Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Jean Kovalevsky

Aspects analytiques du problème du mouvement d'un satellite artificiel

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 13, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A12_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
5e année, 1961/62, n° 13

24 mars 1962

ASPECTS ANALYTIQUES DU PROBLÈME DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL

par Jean KOVALEVSKY

1. Introduction.

Le problème du mouvement d'un satellite artificiel est un problème dont une partie seulement est justiciable des méthodes classiques de mécanique céleste. En effet, les forces agissant sur ces corps sont d'origines très nombreuses. Ce sont, en particulier :

1° Les forces d'origine gravitationnelle terrestre. Le potentiel terrestre U est notablement différent du potentiel d'un point massif, et il s'introduit ainsi des perturbations au mouvement elliptique simple.

2° Les forces gravitationnelles d'origine extra-terrestre : Lune et Soleil. Elles sont faibles, mais peuvent dans certains cas de résonance avoir des effets très importants.

Ces deux types de perturbations introduisent dans les équations une fonction perturbatrice sans singularité réelle autre qu'au centre des corps et peuvent être traités par les méthodes classiques de mécanique céleste.

3° Le frottement atmosphérique, prédominant pour les satellites bas (< 300 km), très important pour les satellites intermédiaires (altitude comprise entre 300 et 800 km), joue toutefois un rôle, même à des altitudes plus grandes si le rapport $\frac{\text{section efficace}}{\text{masse}}$ est grand.

Le coefficient de frottement est fonction non seulement de la position et de la vitesse, mais du temps par suite des variations diurnes ou aléatoires dépendant de l'activité solaire notamment. La force ne pouvant se mettre sous la forme d'une fonction connue prévisible, le problème n'admet pas, dans sa généralité, de solution analytique. Seules certaines solutions partielles peuvent être trouvées en supposant un modèle stable d'atmosphère.

4° La pression de radiation, essentiellement constante, pourrait être considérée comme une force dépendant d'un potentiel, si elle ne disparaissait pas lorsque le satellite entre dans l'ombre de la Terre. La discontinuité ainsi introduite, bien que prévisible, est difficilement représentable par des fonctions continues, et il paraît encore prématuré d'envisager une théorie entièrement analytique de ces perturbations. Ces deux types de perturbation sont habituellement traités par des méthodes purement numériques, essentiellement l'intégration numérique.

5° Les forces électro-magnétiques, très peu étudiées jusqu'à maintenant, ne semblent pas introduire des perturbations importantes.

6° Les perturbations dues à la non-sphéricité du satellite. Elles peuvent avoir des grandeurs décelables seulement si les moments principaux d'inertie sont très différents. Ils sont actuellement étudiés par l'école russe de Moscou (DOUBOSHINE et KONDOURAR, voir [7] qui donne d'autres références à ces deux auteurs) qui est arrivée déjà à des résultats théoriques intéressants. Avec les objets actuellement lancés, ces perturbations ne semblent pas devoir être perceptibles (amplitude des perturbations : quelques mètres).

Ces types de perturbations sont étudiés uniquement d'un point de vue théorique et il n'y a pas eu, à ma connaissance, d'application à un satellite existant permettant une identification d'un terme de perturbation avec l'effet d'une de ces causes. Ils constituent un exemple de problème non traité par la mécanique céleste jusqu'à maintenant, les hypothèses classiques permettant la séparation des équations donnant le mouvement du centre de gravité.

Du point de vue mécanique céleste, dans son stade actuel, c'est certainement le premier type de forces qui est le plus intéressant. Ce sont les apports récents à la mécanique céleste des études consacrées à ce problème qui vont être exposés dans ce qui suit.

2. Le potentiel terrestre.

Le potentiel le plus général d'un corps en un point P , de coordonnées x , y , z est, on le sait,

$$U = k \iiint_V \frac{\varkappa(\xi , \eta , \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}}$$

$$= k \iiint_V \frac{\varkappa(\xi , \eta , \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{[r^2 + \rho^2 - 2(\xi x + y\eta + z\zeta)]^{1/2}}$$

intégrale étendue à tout le volume occupé par le corps dont la densité est $\varkappa(\xi , \eta , \zeta)$.

La théorie du potentiel permet de développer U en fonction des puissances de $\frac{1}{r}$.

Si on prend pour axes, les parallèles aux axes principaux d'inertie passant par le centre de gravité du corps, on simplifie notablement les deux premiers termes du développement, et on trouve, en posant $\mu = kM$; M étant la masse totale du corps :

$$(1) \qquad U = \frac{\mu}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=0}^{n} \frac{A_{nq}\, P_{nq}(\sin\varphi)\, \cos q(\lambda - \lambda_{nq})}{r^n}\right] ,$$

où

λ et φ sont respectivement la longitude et la latitude de P,

$P_{n0}(\sin\varphi)$ est le polynôme de Legendre d'ordre n,

$$P_{n0}(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n ,$$

$P_{nq}(\sin\varphi)$ est une fonction de Legendre associée,

$$P_{nq}(x) = (1 - x^2)^{q/2} \frac{d^q}{dx^q}[P_{n0}(x)] ,$$

A_{nq} sont des constantes dépendant du corps,

λ_{nq} sont d'autres constantes.

Dans le cas de la Terre, on rend A_{nq} sans dimension en divisant par a_e^n, où a_e est le rayon équatorial terrestre, et on utilise

$$(1) \qquad U = \frac{\mu}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} J_{nq} \frac{a_e^n}{r^n} P_{nq}(\sin\varphi)\, \cos q(\lambda - \lambda_{nq})\right] .$$

En pratique, le problème est simplifié par le fait que ces coefficients J_{nq} sont petits. On a

$$J_{20} = 0{,}0010825 .$$

Une dizaine d'autres coefficients ont été détectés et mesurés, qui tous sont compris entre 3.10^{-6} et 10^{-7}, et peuvent être considérés comme des petites quantités d'ordre 2 en J_{20} (noté plus loin J_2) [16] et [18].

3. Méthodes classiques de résolution : difficulté de la résonnance.

Ainsi le potentiel U admet un développement en fonction des éléments elliptiques qui est semblable à celui de la fonction perturbatrice de la théorie de la Lune par exemple :

$$U_r = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos s)$$

où s est l'angle des rayons vecteurs, r' le rayon vecteur Terre-Soleil.

Ces analogies permettent d'appliquer au problème du mouvement d'un satellite artificiel les méthodes de la mécanique céleste. Citons, en particulier :

- Méthode de Hansen : Musen et Herget [22].
- Méthode de Hill-Brown : BROUWER [2] ou GREBENIKOV [11].
- Méthode de Delaunay ou de Von Zeipel dont c'est la généralisation : BROUWER [3].
- Méthodes diverses, issues des méthodes de Jacobi-Hamilton : GARFINKEL [8], STERNE [25].
- Méthode des équations de Lagrange : a été utilisée par de très nombreux auteurs pour déduire des résultats partiels.

Toutes ces méthodes conduisent à une solution qui admet tous les défauts des solutions - ou des quasi-solutions - des équations de mécanique céleste.

La solution générale se met en effet sous la forme des séries de Fourier de la forme

$$\sum A_{ijkm} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i\ell + jg + k\lambda + mh)$$

où ℓ est l'argument de l'anomalie moyenne,
g est l'argument moyen du périgée,
h est la longitude moyenne des noeuds,
λ est l'angle de rotation de la Terre.

Comme dans les mouvements des planètes ou satellites on se heurte aux problèmes de résonnance. Ceux-ci se présentent lorsque les conditions initiales, conditionnant les coefficients n_ℓ, n_g, n_λ, n_h du temps dans les arguments

ℓ , g , λ et h , sont telles qu'il y a un terme important (i , j , k et m petits, pour lequel : $in_\ell + jn_g + kn_\lambda + mn_h \to 0$).

Plusieurs cas ont été déjà étudiés :

1° Satellites de 24 heures ou des périodes commensurables avec 24 h

$$i\ell + k\lambda + jg \to 0 \quad .$$

On a une discontinuité de la solution lorsque $i\ell + k\lambda \to 0$, plus exactement lorsque

$$in_\ell + kn_\lambda < \varepsilon$$

ε étant une certaine fonction, de l'ordre de la racine carrée des coefficients J_{n4} de la fonction perturbatrice qui interviennent dans les termes de la forme

$$\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(i\ell + k\lambda + jg) \quad .$$

A titre d'exemple, si on tient compte du terme en J_{22} seul, d'après MORANDO [21], si la période est exactement de 24 heures sidérales, $\ell + g + h - \lambda$ est constant : par rapport à des axes liés à la Terre, le satellite semble immobile (si $i = 0$) ou se déplace uniquement sur un méridien.

Si ΔP est la variation par rapport à $P = 24$ heures sidérales tant que $|\Delta P| < 2$ minutes, il y a un mouvement d'oscillation autour de cette position d'équilibre de période dépendant de l'amplitude (comme dans un mouvement pendulaire dont les équations sont tout à fait semblables) avec une période limite à l'amplitude, donc le $\Delta P \to 0$. Si $|\Delta P| > 2$ minutes, il y a un mouvement général de précision : le satellite semble tourner même dans ce système d'axes (et comme le pendule prend un mouvement de révolution dès que l'énergie est suffisante pour faire basculer le pendule au-dessus du point le plus haut).

A la limite entre les deux régions, il y a un mouvement asymptotique vers ce point. En tenant compte des autres termes J_{pq} , la solution a un aspect analogue, bien que les points d'équilibre changent et que $|\Delta P|$ soit différent pour chacun d'entre eux.

2° Résonance avec le Soleil ou la Lune. De très nombreux cas de résonance de chacun des termes, avec l'un ou l'autre des deux corps conduit encore à une libration d'un des éléments ou d'un des termes du satellite.

Un cas particulièrement intéressant d'un point de vue pratique est la résonance entre le soleil et du mouvement du périgée d'un satellite quasi-polaire à une altitude moyenne de 3 700 km . On a pensé utiliser cette résonance, non avec les effets gravitationnels du Soleil, mais avec la pression de radiation. L'accumulation des effets introduit des termes à très longue période et de très grande amplitude en excentricité qui fait descendre le périgée au sol en moins de 7 ans. On a choisi une telle orbite pour les aiguilles du projet Westford [4].

3° Bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler de résonance car ce n'est pas une combinaison linéaire de moyens-mouvements, mais un de ces moyens-mouvements lui-même qui s'annule. En effet, en nous bornant aux termes en J_{20} et J_{40}, on a :

$$n_g = \frac{n}{a^2} \frac{J_{20}}{(1 - e^2)^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{15}{4} \cos^2 i\right) + \dots$$

n_g s'annule pour $\cos^2 i = \frac{1}{5}$ et change de signe quand i passe par cette valeur, appelée inclinaison critique.

Il y a alors un phénomène analogue à celui qui a été décrit ci-dessus, dans un intervalle d'inclinaison de 63° 26' ± 8', intervalle légèrement fonction des valeurs des autres coefficients J [9], [12].

4. Etude particulière de l'inclinaison critique.

Si on élimine, par la méthode de Von Zeipel, l'anomalie moyenne des équations canoniques de Delaunay, on arrive à un système d'équations canoniques, où le hamiltonien ne dépend plus que de g, l'argument moyen du périgée. Cette fonction hamiltonienne, si on ne conserve dans U que les termes en $J_{20} = J_2$ et $J_{40} = J_4$, est de la forme

$$F = \frac{\mu}{2L^2} + F_{2S} + Q \cos 2g \qquad ,$$

où F_{2S} et Q désignent des termes dépendant de L, G et H seulement :

$L = \sqrt{\mu a}$

$G = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$

$H = G \cos i$.

On a

$$Q = \left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right)\left[\left(1 - \frac{J_4}{J_2^2}\right) - \frac{1}{3}\left(- 3 + \frac{J_4}{J_2^2}\right)(5 \cos^2 i - 1)\right] \qquad .$$

L'inclinaison critique se produit si $5 \cos^2 i - 1$ est voisin de zéro.

Si $1 - \frac{J_4}{J_2^2} \neq 0$, on peut résoudre le système d'équations canoniques qui se réduit d'ailleurs à

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} ; \qquad \frac{dg}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial G} \quad .$$

On trouve une équation en g qui est celle du pendule simple, et la solution s'exprime en terme de fonctions elliptiques, et se développe en série, non plus de la petite quantité J_2 , mais de $\sqrt{J_2}$, suivant une propriété classique des systèmes analogues en mécanique. On a un mouvement périodique, asymptotique ou circulatoire du périgée suivant les valeurs données aux constantes d'intégration. Le mouvement périodique représente la libration. Le point d'équilibre stable dépend du signe de Q , donc, en définitive, du signe de

$$1 - \frac{J_4}{J_2^2} \quad .$$

Dans le cas de la Terre, où Q est négatif, ce point est le point de l'orbite à la latitude maximale $(g = \pm \frac{\pi}{2})$. Si Q était positif, la libration se ferait autour des noeuds.

Remarque. - La solution circulatoire peut aussi se mettre sous forme de fonctions elliptiques. Elle a toutefois une forme plus simple, lorsqu'on utilise les méthodes classiques de développement de la solution. Dans la région de validité commune des deux développements, il faudra considérer surtout les questions de la rapidité de convergence des solutions pour le choix de la méthode. Très rapidement, d'après GARFINKEL [10], quelques minutes d'inclinaison au-delà des inclinaisons des orbites asymptotiques, la méthode classique converge plus rapidement que celle utilisant les fonctions elliptiques.

5. Le problème de Vinti.

Si on a $1 - \frac{J_4}{J_2^2}$, Qa a en facteur $(5 \cos^2 i - 1)$. Comme la partie séculaire de $\frac{dg}{dt}$ a également $(5 \cos^2 i - 1)$ en facteur, cette quantité s'élimine du dénominateur lors de l'intégration par la méthode classique, et la singularité de l'inclinaison critique disparaît.

VINTI (voir bibliographie [26] à [30]) a considéré le problème du mouvement d'un satellite artificiel dans un champ de gravitation tel que cette relation existe.

En fait, il a étendu cette relation pour qu'elle conduise à la même disposition de singularité quel que soit l'ordre en J_2 , en prenant

$$(2) \qquad U = \frac{\mu}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_2^n \frac{a_e^{2n}}{r^{2n}} P_{2n}(\sin\varphi)\right] \quad .$$

C'est-à-dire

$$J_{2n+1,0} = 0$$

$$J_{2n,0} = J_2^n \qquad (J_2 < 0)$$

$$J_{n,q} = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 0 \quad .$$

Remarque. - Si, par contre, on admet $J_1 = J_{10} \neq 0$, on peut prendre

$$J_{2n+1,0} = J_1\, J_2^n$$

et le potentiel

$$U' = \frac{\mu}{r}\left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} J_p \frac{a_e^p}{r^p} P_p(\sin\varphi)\right]$$

a les mêmes propriétés que le potentiel (2).

VINTI a montré que non seulement le potentiel U fait disparaître les singularités, mais conduit à la séparabilité de l'équation de Hamilton-Jacobi sans qu'il y ait besoin de faire des approximations successives dans un développement en fonction de J_2 considéré comme un infiniment petit (ce qui est, en fait, le principe de la méthode de Brouwer - Von Zeipel [3]). La séparabilité est réalisée pour ce potentiel, la solution peut être entièrement écrite, à l'aide d'intégrales elliptiques sans qu'il y ait besoin d'utiliser de séries infinies, ainsi que l'a fait ISZAK [13].

On savait depuis EULER (voir par exemple [19]) que, avec le problème des deux corps, celui du mouvement autour de deux points fixes est complètement intégrable en mécanique céleste. Le problème de Vinti n'en est pas un troisième, car il est facile de montrer que le potentiel de Vinti n'est rien d'autre que celui de deux points fixes de masse m/2 , situés sur l'axe Oz , à une distance $I\, a_e\sqrt{J_2}$ imaginaire du point O . Le potentiel U' intervient quand O n'est pas le milieu de ces deux points.

C'est d'ailleurs par le raisonnement inverse, partant du problème du mouvement autour de deux points fixes à une distance imaginaire, que KISLIK [14] et l'équipe AKSENOV, GREBENIKOV et DEMINE ([6] et [1]) ont trouvé une solution analogue à celle de Vinti. Cette solution est conséquence d'ailleurs de celle donnée par exemple par WHITTAKER ([31], p. 97).

Toutefois, bien que le potentiel (2) représente près des 99,98 % du potentiel réel de la Terre, le mouvement réel peut s'éloigner beaucoup de celui qui est représenté par l'orbite intermédiaire ci-dessus. Il suffit pour cela que les 0,02 % restants aient des effets cumulatifs du type de résonance.

L'équipe russe ci-dessus, est en train d'étudier ce problème, en particulier au voisinage de l'inclinaison critique, lorsqu'il y a un terme supplémentaire du type J_{40}.

Le résultat de cette étude n'est pas encore terminé. Toutefois, il ne fait aucun doute que les difficultés rencontrées par la méthode classique réapparaîtront à ce stade, car le mouvement réel du périgée à bien dans ce cas le type pendulaire que nous avons vu au paragraphe précédent. Le problème n'est donc pas résolu par la méthode de Vinti, mais la difficulté est seulement repoussée.

6. Autres problèmes du mouvement d'un satellite artificiel.

Parmi les autres causes de perturbations d'un satellite artificiel citées dans le paragraphe 1, certaines ont été étudiées analytiquement. Nous en donnons ci-dessous quelques exemples sans les discuter, mais en donnant les principales références bibliographiques.

1° Les effets des perturbations luni-solaires. - Ils ont été souvent étudiés. Ce problème est analogue à celui des perturbations des satellites ou des planètes par d'autres corps. Il a généralement été traité en utilisant les équations de Lagrange par MUSEN [23] et [24] et KOZAÏ [15]. L'étude des termes à longue période, donnant l'aspect du mouvement pour un grand intervalle de temps, pose des problèmes difficiles, qui sont en voie de résolution par l'application de diverses techniques de moyennes, par MUSEN [24] ou LIDOV [20], en négligeant en général les effets du second ordre.

2° Le frottement atmosphérique. - Il faut signaler une tentative intéressante de BROUWER et HORI [5] pour donner la solution du mouvement d'un corps autour d'une terre aplatie, munie d'une atmosphère. Ils n'ont encore introduit qu'un modèle simplifié d'atmosphère fixe. Ils utilisent la méthode de variation des constantes par un système d'équations utilisant les variables canoniques.

3° La pression de radiation. - Comme nous l'avons indiqué, une solution analytique complète paraît difficile à cause des discontinuités dues au phénomène d'éclipse. Dans ces conditions, il paraît difficile de faire mieux que KOZAÏ [17] dans cet ordre d'idées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKSENOV (E. P.), GREBENIKOV (E. A.), DEMINE (V. G.). - Solution générale du mouvement d'un satellite artificiel dans un champ normal, Satellites artificiels de la Terre, Vol. 8, p. 64. - Moscou, Académie des Sciences d'URSS, 1961.

[2] BROUWER (D.). - Outlines of general theories of the Hill-Brown and Delaunay types of orbits of artificial satellites, Astron. J., t. 63, 1958, p. 433.

[3] BROUWER (D.). - Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, Astron. J., t. 64, 1959, p. 378.

[4] BROUWER (D.). - Analytical study of resonance caused by solar radiation pressure, Symposium international sur la dynamique des satellites [1962. Paris] (Sous presse).

[5] BROUWER (D.) and HORI (G.). - Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite, Astron. J., t. 66, 1961, p. 193.

[6] DEMINE (V. G.). - Sur les orbites elliptiques dans le problème de deux centres immobiles, Communications de l'Institut astronomique Sternberg, Moscou, n° 115, 1960, p. 35.

[7] DOUBOSHINE (G. N.). - Sur quelques solutions partielles du problème du mouvement de translation-rotation de deux corps, Communications de l'Institut astronomique Sternberg, Moscou, n° 108, 1960, p. 3.

[8] GARFINKEL (B.). - The orbit of a satellite of an oblate planet, Astron. J., t. 64, 1959, p. 353.

[9] GARFINKEL (B.). - On the motion of a satellite in the vicinity of critical inclination, Astron. J., t. 65, 1960, p. 624.

[10] GARFINKEL (B.). - First international symposium on analytical astrodynamics [1961. UCLA, Los Angeles].

[11] GREBENIKOV (E. A.). - Sur l'application de la méthode de Hill dans l'étude du mouvement d'un satellite artificiel de la Terre, Bull. Inst. Astron. théor. Léningrad, t. 7, 1960, p. 811.

[12] HORI (G.). - The motion of an artificial satellite in the vicinity of critical inclination, Astron. J., t. 65, 1960, p. 291.

[13] ISZAK (I.). - A theory of satellite motion about an oblate planet, Smithsonian Inst. Astrophys. Observ., Special Report n° 52, 1960.

[14] KISLIK (M. D.). - Mouvement d'un satellite artificiel autour de la Terre, Satellites artificiels de la Terre, Vol. 4, p. 3. - Moscou, Académie des Sciences d'URSS, 1960.

[15] KOZAÏ (Y.). - On the effects of the Sun and the Moon upon the motion of a close earth satellite, Smithsonian Inst. Astrophys. Observ., Special Report n° 22, 1959, p. 7.

[16] KOZAÏ (Y.). - Tesseral harmonics of the potential of the Earth as derived from satellite motions, Smithsonian Inst. Astrophys. Observ., Special Report n° 72, 1961.

[17] KOZAÏ (Y.). - Effects of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite, Smithsonian Inst. Astron. Observ., Special Report n° 56, 1961, p. 25.

[18] KOZAÏ (Y.). - The potential of the Earth derived from satellite motion, Symposium international sur la dynamique des satellites [1962. Paris] (sous presse).

[19] LAGRANGE (J.-L.). - Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes, Miscell. Taurin., t. 4, 1766-1769 ; Oeuvres complètes, t. 2, p. 67-121. - Paris, Gauthier-Villars, 1868.

[20] LIDOV (M. L.). - Evolution des orbites des satellites artificiels de planètes, sous l'action des perturbations gravitationnelles des corps extérieurs, Satellites artificiels de la Terre, Vol. 8, p. 5. - Moscou, Académie des Sciences d'URSS, 1961.

[21] MORANDO (B.). - Libration d'un satellite de 24 heures, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 635-637.

[22] MUSEN (P.). - Application of Hansen's theory of the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth, J. geophys. Research, t. 62, 1959, p. 2271.

[23] MUSEN (P.). - Contribution to the theory of satellite orbits, Space Research, Proceedings of the first international Space Science Symposium [1960. Nice], Vol. 1, p. 434. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1960.

[24] MUSEN (P.). - On the long period lunisolar effect in the motion of the artificial satellite, J. geophys. Research., t. 66, 1961, p. 1659.

[25] STERNE (T.). - The gravitational orbit of a satellite of an oblate planet, Astrophys. J., t. 63, 1958, p. 28.

[26] VINTI (J. P.). - A new method of solution for unretarded satellite orbits, J. Res. Nat. Bur. Stand., t. 62 B, 1959, p. 79.

[27] VINTI (J. P.). - New approach in the theory of satellite orbits, Phys. Rev. Letters, t. 3, 1959, p. 8.

[28] VINTI (J. P.). - Mean motions in conditionally periodic separable systems, J. Res. Nat. Bur. Stand., t. 65 B, 1961, p. 131.

[29] VINTI (J. P.). - Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy, J. Res. Nat. Bur. Stand., t. 65 B, 1961, p. 169.

[30] VINTI (J. P.). - Intermediary equatorial orbits of an artificial satellite, J. Res. Nat. Bur. Stand., t. 66 B, 1961, p. 5.

[31] WHITTAKER (E. T.). - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. - Cambridge, at the University Press, 1904.