Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Cécile DeWitt-Morette

Fonctions de Green dans un espace de Riemann

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 11, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A10_0>

FONCTIONS DE GREEN DANS UN ESPACE DE RIEMANN

par Mme Cécile DEWITT-MORETTE

Les fonctions de Green, avancées ou retardées, correspondant à l'équation covariante vectorielle suivante :

$$g^{\nu\sigma} A_{\mu . \nu\sigma} + R_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu} = 0$$

s'écrivent :

$$\overset{\pm}{G}_{\mu\nu'}(x , x')$$

$$= [1 \pm \varepsilon(x , x')] \frac{1}{8\pi} [\Delta^{1/2}(x , x') \; g_{\mu\nu'}(x , x') \; \delta(\sigma) - v_{\mu\nu'}(x , x') \; \theta(- \sigma)] \quad .$$

1. Notations.

Un point désigne une dérivée covariante.

La signature de g est $- , + , + , +$.

Le tenseur de Riemann est choisi tel que $A_{\mu . \nu\sigma} - A_{\mu . \sigma\nu} = R_{\nu\sigma\mu}{}^{\tau} A_{\tau}$.

$\varepsilon(x , x') = \pm 1$ suivant que x' est dans le futur ou le passé de x .

$\sigma \equiv \pm \frac{1}{2} s^2$ ou s est la distance géodésique, $\sigma > 0$ pour un intervalle du genre espace, σ est la fonction d'univers Ω de Synge.

$g_{\mu\nu'}$ est le bivecteur de transport parallèle de long de la géodésique de x à x' .

$\Delta \equiv |g_{\mu\nu'}|^{-1} \, |- \sigma_{. \mu\nu'}|$.

$\theta(\sigma) = 0$ ou 1 suivant que σ est négatif ou positif.

Nous allons étudier les $v_{\mu\nu'}$, ou termes de queue, qui jouent un rôle caractéristique dans les problèmes relatifs au champ de gravitation. HADAMARD donne les $v_{\mu\nu'}$ sous forme de développement en série dont chaque terme s'obtient par récurrence, en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires le long des géodésiques originaires de x (ou de x').

Lorsque le champ de gravitation est faible, c'est-à-dire lorsque $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ les termes de queue peuvent être calculés très simplement en développant en série de Taylor les fonctions de Green G de l'espace courbe autour des fonctions de Green G^0 correspondantes de l'espace plan. Ainsi :

$$(1)\quad G^{-}_{\mu\nu'}(x\,,\,x') = \eta_{\mu\nu}\, G^{0-}(x\,,\,x') + \int \left(\frac{\delta G^{-}_{\mu\nu'}(x\,,\,x')}{\delta g_{\alpha''\beta''}(x')}\right)_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \delta g_{\alpha''\beta''}(x'')\, d^4 x'' + \dots$$

Les dérivées variationnelles $\dfrac{\delta G^{-}_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha''\beta''}}$ s'obtiennent en prenant la dérivée variationnelle de l'équation satisfaite par les $G^{-}_{\mu\nu'}$.

$$g^{1/2}\, g^{\mu\nu}\, g^{\sigma\tau}\, G^{-}_{\mu\nu'\,.\sigma\tau} + g^{1/2}\, R^{\mu\nu}\, G^{-}_{\mu\nu'} = -\, g^{\nu}_{\ \nu'}\, \delta(x\,,\,x') \quad .$$

La dérivée variationnelle de cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$g^{1/2}\, g^{\mu\nu}\, g^{\sigma\tau}\left(\frac{\delta G^{-}_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha''\beta''}}\right)_{.\sigma\tau} + g^{1/2}\, R^{\mu\nu}\,\frac{\delta G^{-}_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha''\beta''}} = -\,\Lambda^{\nu}_{\ \nu'}{}^{\alpha''\beta''}(x\,,\,x'\,,\,x'')$$

et

$$(2)\quad \frac{\delta G^{-}_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha''\beta''}} = \int G^{-}_{\mu\nu'''}\,\Lambda^{\nu'''}{}_{\nu'}{}^{\alpha''\beta''}\, d^4 x'''$$

$$= \frac{1}{2}\, g^{1/2}\, G^{-}_{\mu\gamma.\varepsilon}\{g^{\gamma\delta}(g^{\alpha\varepsilon}\, g^{\beta\zeta} + g^{\alpha\zeta}\, g^{\beta\varepsilon} - g^{\alpha\beta}\, g^{\varepsilon\zeta}) + g^{\varepsilon\zeta}(g^{\alpha\gamma}\, g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})$$
$$-\, g^{\gamma\zeta}(g^{\beta\varepsilon}\, g^{\alpha\delta} + g^{\alpha\varepsilon}\, g^{\beta\delta}) - g^{\delta\varepsilon}(g^{\alpha\gamma}\, g^{\beta\zeta} + g^{\beta\gamma}\, g^{\alpha\zeta})\}\, G^{-}_{\delta\nu'.\zeta}$$
$$+ \frac{1}{2}\, g^{1/2}\{G^{-\beta}_{.\mu}\, G^{-\alpha}_{\nu'} + G^{-\alpha}_{\mu'}\, G^{-\beta}_{.\nu'} + G^{-\alpha}_{.\mu}\, G^{-\beta}_{\nu'} + G^{-\beta}_{\mu}\, G^{-\alpha}_{.\nu'} + (G^{-\gamma}_{\mu}\, g^{\alpha\beta}\, G^{-\delta})_{.\gamma\delta}\}$$
$$-\, \frac{1}{4}\, g^{1/2}\, G^{-}_{\mu\gamma}(R^{\alpha\gamma\beta\delta} + R^{\beta\gamma\alpha\delta} + g^{\alpha\gamma}\, R^{\beta\delta} + g^{\beta\gamma}\, R^{\alpha\delta} + g^{\beta\delta}\, R^{\alpha\gamma} + g^{\alpha\delta}\, R^{\beta\gamma})\, G_{\delta\nu'} \quad .$$

Dans cette équation tous les indices $\alpha\beta \dots \zeta$ de la première moitié de l'alphabet se rapportent à x'' et devraient être affectés d'un double prime qui a été omis pour simplifier l'écriture.

2. Méthode de calcul.

Le calcul du premier terme du développement en série de $G^{-}_{\mu\nu'}$ autour de $\eta_{\mu\nu}\, G^{C-}$ [équation (1)] peut être conduit de façon simple et compacte de la façon suivante :

a. $\left(\dfrac{\delta G^{-}_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha''\beta''}}\right)_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}$ est une fonction bilinéaire des $G^{0-}(x - x'')$ et des $G^{0-}(x'' - x')$ ou de leurs dérivées premières et secondes [cf. équation (2)] ; les dérivées premières et secondes par rapport à x'' peuvent être reportées sur x et x' respectivement, et sorties de l'intégrale dans l'équation (1) qui prend alors la forme suivante :

$$I \equiv \int G^{0-}(x - x'')\ f(x'')\ G^{0-}(x'' - x')\ d^4 x'' \quad .$$

b. $\int \frac{1}{4\pi}\, \delta[\tfrac{1}{2}(x - x'')^2]\ f(x'')\ \frac{1}{4\pi}\, \delta[\tfrac{1}{2}(x'' - x')^2]$

$$= \begin{cases} \int G^{0-}(x - x'')\ f(x'')\ G^{0-}(x'' - x')\ d^4 x'' & \text{si } x' \text{ est dans le passé de } x \,, \\ \int G^{0+}(x - x'')\ f(x'')\ G^{0+}(x'' - x')\ d^4 x'' & \text{si } x' \text{ est dans le futur de } x \,. \end{cases}$$

La relation ci-dessus permet l'intégration immédiate de deux des intégrales de I dans un système de variables particulièrement simples.

3. Propriétés des termes de queue.

Soit $\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$.

Soit $\Omega^{\mu}(\theta\,,\,\varphi)$ le vecteur unité porté par la normale de x'' à x , x' et $d\Omega = d\varphi\ d\cos\theta$.

Le calcul de l'équation (1) par la méthode ci-dessus conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} v_{\mu\nu'}(x\,,\,x') = -\frac{1}{8\pi}\,\{ & \partial_\alpha\, \partial_{\beta'} \int d\Omega[\eta_{\mu\nu}\, h^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}\, h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, \eta_{\mu\nu}\, \eta^{\alpha\beta}\, \eta^{\gamma\delta}\, h_{\gamma\delta}] \\ & - (\partial_\alpha\, \partial_{\mu'} + \partial_\alpha\, \partial_\mu) \int d\Omega\, h^{\alpha}{}_{\nu} - (\partial_{\alpha'}\, \partial_\nu + \partial_{\alpha'\nu'}) \int d\Omega\, h^{\alpha}{}_{\mu} \\ & + \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\, \partial_\nu + \partial_\mu\, \partial_{\nu'} + \partial_{\mu'}\, \partial_\nu + \partial_{\mu'}\, \partial_{\nu'}) \int d\Omega\, \eta^{\alpha\beta}\, h_{\alpha\beta}\} \quad . \end{aligned}$$

<u>Limite de</u> $v_{\mu\nu'}$ <u>pour</u> $x' \to x$. – Cette limite s'obtient facilement par la méthode ci-dessus en remplaçant, dans I , $f(x'')$ par son développement en série autour de $f(x)$. On obtient :

$$\lim_{x \to x'} v_{\mu\nu'} = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} + \frac{1}{12} \eta_{\mu\nu} R \quad .$$

Ce résultat a été vérifié par une autre méthode.

4. Application au mouvement d'un électron dans un champ de gravitation donné.

A l'approximation e^2 , l'équation du mouvement d'un électron dans un champ de gravitation donné s'écrit ([1]) :

$$m\ddot{x}^{\alpha}(\tau) = ec^{-1} F^{\alpha}_{\ \beta}\, \dot{x}^{\beta}(\tau) - \frac{2}{3} e^2 c^{-3}[\dddot{x}^{\alpha}(\tau) - c^{-2}\, \ddot{x}^2(\tau)\, \dot{x}^{\alpha}(\tau)] + \mathfrak{F}^{\alpha}(\tau)$$

$$\mathfrak{F}^{\alpha}(\tau) \equiv e^2 c^{-1} \dot{x}^{\alpha}(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} [v^{\alpha}_{\ \gamma',\beta}[x(\tau) , x'(\tau')] - v_{\beta\gamma',}{}^{\alpha}[x(\tau) , x'(\tau')]\, \dot{x}'^{\gamma}(\tau')\, d\tau'$$

où τ est le temps propre.

En l'absence du champ électromagnétique la perte d'énergie de la particule par rayonnement est :

$$W = -\int_{-\infty}^{\tau} \mathfrak{F}^{0}\, d\tau \quad .$$

Nous avons calculé $\mathfrak{F}^0$ dans le cas suivant :

– champ statique à symétrie sphérique. Soit M la masse de la source du champ prise pour origine des coordonnées :

$$h_{\mu\nu}(r'') = \delta_{\mu\nu} \frac{2GM}{c^2 |r''|}$$

– électron animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v le long d'une droite passant par la source du champ et choisie comme axe du z .

([1]) DEWITT (B. S.) and BREHME (R. W.). – Radiation damping in a gravitational field, Annals of Physics, t. 9, 1960, p. 220-259.

Lorsque $z < 0$ (électron en deçà de la source), l'énergie perdue par un électron allant de $-\infty$ à z est :

$$W(z\ ,\ -\infty) = \frac{4}{3}\frac{GMe^2}{c^2}\frac{v}{c+v}\int_{-\infty}^{z}\frac{dz}{z^3} \quad .$$

Lorsque $z > 0$ (électron au delà de la source) la perte d'énergie instantanée de l'électron au point z est

$$\frac{dW}{dz} = \frac{4}{3}\frac{GMe^2}{c^2}\frac{-v}{c-v}\frac{1}{z^3} \quad .$$

On remarque que $W(+\infty\ ,\ -\infty)$ calculé brutalement à partir des deux expressions ci-dessus

$$W(+\infty\ ,\ -\infty) = \frac{4}{3}\frac{GMe^2}{c^2}\left[\frac{v}{c+v}\int_{-\infty}^{0}\frac{dz}{z^3} - \frac{v}{c-v}\int_{0}^{+\infty}\frac{dz}{z^3}\right]$$

est différent de zéro. Or $W(+\infty\ ,\ -\infty)$ doit être nul, en effet : tout phénomène classique peut être obtenu par approximation d'un phénomène quantique, or, aucun phénomène quantique ne peut donner une perte d'énergie en G .

Une étude plus minutieuse du comportement de l'électron au voisinage de la source permettra vraisemblablement de résoudre cette difficulté. Cette étude n'étant pas encore terminée, nous ne pouvons pas, dans le cas $z > 0$, donner la perte d'énergie totale $W(z\ ,\ -\infty)$ mais seulement la perte d'énergie instantanée.