Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Fernand Nahon

Le théorème de Jeans et la rotation des amas globulaires

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 15, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A14_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
5e année, 1961/62, n° 15

19 mai 1962

LE THÉORÈME DE JEANS ET LA ROTATION DES AMAS GLOBULAIRES

par Fernand NAHON

1. Introduction.

Cet exposé concerne deux objets :

- un objet mathématique : le théorème de Jeans ;
- un objet astronomique : la rotation des amas globulaires.

Commençons par les définir :

1° Le théorème de Jeans.

Soient un point materiel $M(x , y , z)$ de masse unité, plongé dans un champ de forces $U(x , y , z)$, et $I_1 , I_2 , \dots , I_6$, six intégrales premières, indépendantes du mouvement de M .

Désignons par $d\omega$ l'élément de volume $dx\, dy\, dz\, d\dot{x}\, d\dot{y}\, d\dot{z}$ (espace des phases d'un seul point M). La transformation $M_t = T_t(M_0)$ définie par le mouvement de M admet comme invariant cet élément $d\omega$ (théorème de Liouville) :

$$d\omega_t = d\omega_0 \quad .$$

Considérons alors une distribution initiale, à l'instant t_0 , de N points identiques à M , définie par la fonction de fréquence $f(M_0)$ telle que

$$f(M_0)\ d\omega_0 = dN \quad .$$

A l'instant t , ces dN points se retrouvent dans l'élément $d\omega_t$

$$f(M_t\ ;\ t)\ d\omega_t = f(M_0)\ d\omega_0$$

d'où

$$f(M_t\ ;\ t) \equiv f(M_0)$$

c'est-à-dire que la fonction f est une intégrale première des équations du mouvement de M .

Parmi ces intégrales, appelons I_1 l'intégrale de l'énergie cinétique ; I_6 l'intégrale qui dépend du temps, et qui est de la forme $\psi(x ; y , z , \dot{x}, \dot{y} , \dot{z}) - t$.

On dit que le système est stationnaire si

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0 \qquad ;$$

donc f ne dépend pas de I_6.

Remarquons d'autre part que le raisonnement rappelé suppose l'indépendance dynamique des n points M_i ; nous dirons qu'un tel système est dissocié ; et nous énoncerons le

THÉORÈME de Jeans. - La fonction de fréquence d'un système stationnaire dissocié plongé dans un champ de forces donné $U(x , y , z)$ est une fonction de l'énergie totale et de quatre autres intégrales premières (indépendantes du temps) du mouvement de chaque point du système.

Application au problème des n corps. - Soit un système de N points soumis à leurs actions mutuelles (gravitation universelle), plus un champ extérieur.

Soit U_e la fonction de forces du champ extérieur

$$\Omega = G\Sigma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{r_{ij}}$$

(avec un choix convenable des unités, et l'hypothèse des masses égales).

Soit enfin

$$\omega_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}}$$

la part de Ω dont dérive l'attraction appliquée au point M_i.

Le mouvement de ce point est régi par la force $\frac{\partial}{\partial x} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x} U_e$, qui dépend de la position des autres points ; le théorème de Liouville n'est pas applicable et le théorème de Jeans non plus.

On se tire d'affaire par l'approximation suivante.

Première hypothèse. - On remplace le système des N points par une distribution continue de densité massique

$$\rho(xyz) = \int f \, d\dot{x} \, d\dot{y} \, d\dot{z} \qquad .$$

Cette distribution a un champ de gravitation dérivant de la fonction de forces $V(xyz)$ liée à ρ par l'équation de Poisson

$$\Delta V = - 4\pi G\rho \quad .$$

Deuxième hypothèse. - On admet que ω_i est équivalent à $V(x_i , y_i , z_i)$.

C'est cette deuxième hypothèse qui réduit le problème des N corps à un problème d'un seul corps (système dissocié). Elle revient à négliger l'influence des passages proches. Elle est légitime pendant un temps plus ou moins long dépendant de la raréfaction des objets du système, et qu'on appelle le "temps de relaxation". En conclusion :

Pendant un temps, petit par rapport au temps de relaxation, l'évolution du système est représentée avec une approximation suffisante par celle du système dissocié plongé dans le champ de forces $U = U_e + V$.

Si le système est stationnaire, sa fonction de fréquence $f(xyz , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z})$ vérifie les deux équations :

$$\begin{cases} f = F[I_1 , I_2 , \dots , I_5] \\ \Delta V = - 4\pi G\rho(f) \end{cases} \quad .$$

2° Les amas globulaires.

Notre galaxie est entourée d'un halo d'une centaine d'amas globulaires, petits systèmes stellaires compacts comprenant chacun une centaine de milliers d'étoiles.

Chaque amas individuel est représentable par un système sphérique pour lequel U_e est négligeable : ce que nous appellerons un système autonome.

L'ensemble des 100 amas est représentable à son tour par un système sphérique plongé dans le champ d'attraction de la galaxie

$$U_e \sim \frac{GM}{r} \quad \left(\begin{array}{l} G : \text{constante de la gravitation universelle} \\ M : \text{masse de la galaxie} \end{array} \right)$$

à cause de la distance de ces amas à la galaxie ; donc le champ extérieur possède lui aussi la symétrie sphérique.

L'un comme l'autre de ces deux systèmes peuvent être considérés comme stationnaires, à cause des ordres de grandeur comparés du temps de relaxation et de l'âge de la galaxie. Donc l'étude de l'amas individuel comme celle du halo est justiciable de l'approximation expliquée au paragraphe 1, avec la simplification supplémentaire de la symétrie sphérique.

Du point de vue de la structure galactique, c'est l'étude du halo qui est la plus intéressante.

a. Elle est la première qui ait révélé l'existence du centre galactique.

b. Elle sert à définir le système de référence absolu. On raisonne de la façon suivante : le halo n'a pas de rotation systématique ; car s'il tournait, il serait aplati ; or il est sphérique ; donc il ne tourne pas.

"Car s'il tournait, il serait aplati" : c'est ce point que met en doute un dynamicien stellaire de la nouvelle vague, D. LYNDEN-BELL, de Clare College Cambridge, dont nous allons exposer la critique.

2. Critique de LYNDEN-BELL.

Ce que l'on observe, c'est que ρ est sphérique : $\rho = \rho(r)$. Donc V est sphérique, car

$$\Delta V = 4\pi G\rho \quad ;$$

et comme U_e est équivalent à $\frac{GM}{r}$, le champ total dérive d'une fonction de forces sphérique

$$U(r) = U_e + V$$

Appelons r le module, $\vec{r}$ le vecteur unitaire du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$.

Appelons c le module, $\vec{c}$ le vecteur unitaire du vecteur-vitesse $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$; nous désignerons en abrégé par $d^3 c$ l'élément de volume de l'espace des vitesses :

$$d^3 c = c^2 \, dc \, d(\vec{c}) \quad .$$

Appelons ω le module, $\vec{\omega}$ le vecteur unitaire du moment cinétique

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad ,$$

on a donc

$$\omega = r.c.\sin\lambda$$

en désignant par λ l'angle compris entre 0 et π des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{c}$; et

$$\vec{\omega} = \vec{r} \wedge \vec{c} \quad .$$

Nous désignerons par $d(\vec{\omega})$ l'élément de surface de la sphère-unité, lieu de l'extrémité $\vec{\omega}$.

Les intégrales premières connues du problème sphérique sont :

- l'énergie totale $I_1 = E = \frac{c^2}{2} + U(r)$,
- les trois composantes du moment cinétique $\overrightarrow{OH}$; nous prendrons

$$I_2 = \omega^2$$

et

$$I_3 \text{ , } I_4 = \text{ coordonnées sphériques de } \vec{\omega} \quad .$$

Nous négligeons I_6 parce que le système est stationnaire ; nous négligeons aussi I_5 qui fait intervenir une variable longitude dont le rôle est analogue à celui de t . La fonction de fréquence des amas globulaires appartient donc à la classe

$$f = G(E \text{ , } \omega^2 \text{ , } \vec{\omega}) \quad .$$

Le raisonnement incriminé dit ceci :

ρ est invariant par rotation autour de 0 , donc f est invariant par ces rotations, donc f ne dépend que de E et ω^2 :

$$f = J(E \text{ , } \omega^2) \quad .$$

Pour de tels f , il est vrai que le moment cinétique est nul, donc que l'amas ne tourne pas. Mais en réalité la condition $\rho = \rho(r)$ impose seulement que f appartient à la classe F des fonctions G , solutions de l'équation intégrale

$$\rho(r) = \int F(E \text{ , } \omega^2 \text{ , } \vec{\omega}) \, d^3 c \quad . \tag{1}$$

Les amas J sont solutions de (1), ils ne consituent pas toutes les solutions.

Conclusion. - Appelons "amas sphérique" un amas $F(E \text{ , } \omega^2 \text{ , } \vec{\omega})$ qui vérifie l'équation (1).

Appelons "amas de Jeans", un amas $J(E , \omega^2)$ qui vérifie la même équation.

Les amas J forment une classe particulière de solutions, dont le moment cinétique est nul ; il s'agit de trouver toutes les solutions, et de montrer que parmi celles-ci il en existe dont le moment cinétique est différent de zéro.

3. Théorèmes préliminaires.

1° Soit $G(E , \omega^2 , \vec{\omega})$ une fonction de la paire de vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{c}$ qui dépend :

- des modules r et c de ces deux vecteurs,
- de leur angle λ ,
- du plan des deux vecteurs orienté par la normale $\vec{\omega} = \vec{r} \wedge \vec{c}$,

mais qui ne dépend pas de l'angle polaire φ' , rotation propre de la paire $\vec{r} , \vec{c}$ autour de cette normale.

Appelons projection de la fonction G sur l'espace $\vec{r}$ (en abrégé : projection) la fonction

$$\rho(r , \vec{r}) = \int G \, d^3 c$$

c'est-à-dire l'intégrale de G par rapport au vecteur $\vec{c}$. Nous désignerons cette projection par le symbole ρ_G ; elle dépend des trois coordonnées du vecteur-position $\vec{OM}$ c'est-à-dire de son module r et de son vecteur unitaire $\vec{r}$.

2° Désignons par $J(E , \omega^2)$ la classe particulière des fonctions G qui ne dépendent pas de la position du plan $\vec{\omega}$, c'est-à-dire sont invariantes dans une rotation autour de O et par ρ_J la projection d'une fonction J ; il est clair que ρ_J ne dépend que de r (et ne dépend plus du vecteur unitaire $\vec{r}$).

Or à toute fonction G , on peut faire correspondre deux fonctions J :

- la fonction $\bar{J}$ = moyenne de G par rapport à $\vec{\omega}$ sur la sphère unité :

$$\bar{J} = \bar{G} = \frac{1}{4\pi^2} \iint G \, d\vec{\omega} \qquad ,$$

- la fonction $J_{\vec{\omega}_0} = G(E , \omega^2 , \vec{\omega_0})$, c'est-à-dire égale à la valeur de G pour $\vec{\omega}$ fixé ; nous dirons que c'est la section de G par le plan $\vec{\omega_0}$ (en abrégé : la section de G). Il est clair que

$$\bar{J} = \text{moyenne de } J_{\vec{\omega}_0}$$

par rapport à $\vec{\omega}_0$ sur la sphère unité.

Ces deux fonctions ont des projections $\rho_{\bar{J}}$ et $\rho_{J_{\vec{\omega}_0}}$:

$\rho_{\bar{J}}$ ne dépend que de r

$\rho_{J_{\vec{\omega}_0}}$ dépend en outre du vecteur $\vec{\omega}_0$, qui joue le rôle de paramètre.

Les théorèmes que nous allons énoncer donnent les relations entre

$$\rho_G(r , \vec{r}) , \quad \rho_{\bar{J}}(r) \quad \text{et} \quad \rho_{J_{\vec{\omega}_0}}(r , \vec{\omega}_0) \quad .$$

a. <u>Relation entre</u> ρ_G <u>et</u> $\rho_{J_{\vec{\omega}_0}}$. – Dans l'intégrale qui définit ρ_G, prenons pour définir la position de $\vec{c}$ les coordonnées sphériques d'axe Oz confondu avec $\vec{r}$:

$$d^3 c = c^2 \, dc \, \sin \lambda \, d\lambda \, d\varphi$$

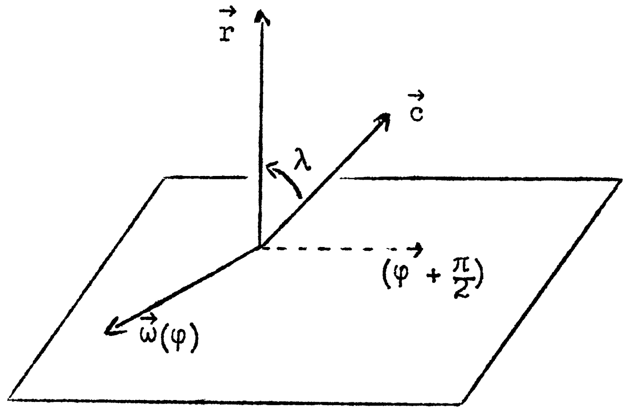
en appelant φ l'angle polaire du vecteur $\vec{\omega}$ dans le plan perpendiculaire à $\vec{r}$.

Remarquant que

$$\iint G \, c^2 \, dc \, \sin \lambda \, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \rho_{J_{\vec{\omega}_0}} \quad ,$$

il vient :

$$\rho_G(r , \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{J_{\vec{\omega}_0}} \, d\varphi \quad .$$



Pour une longueur donnée, cette relation établit une correspondance entre les deux fonctions définies sur la sphère unité $\rho_G(\vec{r})$ et $\rho_{J_{\vec{\omega_0}}}(\vec{\omega_0})$, dont voici la définition géométrique : pour avoir la valeur de la fonction-image ρ_G au point $\vec{r}$, on intègre la fonction originale $\rho_{J_{\vec{\omega_0}}}$ sur le grand cercle de pôle $\vec{r}$.

<u>Définition</u>. - Nous appellerons <u>transformée de grand cercle</u> d'une fonction $f(\vec{\omega_0})$ définie sur la sphère unité, la fonction $\varphi(\vec{r})$ égale à l'intégrale, curviligne

$$\frac{1}{2\pi} \int f(\vec{\omega_0})\, ds$$

calculée sur la grand cercle de pôle $\vec{r}$.

THÉORÈME 1. - La projection d'une fonction donnée G est égale à la transformée de grand cercle de la projection de sa section.

b. <u>Propriétés de la transformation de grand cercle</u>. - Soient f l'original, φ la transformée, $\varphi = Tf$.

Notons d'abord deux propriétés évidentes d'après la définition de T :

- si $f(\vec{\omega_0}) = - f(- \vec{\omega_0})$, $\varphi \equiv 0$,
- si $f(\vec{\omega_0}) = + f(- \vec{\omega_0})$, $\varphi(\vec{r}) = + \varphi(- \vec{r})$,

c'est-à-dire :

- à toute fonction f antisymétrique correspond une fonction φ identiquement nulle ;
- à toute fonction f symétrique correspond une fonction φ également symétrique.

La transformation possède d'autre part deux propriétés que nous indiquons sans démonstration :

THÉORÈME 2. - La valeur moyenne d'une fonction f sur la sphère unité est égale à la valeur moyenne de sa transformée φ.

THÉORÈME 3. - Si f est symétrique, la condition $Tf \equiv 0$ entraîne $f \equiv 0$; ou encore : si la transformée φ est identiquement nulle, l'original f est une fonction antisymétrique.

c. Relation entre $\rho_{J_{\vec{\omega}_0}}$ et $\rho_{\bar{J}}$. - $\bar{J}$ est la moyenne de $J_{\vec{\omega}_0}$ par rapport à $\vec{\omega}_0$ sur la sphère unité ; il en est de même de leurs projections.

d. Relation entre $\rho_{\bar{J}}$ et ρ_G. - Le théorème 2 entraîne alors que $\rho_{\bar{J}}$ est la moyenne de ρ_G par rapport à $\vec{r}$, sur la sphère unité, c'est-à-dire le

THÉORÈME 4. - La projection de la moyenne des sections d'une fonction donnée G est égale à la moyenne des projections de G.

Remarque. - Ce qui fait l'intérêt de ce théorème de permutabilité, c'est que les deux moyennes ne sont pas calculées sur le même vecteur ; la première concerne le vecteur $\vec{\omega}_0$, la seconde le vecteur $\vec{r}$.

4. Résolution de l'équation intégrale (1) $\rho(r) = \int F(E\ ,\ \omega^2\ ,\ \vec{\omega})\ d^3 c$.

a. Commençons par le cas particulier des "amas de Jeans" et considérons l'équation intégrale

$$\rho(r) = \int J(E\ ,\ \omega^2)\ d^3 c$$

qui s'écrit

$$\rho(r) = 2\pi \int J(E\ ,\ \omega^2)\ c^2\ dc\ \sin\lambda\ d\lambda \quad .$$

En revenant à la définition de E et ω^2 , on voit que cette équation se ramène à un type classique (l'équation d'Abel) et qu'elle admet une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire. Notons J_α l'une de ces solutions ; nous en déduirons que l'équation sans second membre

$$0 = \int J(E\ ,\ \omega^2)\ d^3 c$$

admet également une infinité de solutions ; on peut prendre pour J la différence de deux fonctions solutions de l'équation avec second membre :

$$J(\rho \equiv 0) = J_\alpha - J_\beta \quad .$$

b. Passons au cas général et définissons

$$\overline{J}(E\ ,\ \omega^2) = \text{moyenne de } F \text{ par rapport à } \overrightarrow{\omega_0} \text{ sur la sphère unité}$$

$$= \text{moyenne des sections de } F \quad .$$

Le théorème 4 donne

$$\rho_{\overline{J}} = \text{moyenne de } \rho_F \quad .$$

Mais puisque F est une solution de l'équation intégrale (1), ρ_F ne dépend pas de $\vec{r}$, donc est égale à sa valeur moyenne ; d'où le théorème.

COROLLAIRE du théorème 4.

A tout "amas sphérique" F de densité $\rho(r)$ correspond un "amas de Jeans" J de même densité ; c'est l'amas

$$\overline{J} = \text{moyenne des sections de } F \quad .$$

c. Posons alors $F = \overline{J} + K$.

L'équation intégrale (1) se réduit à (2)

(2) $$0 = \int K(E\ ,\ \omega^2\ ,\ \vec{\omega})\ d^3 c \quad .$$

Décomposons K en :

K^+ , composante symétrique ,

et

K^- , composante antisymétrique, par rapport à $\vec{\omega}$.

Il est évident que K^- est arbitraire, car toute fonction antisymétrique satisfait l'équation (2).

Il reste à trouver les solutions symétriques de cette équation. Soit

$$\rho_{K_{\vec{\omega}_0}} = \iint K\, c^2\, dc\, \sin\lambda\, d\lambda$$

ce que nous avons appelé la projection de la section de K . L'équation (2) est équivalente à

$$T\rho_{K_{\vec{\omega}_0}} \equiv 0$$

et le théorème 3 montre que ceci exige

$$\rho_{K^+_{\omega_0}} \equiv 0 \quad .$$

La projection de la partie symétrique est donc identiquement nulle. Or cette partie symétrique, pour $\vec{\omega}_0$ fixé, est une fonction du type J pour laquelle s'applique l'analyse du paragraphe (a) :

$$\rho_{K^+} \equiv 0 \rightarrow K^+ = J_{\alpha'} - J_{\beta'} \quad .$$

Enonçons ce résultat :

COROLLAIRE du théorème 3.

Soit K^+ une fonction symétrique $K(E\ , \omega^2\ , \vec{\omega})$ solution de l'équation sans second membre (2)

$$0 = \int K\, d^3 c \quad .$$

Soit J_α l'ensemble des fonctions de Jeans $J(E , \omega^2)$ solutions de l'équation avec second membre (1)

$$\rho(r) = \int J \, d^3 c \quad .$$

La fonction K^+, la plus générale, est la différence de deux fonctions J_α.

Récapitulons : Pour construire la fonction de fréquence F de l'amas sphérique le plus général de densité donnée $\rho(r)$, on pourra appliquer la procédure suivante :

1° trouver tous les amas de Jeans $J(E , \omega^2)$ qui ont la même densité. Il y en a une infinité dépendant d'une fonction arbitraire. Nous les désignerons par J_α ;

2° à chaque plan orbital, orienté par sa normale $\vec{\omega_0}$, attribuer une de ces solutions. On construit ainsi une fonction $F_1(E , \omega^2 , \vec{\omega})$ qui, pour chaque $\vec{\omega}$, se réduit à une fonction J_α ; donc qui a la même densité $\rho(r)$;

3° ajouter une fonction F_2 quelconque antisymétrique en $\vec{\omega}$. Ceci revient à changer dans chaque plan le sens de parcours de certaines orbites, sans toucher à la distribution de ces orbites [donc à $\rho(r)$]. On peut dire que c'est l'oeuvre d'un démon de Maxwell, si l'on désire une image géométrique.

La fonction $F = F_1 + F_2$ est la solution la plus générale cherchée ; elle convient pourvu qu'elle soit positive. On voit qu'elle dépend de deux fonctions arbitraires ; on peut chercher une solution unique en imposant des conditions supplémentaires. En voici un exemple : Comment construire l'amas sphérique de densité donnée qui tourne plus vite que tous les autres ? Il faut pour cela que dans chaque plan $P_{\vec{\omega_0}}$ le moment cinétique soit maximum. Une propriété bien connue de la stabilité des orbites circulaires entraîne comme conséquence ce dernier théorème :

THÉORÈME 5. – A toute densité $\rho(r)$ correspond un amas sphérique qui possède par rapport à un axe donné un moment cinétique supérieur à ceux des autres amas de même densité.

Cet amas est le "circular demon cluster" : c'est-à-dire l'amas de Jeans dont toutes les orbites sont circulaires, et où le sens de parcours de ces orbites a été arrangé par le démon de Maxwell.