# Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste



Cécile DeWitt-Morette


## Quantification des champs classiques admettant une invariance de groupe à un nombre infini de dimensions, d'après les travaux de H. Van Dam


*Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste*, tome 5 (1961-1962), exp. n° 12, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A11_0>

# QUANTIFICATION DES CHAMPS CLASSIQUES ADMETTANT UNE INVARIANCE DE GROUPE À UN NOMBRE INFINI DE DIMENSIONS, D'APRÈS LES TRAVAUX DE H. VAN DAM

par Mme Cécile DEWITT-MORETTE

Les exemples les mieux connus sont l'électrodynamique quantique, le champ de Yang-Mills et la relativité générale.

## 1. Théorie classique.

Soit $S[\Phi]$ l'action de la théorie classique, $S[\Phi]$ est une fonctionnelle des variables du champ $\Phi^i$, $\Phi^i$ est une notation abrégée pour $\Phi^i(x)$.

$S[\Phi]$ est invariant dans les transformations $\delta\Phi^i$ caractérisées par les fonctions $\xi^\alpha$ ( $\xi^\alpha$ est également une notation abrégée pour $\xi^\alpha(x)$ )

$$\delta\Phi^i = R^i[\Phi , \xi] \tag{1}$$

auxquelles correspondent les transformations infinitésimales

$$\delta\Phi^i = R^i{}_\alpha \, \delta\xi^\alpha = \left(\frac{\delta R^i[\Phi , \xi]}{\delta\xi^\alpha}\right)_{\xi=0} \delta\xi^\alpha \quad . \tag{2}$$

## 2. Quantification par la méthode de Feynman.

Supposons que la théorie quantique des champs soit exprimée entièrement en termes des nombres suivants :

$$\langle 0 \mid T(I[\Phi]) \mid 0\rangle \text{ égal par définition à } \frac{\int d[\Phi]\ e^{iS[\Phi]}\ I[\Phi]}{\int d[\Phi]\ e^{iS[\Phi]}} \tag{3}$$

où

$I[\Phi]$ est un invariant fonctionnel de la théorie classique ,

$S[\Phi]$ est l'action classique ,

$d[\Phi]$ est un invariant intégral de l'espace fonctionnel .

Les difficultés introduites par l'invariance (1) sont bien connues, et peuvent être résumées ainsi : En raison de son invariance, $S[\Phi]$ ne contient pas assez de variables dynamiques pour être couplée à une source extérieure $T_i$ . Cette difficulté est en fait superficielle comme le montre la solution du problème suivant : Est-il possible d'étendre $S[\Phi]$ de telle sorte qu'elle contienne suffisamment de variables dynamiques pour être couplée à une source extérieure $T_i$ , sans toutefois changer les nombres (3) associés aux invariants $I[\Phi]$ ?

Remarquons que $\int d[\Phi]$ peut être mis sous la forme suivante :

$$\int d[\Phi] = \int d[\Phi'] \int d[\xi] \frac{\delta R[\Phi' , \xi]}{\delta \Phi'} \tag{4}$$

où $\Phi'$ est choisie de telle sorte qu'elle satisfasse à une condition supplémentaire arbitraire :

$$R^i_{\ \alpha}[\Phi'] \, \Phi'^j \, g_{ij} = 0 \quad . \tag{5}$$

Supposons que $R[\Phi , \xi]$ soit au plus linéaire en $\Phi$ (hypothèse qui est satisfaite dans tous les cas intéressants, y compris la relativité générale), on montre facilement grâce à (4) et à l'invariance de $I$ et de $S$ que

$$\langle 0 \mid T(I[\Phi]) \mid 0 \rangle = \frac{\int d[\Phi'] \, e^{iS[\Phi']} \, I[\Phi']}{\int d[\Phi'] \, e^{iS[\Phi']}} \quad .$$

Par le même raisonnement, on trouve une extension possible $S \rightarrow S + T$ pour l'électrodynamique quantique et le champ de Yang-Mills qui réponde à la question posée ci-dessus.

$$T = (R^i_{\ \alpha}[\Phi] \, \Phi^j \, g_{ij}) \, R^i_{\ \beta}[\Phi] \, \Phi^j \, g_{ij}) \, g^{\alpha\beta} \quad .$$

Considérons, par exemple, le champ électromagnétique libre.

$$S[\Phi] = - \frac{1}{4} \int F^{\mu\nu}(x) \, F_{\mu\nu}(x) \, dx \quad .$$

Choisissons d'abord la condition supplémentaire $\partial^\mu A_\mu = 0$ qui conduit à l'extension

$$T[\Phi] = \int g(x)(\partial^{\mu} A_{\mu}(x))^2 \, dx \qquad ,$$

et limitons-nous au cas $g(x) = \lambda$

$$S_{,\mu\nu} + T_{,\mu\nu} = (g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu}) \delta(x , x') + \lambda\partial_{\mu} \partial_{\nu} \delta(x , x')$$

d'où l'on tire les fonctions de Green

$$G_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^4} (g_{\mu\nu} k^2 + \frac{1 - \lambda}{\lambda} k_{\mu} k_{\nu}) \qquad ,$$

$\lambda = 1$ correspond à la théorie de Gupta-Bleuler.

Les différentes théories obtenues par les différents choix de la condition supplémentaire et de la fonction $g(x)$ conduisent toutes aux mêmes invariants (3), et peuvent être utilisées indifféremment.

La liberté de ce choix correspond à la liberté du choix de la jauge en théorie classique.

Le schéma ci-dessus s'applique à l'électrodynamique quantique, au champ de Yang-Mills, et semble s'appliquer à la relativité générale.