Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Léon Brillouin

Discussion du rôle effectif des discontinuités de Poincaré

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 1, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A1_0>

DISCUSSION DU RÔLE EFFECTIF DES DISCONTINUITÉS DE POINCARÉ

par Léon BRILLOUIN

1. Introduction.

Je voudrais, dans cet exposé, reprendre et examiner les résultats de précédentes études ([3], chap. V et VI, et [4]) sur un grand théorème de Poincaré. Je parlais des faiblesses de la méthode de Hamilton-Jacobi et j'employais le terme "shortcomings" qui correspond à l'expression française "tourner court". En fait, il ne s'agit pas seulement de la méthode de Hamilton-Jacobi, mais de la Mécanique rationnelle tout entière, qui sur certains problèmes, tourne court sans pouvoir aboutir à une solution pratique acceptable. Je donnerai à la fin de cet exposé un certain nombre d'exemples pour illustrer ces difficultés essentielles.

Tout est basé sur le fameux théorème de Poincaré ([9], chap. VIII, p. 158, et [10], chap. V et VIII) relatif à un système mécanique conservatif (ni dissipation, ni frottements, ni régénération) et spécifiant que, dans le cas général, il n'existe pas d'autre intégrale analytique et uniforme que l'énergie totale. Les exceptions au cas général correspondent aux problèmes pour lesquels on peut séparer certaines variables, et obtenir conservation de la quantité de mouvement, ou du moment de quantité de mouvement, etc. Lorsque le système a toutes ses variables séparables, le théorème de Poincaré ne s'applique plus.

En parlant d'intégrales "analytiques et uniformes", POINCARÉ entend que les développements en série, par rapport à un paramètre quelconque figurant dans le problème, seraient analytiques et continus, avec convergence uniforme. Le paramètre que l'on veut faire varier arbitrairement peut être un paramètre figurant dans l'expression de l'énergie, ou bien l'une des données initiales, peu importe. L'absence de convergence uniforme a pour résultat la possibilité de discontinuités. La solution du problème peut changer brusquement de caractère pour une variation infime du paramètre considéré.

Il est évident qu'une discontinuité de ce genre correspond à une instabilité pratique. Il est physiquement impossible de mesurer rigoureusement tous les paramètres qui définissent le système. Le mathématicien parle de paramètre ayant "certaines valeurs données", et admet que ces données sont rigoureusement définies, sans aucune erreur possible. Le physicien sait que rien ne peut se mesurer rigoureusement, que nos théories, mêmes les meilleures ne sont qu'approximativement valables dans certaines limites, et que nous devons tenir compte des erreurs de mesures, dans toutes les applications possibles. Dans ces conditions, l'instabilité signalée plus haut correspond à l'absence de réponse dans la théorie ! J'ai insisté sur ce point de vue ([3], [4]) et j'en donnerai immédiatement un exemple, dû à E. BOREL ([1], p. 98).

Un déplacement de 1 centimètre sur une masse de 1 gramme, située sur l'étoile Sirius, se traduit par une variation du champ de gravitation terrestre qui dépasse 10^{-100} ... Or, une telle perturbation nous permet de prévoir les mouvements des molécules d'un gaz pour une durée d'environ 1 millionième de seconde ; ensuite la prédiction est impossible. L'exemple choisi par BOREL lui fournit une excellente justification des méthodes statistiques de Boltzmann ; mais en même temps se pose le problème des cas d'instabilité moins flagrants, mais non moins réels. Ce sont ces exemples que nous voulons examiner.

2. La méthode de Hamilton-Jacobi.

Rappelons un exemple simple de la méthode, et considérons la manière dont elle est utilisée par M. BORN [2] dans les problèmes atomiques. Nous prenons un système mécanique conservatif, sans frottements et sans dispositif d'entretien. L'énergie totale est la somme des énergies cinétique et potentielle

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} \quad . \tag{1}$$

Nous avons les variables $x_1 , \dots , x_k , \dots , x_N$ et les moments $p_1 , \dots , p_k , \dots , p_N$ du système étudié, qui dépend en outre d'un certain nombre de paramètres $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$, lesquels peuvent varier légèrement d'un cas à un autre (comme les positions des masses sur l'étoile Sirius dans l'exemple de Borel). Les conditions <u>initiales</u> $x_{10} , \dots , x_{N0}$ et $p_{10} , \dots , p_{N0}$ ne sont pas rigoureusement "données", mais on a pu les <u>déterminer</u> avec des erreurs $\Delta x_{10} , \dots , \Delta x_{N0}$ et $\Delta p_{10} , \dots , \Delta p_{N0}$.

Dans la méthode Hamilton-Jacobi, on cherche une transformation faisant passer des variables x_k , p_k à de nouvelles variables W_k , J_k (DELAUNAY) qui satisfont aux conditions suivantes :

$$E_{tot} = F(J_1 , \dots , J_k , \dots , J_N) \quad . \tag{2}$$

L'énergie totale est une fonction seulement des constantes $J_1 , \dots , J_N$, et les variables angulaires W_k ont des mouvements linéaires en fonction du temps

$$(3) \qquad W_k = \nu_k t + W_{ok} \qquad \nu_k = \frac{\partial F}{\partial J_k} \quad .$$

Au total, le mouvement obtenu est multipériodique, avec les périodes partielles ν_k ; je renvoie au livre classique de M. BORN [2] pour toutes les explications complémentaires.

Ce mouvement multipériodique semble présenter le caractère de stabilité, comme le remarque POINCARÉ. Chaque coordonnée x_k est définie par une relation

$$(4) \qquad x_k = f_k(W_1 \ , \ \dots \ , \ W_N)$$

avec une fonction f_k périodique (de période 2π) par rapport à tous les W_k. Aucune coordonnée physique x_k ne peut croître jusqu'à l'infini, ce qui est un caractère de stabilité !

Oui, mais : les <u>constantes</u> J_k, W_{ok} <u>ne sont pas des variables continues</u> et différentiables des x_{ok}, p_{ok}, ni des α_m, la plus petite variation du paramètre α_m, ou le plus petit changement des valeurs initiales, peuvent provoquer des variations discontinues des J_k, W_{ok}, et conduire à une solution complètement différente de la précédente. Et ceci est incontestablement un type spécial <u>d'instabilité,</u> imposé par le théorème de Poincaré, quoique mal étudié et mal compris dans ses conséquences.

Revenons à la formule (2), et soulignons le <u>paradoxe</u> : l'énergie totale est toujours une fonction continue, différentiable des paramètres du mouvement. Mais la méthode de Hamilton-Jacobi définit cette énergie comme fonction F des quantités J_k qui ne sont pas continues différentiables. Cela semble une étrange gageure. Il faut que la fonction F présente des discontinuités qui compensent celles des J exactement. Que signifient alors les dérivées $\frac{\partial F}{\partial J_k}$ qui donnent les fréquences ν_k ? Leur sens paraît très mystérieux, Il n'est pas exagéré de dire que la méthode de Hamilton-Jacobi <u>tourne court.</u> Son formalisme très élégant est gâché par les discontinuités de Poincaré.

3. <u>Conditions de discontinuité et cas de résonance.</u>

Ces remarques générales laissent une impression pénible, et quelques exemples sont indispensables pour faire comprendre et "sentir" de quoi il s'agit.

Tout d'abord, précisons dans quelles conditions se produisent les discontinuités, La discussion de BORN [2], celle de Poincaré [10] et leur comparaison [4] montrent clairement que les discontinuités apparaissent lorsqu'une fréquence composée est nulle :

(5) $$\nu_n = \sum_k n_k \nu_k = 0$$

où les n_k sont des entiers positifs ou négatifs. On a cru pouvoir escamoter la difficulté en disant que tout va bien, pourvu que les fréquences ν_k soient incommensurables. Mais cette réponse est inacceptable dans un problème physique réel, où toutes les quantités (y compris les ν_k) ne sont définies qu'avec certaines erreurs possibles $\Delta\nu_k$. En outre, il suffit que certaines fréquences composées ν_h soient très petites, sans être identiquement nulles, pour qu'apparaissent des séries divergentes. Ces séries peuvent être semi-convergentes et suffire parfaitement pour donner des solutions approchées mais sans pouvoir fournir une solution mathématique exacte.

Notons, pour plus de précision, que la condition (5) contient les cas de résonance interne. Supposons un système comportant deux variables angulaires W_1, W_2, donc deux fréquences ν_1, ν_2. La condition (5) s'écrit :

(6) $$n_1 \nu_1 = - n_2 \nu_2 \quad .$$

Prenons $n_2 = - n_2'$, avec n_2' positif, et nous obtenons une condition de résonance interne entre l'harmonique n_1 de ν_1 et l'harmonique n_2' de ν_2. La résonance fournit un cas typique d'instabilité par discontinuité.

4. Quelques exemples.

a. Cas de collisions. - Cet exemple est discuté par POINCARÉ lui-même [10] et comporte une discontinuité évidente : une particule A passe à côté de B sans collision, et continue son chemin normalement ; ou bien A frappe la particule B et est déviée. Les deux mouvements sont complètement différents, et il suffit d'un infime changement de données initiales pour passer d'une trajectoire à l'autre.

b. Pendule circulaire. - Un pendule rigide est soutenu par un axe autour duquel il peut tourner. Lancé légèrement, le pendule oscille de part et d'autre de la vecticale. Lancé fortement, il tourne indéfiniment. La discontinuité se produit lorsque le pendule s'arrête à la position instable verticale en haut. A cette position, la fréquence d'oscillation est nulle, la période est infinie, cas particulier de la relation (5) :

$$\nu = 0 \qquad \tau = \infty$$

c. Deux oscillateurs couplés. - Le cas de deux oscillateurs linéaires couplés linéairement est bien connu. Mais imaginons un oscillateur non-linéaire ν_1 couplé à un oscillateur linéaire ν_2. Il y aura des anomalies des mouvements au voisinage des multiples résonances :

$$\nu_2 = \nu_1 \qquad \nu_2 = 2\nu_1 \qquad \nu_2 = 3\nu_1 \quad \ldots \quad \nu_2 = n\nu_1 \quad .$$

C'est donc un modèle typique des relations de résonance interne (6). Le problème a été discuté par D. MAGIROS ([7] et [8]) qui a bien trouvé les discontinuités prévues ci-dessus.

d. Satellite proche de la Terre. - La Terre n'est pas sphérique, mais forme un allipsoïde aplati. La trajectoire d'un satellite artificiel a été calculée par une méthode d'approximations successives, par BROUWER ([5] et [6]) qui trouve un mouvement limite instable à l'inclinaison de 63°. Un cas spécial, permettant une séparation des variables, a été découvert par VINTI ([11]), qui n'obtient aucune trajectoire instable, sauf celles qui passent par les pôles. Il doit y avoir un manque de convergence dans le développement présenté par BROUWER, lorsque l'inclinaison atteint 63°. Ce problème mériterait une discussion approfondie.

Dans tous les cas, on vérifie ce que nous avions prévu : une très petite modification des conditions initiales, ou de la structure du système, suffit à produire un changement fini des trajectoires. Tel est le genre de discontinuité qui correspond à l'absence de convergence uniforme démontré par POINCARÉ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Émile). - Introduction géométrique à quelques théories physiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1914.

[2] BORN (Max). - Vorlesungen über Atommechanik. - Berlin, Springer, 1925.

[3] BRILLOUIN (Léon). - Vie, matière et observation. - Paris, A. Michel, 1959.

[4] BRILLOUIN (Léon). - Poincaré and the shortcomings of the Hamilton-Jacobi method for classical or quantized mechanics, Arch. rat. Mech. and Anal., t. 5, 1960, p. 76-94.

[5] BROUWER (Dirk). - Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, Astron. J., t. 64, 1959, p. 378-397.

[6] BROUWER (Dirk). - Comments on general theories of planetary orbits, Orbit theory, Proc. Symp. appl. Math. [9. 1959. New York University] ; p. 152-166.- Providence, American mathematical Society, 1959.

[7] MAGIROS (Demetrios). - A method for defining principal modes of nonlinear systems utilizing infinite determinants, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 46, 1960, p. 1608-1611.

[8] MAGIROS (Demetrios G.). - On a problem of nonlinear mechanics, Information and Control, t. 2, 1959, p. 297-309.

[9] POINCARÉ (Henri). - La science et l'hypothèse. - Paris, Flammarion, 1906.

[10] POINCARÉ (Henri). - Méthodes nouvelles de la mécanique céleste. - Paris, Gauthier-Villars, 1892.

[11] VINTI (J. P.). - J. of res. of Nat. Bur. of Stand., Série B, t. 63, 1959, p. 105-116 ; t. 65, 1961, p. 131-135 ; Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy, J. of Res. of Nat. Bur. of Stand., Série B, t. 65, 1961, p. 169-201.