SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

ANDRÉ AVEZ

Modèle d'univers stationnaire sans section d'espace globale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 16, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A15_0>

MODÈLE D'UNIVERS STATIONNAIRE SANS SECTION D'ESPACE GLOBALE

par André AVEZ

1. Introduction et notations.

D. AUFENKAMP [1] a démontré qu'il ne pouvait exister d'univers stationnaire à section d'espace compacte en l'absence de constante cosmologique. J'ai étendu [2] ce résultat en montrant qu'il ne pouvait exister de modèle d'univers périodique clos sans constante cosmologique.

Cela pose les problèmes suivants :

Peut-on étendre ces résultats aux espaces-temps compacts les plus généraux en démontrant qu'il existe toujours une section d'espace globale ?

Dans la négative peut-on néanmoins étendre ces théorèmes en l'absence de sections d'espace globales ?

Nous allons répondre à ces questions en construisant un modèle d'univers U doué des propriétés suivantes :

- Il est compact et orientable, mais sans section d'espace globale.
- Il est stationnaire et schématise un fluide parfait - champ électromagnétique.
- Les lignes de temps sont fermées.
- La constante cosmologique est nulle.

Les notations utilisées seront celles de LICHNEROWICZ [3].

2. La topologie de U .

Rappels [4]. - Soient V_n une variété de dimension n , orientable et différentiable, W_{n-1} une sous-variété de dimension $n - 1$, compacte, orientable, et différentiable. Si γ est un lacet de V_n , c'est-à-dire une application continue de T^1 dans V_n , on peut définir un nombre algébrique d'intersection de γ et W_{n-1} orientés. Ce sera l'indice de Kronecker $W_{n-1} \wedge \gamma[1]$. On sait qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie de $\gamma[1]$.

Supposons V_n compact et porteur d'un champ de vecteurs $\vec{u}$ régulier et différentiable, dont les trajectoires γ sont fermées. Si W_{n-1} est transverse à $\vec{u}$, $\vec{u}$ oriente le fibré normal de W_{n-1} . Avec cette orientation, il est clair que $W_{n-1} \wedge \gamma[1] \geq 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $W_{n-1} \cap \gamma = \emptyset$.

LEMME. - Si S^3 est la sphère centrée à l'origine et de rayon unité de l'espace euclidien E^4 rapporté au repère orthonormé $(0\ x\ y\ z\ t)$, il n'existe pas sur S^3 de surface orientable transverse au champ $\vec{u}$ de composantes $(-y\ ,\ x\ ,\ -t\ ,\ z)$.

<u>Démonstration</u>. - La restriction du champ $\vec{u}$ à S^3 définit sur S^3 un champ de vecteurs tangents et unitaires puisque :

$$x(-y) + yx + z(-t) + tz = 0 \quad ,$$
$$(-y)^2 + x^2 + (-t)^2 + z^2 = 1 \quad .$$

Les trajectoires γ sont définies par le système :

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{-t} = \frac{dt}{z} \quad ,$$

dont l'intégration est immédiate. On trouve :

$$x = A\cos\theta\ ,\quad y = A\sin\theta\ ,\quad z = B\cos(\theta + C)\ ,\quad t = B\sin(\theta + C)$$

où les constantes d'intégration A , B , C sont liées par $A^2 + B^2 = 1$. Les trajectoires de $\vec{u}$ sont donc fermées : elles définissent une fibration de Hopf de S^3 . De plus, comme S^3 est simplement connexe, elles sont homotopes à zéro. Par suite, quelle que soit la variété compacte, orientable et différentiable W_2 de S^3 : $W_2 \wedge \gamma[1] = 0$. Le lemme résulte alors de la remarque qui la précède.

LEMME. - Sur la variété $S^3 \times T^1$ il n'existe pas de sous-variété compacte, orientable, différentiable, à trois dimensions, et transverse au champ vectoriel dont la projection sur S^3 est le champ du lemme précédent et dont la projection sur T^1 est nulle.

<u>Démonstration</u>. - Par l'absurde. Soit W_3 une sous-variété de $S^3 \times T^1$, compacte, orientable, différentiable, à trois dimensions, et transverse au champ précité. Pour tout $t \in T^1$, $S^3 \times \{t\}$ coupe W_3 suivant une surface $W_2(t)$, compacte, orientable, différentiable, et transverse au champ du lemme précédent dans $S^3 \times \{t\}$. Par suite $W_2(t) = \emptyset$, cela pour tout t , donc $W_3 = \emptyset$.

THÉORÈME. - Sur la variété $S^3 \times T^1$ il n'existe pas de sous-variété compacte, orientable, différentiable, et orientée dans l'espace au sens d'une métrique hyperbolique normale définie sur $S^3 \times T^1$ et pour laquelle le champ du lemme précédent serait orienté dans le temps.

Démonstration. – Résulte de ce que toute variété orientée dans l'espace est transverse au champ du lemme précédent.

Nous allons obtenir l'univers U comme produit riemannien de S^3 et T^1 convenablement métrisés.

3. La métrique de S^3.

Convenons que les indices latins sont relatifs à S^3. La métrique euclidienne de E^4 induit sur S^3 une métrique elliptique ℓ_{ij}. On a vu que la restriction à S^3 du champ $\vec{u}$ de E^4 y définit un champ de vecteurs tangents et unitaires au sens de ℓ_{ij} : soit u_i. Si r est une constante supérieure à 1, nous munirons S^3 de la métrique

$$g_{ij} = - \ell_{ij} + r u_i u_j \qquad ,$$

dont on s'assure aisément qu'elle est hyperbolique normale. En affectant d'une astérisque les éléments relatifs à g_{ij}, les éléments étoilés étant relatifs à ℓ_{ij}, on a :

$$g^{*ij} = - \ell^{ij} + \frac{r}{r-1} u^i u^j$$

où g^{*ij} est défini par $g_{ik} \, g^{*k\ell} = \delta_i^\ell$.

Calculons le tenseur de Ricci R^*_{ij} relatif à g_{ij}. Le tenseur dérivé du premier ordre du vecteur $\vec{u}$ de E^4 a pour matrice dans le repère $O\,x\,y\,z\,t$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad .$$

Comme cette matrice est antisymétrique, $\vec{u}$ engendre un groupe d'isométries de E^4. Ce groupe laisse invariant S^3 puisque $\vec{u}$ est tangent à S^3. Il induit donc sur S^3, munie de la métrique ℓ_{ij}, un groupe d'isométries. Ainsi $\nabla_i u_j + \nabla_j u_i = 0$. Mais si on pose

$$C_{i\,j}^{\,k} = \Gamma^{*\,k}_{i\,j} - \Gamma^{\,k}_{i\,j} \qquad ,$$

un calcul facile prouve que :

$$C_{i\,j}^{\,k} = \frac{1}{2}\, g^{*k\ell}(\nabla_i\, g_{\ell j} + \nabla_j\, g_{\ell i} - \nabla_\ell\, g_{ij}) \quad .$$

Puisque $\nabla_i\, u_j + \nabla_j\, u_i = 0$, en remplaçant g_{ij} par sa valeur :

$$C_{i\,j}^{\,k} = r(u_j\, \nabla^k\, u_i + u_i\, \nabla^k\, u_j) \quad .$$

Comme $\nabla_i\, u^i = 0$, on tire $C_{i\,j}^{\,i} = 0$.

Avec les notations ci-dessus, des calculs locaux montrent que :

$$R^*_{ij} = R_{ij} + \nabla_k\, C_{i\,j}^{\,k} - \nabla_i\, C_{k\,j}^{\,k} + C_{k\,\ell}^{\,k}\, C_{i\,j}^{\,\ell} - C_{k\,i}^{\,\ell}\, C_{\ell\,j}^{\,k} \quad .$$

Comme il est bien connu, le tenseur de Ricci de S^3 dans la métrique ℓ_{ij} est $R_{ij} = 2\ell_{ij}$, par suite :

$$R^*_{ij} = 2\ell_{ij} + \nabla_k\, C_{i\,j}^{\,k} + r^2\, u_i\, u_j\, \nabla^\ell\, u^k\, \nabla_\ell\, u_k \quad .$$

Pour évaluer $\nabla_k\, C_{i\,j}^{\,k}$ partons de l'identité

$$R_{ki}\, u^k = \nabla^k\, \nabla_i\, u_k - \partial_i\, \nabla^k\, u_k \quad .$$

Elle s'écrit : $2u_i = -\nabla^k\, \nabla_k\, u_i$. Cela, joint à la formule donnant $C_{i\,j}^{\,k}$ entraîne :

$$\nabla_k\, C_{i\,j}^{\,k} = -4ru_i\, u_j + 2r\, \nabla^k\, u_i . \nabla_k\, u_j \quad .$$

Par suite :

$$R^*_{ij} = 2\ell_{ij} - 4r\, u_i\, u_j + 2r\, \nabla^k\, u_i . \nabla_k\, u_j + r^2\, u_i\, u_j\, \nabla^\ell\, u^k\, \nabla_\ell\, u_k \quad .$$

Evaluons $\nabla^k\, u_i . \nabla_k\, u_j$.

Rapportons E^4 au système de coordonnées polaires (x^1 , x^2 , x^3 , x^4) . La distance d'un point M de E^4 à l'origine étant x^4 , (x^1 , x^2 , x^3) fixant la position de la trace de OM sur S^3 . Les indices latins varieront de 1 à 3, les indices majuscules de 1 à 4. Enfin, nous affecterons d'une barre les éléments relatifs à E^4 muni de sa métrique usuelle. Puisque x^4 est la distance OM : $\bar{\ell}^{44} = \bar{\ell}_{44} = 1$. Puisque le système de coordonnées est orthogonal : $\bar{\ell}^{4i} = \bar{\ell}_{4i} = 0$.

Puisque ℓ_{ij} est la métrique induite par le plongement dans E^4 :

$$(\overline{\ell}_{ij})_{S^3} = \ell_{ij} \ , \qquad (\overline{\ell}^{ij})_{S^3} = \ell^{ij} \quad .$$

Puisque le champ u_i de S^3 est la restriction à S^3 du champ $\vec{u}$ de E^4 : $\overline{u}^4 = \overline{u}_4 = 0$, $(\overline{u}_i)_{S^3} = u_i$.

Par suite :

$$(\overline{\nabla}_i \, \overline{u}_j)_{S^3} = (\partial_i \, \overline{u}_j - \overline{\Gamma}_i{}^A{}_j \, \overline{u}_A)_{S^3} = (\partial_i \, u_j - \overline{\Gamma}_i{}^k{}_j \, u_k)_{S^3} \quad .$$

Mais :

$$(\overline{\Gamma}_i{}^k{}_j)_{S^3} = \frac{1}{2}(\overline{\ell}^{kA}(\partial_i \, \overline{\ell}_{Aj} + \partial_j \, \overline{\ell}_{Ai} - \partial_A \, \overline{\ell}_{ij}))_{S^3}$$

$$= \frac{1}{2} \, \ell^{ks}(\partial_i \, \ell_{sj} + \partial_j \, \ell_{si} - \partial_s \, \ell_{ij}) = \Gamma_i{}^k{}_j \quad ,$$

donc :

$$(\overline{\nabla}_i \, \overline{u}_j)_{S^3} = \nabla_i \, u_j \quad .$$

Puisque $\vec{u}$ engendre un groupe d'isométries de E^4 :

$$(-\overline{\nabla}_4 \, \overline{u}_i)_{S^3} = (\overline{\nabla}_i \, \overline{u}_4)_{S^3} = (\partial_i \, \overline{u}_4 - \overline{\Gamma}_i{}^A{}_4 \, \overline{u}_A)_{S^3} = -(\overline{\Gamma}_i{}^k{}_4 \, u_k)_{S^3} \quad .$$

Mais :

$$(\overline{\Gamma}_i{}^k{}_4)_{S^3} = \frac{1}{2}(\overline{\ell}^{kA}(\partial_i \, \overline{\ell}_{A4} + \partial_4 \, \overline{\ell}_{Ai} - \partial_A \, \overline{\ell}_{i4}))_{S^3}$$

$$= \frac{1}{2} \, \ell^{ks}(\partial_4 \, \overline{\ell}_{si})_{S^3} = \delta_i^k \quad ,$$

car, sur S^3 ,

$$(\partial_4 \, \overline{\ell}_{si})_{S^3} = (2x^4(\overline{\ell}_{si})_{S^3})_{S^3} = 2\ell_{si} \quad .$$

Par suite

$$(\overline{\nabla}_4\ \overline{u}_i)_{S^3} = u_i \qquad .$$

Sur S^3 on a donc :

$$(\overline{\nabla}_A\ \overline{u}_i\ \overline{\nabla}^A\ \overline{u}_j)_{S^3} = (\overline{g}^{44}\ \overline{\nabla}_4\ \overline{u}_i\ \overline{\nabla}_4\ u_j + \overline{g}^{k\ell}\ \overline{\nabla}_k\ \overline{u}_i\ \overline{\nabla}_\ell\ \overline{u}_j)_{S^3}$$

$$= u_i\ u_j + \nabla^k\ u_i . \nabla_k\ u_j \qquad .$$

Mais de l'évaluation de $\overline{\nabla}_A\ \overline{u}_B$ trouvée dans le repère $0\ x\ y\ z\ t$, on tire

$$\overline{\nabla}_A\ \overline{u}_B\ \overline{\nabla}^B\ \overline{u}_C = -\ \overline{\ell}_{AC} \qquad .$$

Par suite :

$$\overline{\nabla}_A\ \overline{u}_i\ \overline{\nabla}^A\ \overline{u}_j = \overline{\ell}_{ij} \qquad .$$

Avec la formule ci-dessus, cela donne :

$$\nabla^k\ u_i . \nabla_k\ u_j = \ell_{ij} - u_i\ u_j \qquad ,$$

et

$$\nabla^k\ u^\ell\ \nabla_k\ u_\ell = 2 \qquad .$$

En portant dans l'expression trouvée pour R^*_{ij} :

$$R^*_{ij} = -\ 2(r+1)\ g_{ij} + 4r(r-1)\ u_i\ u_j \qquad .$$

4. La métrique de U .

La variété U est le produit riemannien de S^3 muni de la métrique g_{ij} par T^1 muni de sa métrique triviale changée de signe.

Il est clair que la métrique de U , que nous désignerons par $g_{\lambda\mu}$, est hyperbolique normale en même temps que g_{ij} . Enfin, si $R_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de Ricci de U , u_α le champ de vecteur défini sur $S^3 \times T^1$ du paragraphe 2, v_α le vecteur unitaire tangent aux variétés facteurs images de T^1 :

$$R_{\alpha\beta} = -2(r+1)(g_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta) + 4r(r-1)\, u_\alpha u_\beta \quad .$$

Ceci, d'après l'expression de R^*_{ij} .

THÉORÈME. - Le champ u_α engendre sur U un groupe d'isométries à trajectoires orientées dans le temps et fermées.

Démonstration. - Que les trajectoires soient fermées résulte de la définition de $\vec{u}$ et de l'étude faite sur la topologie de U .

Ces trajectoires sont orientées dans le temps. En effet :

$$g_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = g_{ij}\, u^i u^j = (-\ell_{ij} + r u_i u_j)\, u^i u^j = r - 1 > 0 \quad .$$

Montrons enfin que

$$\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha = 0 \quad .$$

Puisque U est un produit riemannien, il suffit de démontrer que u_i engendre un groupe d'isométries de S^3 munie de g_{ij} . En revenant aux notations du paragraphe 3 :

$$\nabla^*_i u_j = \nabla_i u_j - u_k C_{i\,j}^{\,k} \quad .$$

Mais u_i engendre un groupe d'isométries de S^3 munie de ℓ_{ij} et

$$C_{i\,j}^{\,k} = r(u_j \nabla^k u_i + u_i \nabla^k u_j) \quad ,$$

donc : $u_k C_{i\,j}^{\,k} = 0$, et ainsi

$$\nabla^*_i u_j + \nabla^*_j u_i = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i = 0 \quad .$$

5. Interprétation physique de U .

Rappelons (voir [3], p. 18-26) que si s_0 , s_1 , s_2 , s_3 désignent les valeurs propres d'un tenseur normal symétrique $T_{\lambda\mu}$ par rapport au tenseur métrique $g_{\lambda\mu}$, pour que $T_{\lambda\mu}$ puisse être interprété comme le tenseur impulsion-énergie d'un schéma fluide parfait - champ électromagnétique, il faut et il suffit que :

$$s_0 > s_1 \;,\quad s_0 > s_2 \;,\quad s_1 > s_3 \;,\quad s_2 \geq s_3 \;,\quad s_1 + s_2 \leq 0 \;,\quad s_0 + s_3 > \frac{s_1 + s_2}{2} \quad .$$

THÉORÈME. - Si $r > 1 + \sqrt{2}$, U schématise un fluide parfait - champ électromagnétique sans constante cosmologique.

Démonstration. - Avec les notations usuelles, les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R + k) = \chi T_{\lambda\mu} \quad .$$

De l'expression trouvée pour $R_{\lambda\mu}$ et de ce que $g_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu = 1$, $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu = -1$, on tire :

$$\chi T_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}(-\frac{k}{2} - 2r^2 + 3r + 1) - 2(1 + r) v_\lambda v_\mu + 4r(r - 1) u_\lambda u_\mu \quad .$$

Les valeurs propres de $\chi T_{\lambda\mu}$ par rapport à $g_{\lambda\mu}$ sont :

$$s_0 = -\frac{1}{2} k + 2r^2 - r + 1 \quad ,$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} k - 2r^2 + 5r + 3 \quad ,$$

$$s_2 = s_3 = -\frac{k}{2} - 2r^2 + 3r + 1 \quad .$$

Des calculs faciles montrent que $T_{\lambda\mu}$ peut être interprété comme le tenseur impulsion-énergie d'un schéma fluide parfait - champ électromagnétique sans constante cosmologique $(k = 0)$ dès que $r > 1 + \sqrt{2}$.

6. Résumé.

En réunissant les résultats obtenus, on voit que le modèle d'univers U est compact, orientable, homéomorphe à $S^3 \times T^1$, sans section d'espace globale compacte, stationnaire, à lignes de temps fermées, schématisant un fluide parfait - champ électromagnétique sans constante cosmologique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUFENKAMP (Don). - Sur l'impossibilité d'univers stationnaire clos, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 213-214.

[2] AVEZ (André). - Propriétés globales des espaces-temps périodiquement clos, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 3585-3587.

[3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'Usage des Physiciens).

[4] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables. 2e édition. - Paris, Hermann, 1960 (Act. scient. et ind., 1222 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 3).