invariance et leurs applications à la dynamique, Bull. Sc. math., Série 2, t. 70, 1946, 1re partie, p. 82-95.

[3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages mathématiques à l'usage des Physiciens).